

多重边复杂网络系统的稳定性分析*

高 洋^{1)†} 李丽香¹⁾ 彭海朋¹⁾ 杨义先¹⁾ 张小红¹⁾²⁾

1) 北京邮电大学 网络与交换技术国家重点实验室,信息安全中心,北京 100876)

2) 江西理工大学信息工程学院 赣州 341000)

(2007 年 5 月 30 日收到,2007 年 6 月 20 日收到修改稿)

根据网络中边的不同性质提出了网络拆分的思想,通过引入时滞进行拆分,从而建立了多重边复杂网络的动力学模型.基于 Lyapunov 稳定理论研究了多重边复杂网络的稳定性问题,给出了节点动力学无时滞和有时滞两种情况下网络稳定的充分条件.最后通过数值仿真验证了结论的正确性和有效性.

关键词:多重边复杂网络,网络拆分,时滞, Lyapunov 稳定理论

PACC: 0545

1. 引 言

20 世纪 90 年代以来,复杂网络研究引起了人们的广泛关注,对复杂网络的定性特征与定量规律的深入探索、科学理解以及可能的应用,已成为网络时代复杂性科学研究中一个极其重要的挑战性课题.复杂网络的理论研究始于 20 世纪 60 年代由 Erdos 和 Rényi 提出的 ER 随机图模型^[1].在此后的近 40 年里,该模型一直是研究复杂网络的基本模型.20 世纪末,国际上有两项开创性工作掀起了一股研究复杂网络的热潮.一是 1998 年 Watts 和 Strogatz 提出了小世界(Small-World)网络模型^[2].二是 1999 年 Barabási 和 Albert 提出了无尺度(Scale-Free)网络模型^[3].此后,相关研究主要是针对复杂网的模型、属性和网络上的过程等方面的展开.目前提出的复杂网的数学模型主要有随机网络模型、耦合规则网模型、小世界网模型、无标度网络模型和广义动态复杂网模型.对于网络属性的研究主要集中于网络的传递性、聚类性、定点度分布和小世界效应等方面.对于网络上的过程研究集中于渗流理论、传染过程、网络相变、网络混沌同步等方面^[4-9].

目前,国内外对于复杂网络的研究主要是针对于单边的复杂网络的研究,而对于具有多重边复杂

网络的研究工作还很少.在现实生活中,存在着由多种性质的子网络构成的多重边复杂网络,如交通网、通信网、人际关系网等,这些多重边复杂网络多数是由多个不同性质的子网络构成的,以交通网为例,把每个城市看作一个节点,两城市间的交通线为边,两城市间可能存在多种交通方式,如公路、铁路、航空线等,这样的交通网络就形成了一个多重边的复杂网络.这样的具有多种性质的多重边复杂网络必然具有不同于单一性质的单边复杂网络的特征,其网络的拓扑结构、节点动力学特性等可能更为复杂.

现有的各种模型包括随机网络、小世界网络、无标度网络和一般连续时间耦合网络等模型^[1-3,10-13],它们都很好地描述了单边网络的复杂性,然而这些模型不能完全地刻画出多重边复杂网络的特性,如何处理网络中的多重边情况以及如何建立多重边网络的模型使其既能体现网络结构的复杂性,又能体现节点动力学的复杂性,是复杂网络建模研究中需要解决的关键问题.

显然,在处理多重边时,一个最简单的方式是把多重边合并为一条边进行处理.但是,在现实生活中存在的一些边是不可以简单合并处理的,比如上面提到的交通网和通信网,由于网络中边与边之间速度的较大差异,简单地合并不能真实地反应多重

* 国家重点基础研究发展计划(973)项目(批准号:2007CB310704)国家自然科学基金(批准号:60673098)和国家自然科学基金委员会与香港研究资助局联合科研基金(批准号:60731160626)资助的课题.

† E-mail: gaoyang_du@sina.com

边网络的特性. 因此, 我们就要考虑运用其他的方法来处理网络的多重边. 本文考虑的是多重边网络中任意两点间的多条边可能具有不同性质. 例如, 交通网中的公路网、铁路网、航空网等运输速度是不同的, 在同时出发的前提下, 航空网运输速度最快, 铁路网和公路网对于航空网都分别存在一个到达时间的滞后(如图 1 所示); 通信网中的电缆网络和光纤网络也存在这样的性质不同, 其中电缆网络相对于光纤网络在信息传输速度上存在滞后, 同样, 人们之间可以通过信件、电话、电子邮件等多种方式进行联络, 我们可以把这种联络网络拆分成邮寄网络、电话网络、Internet 网络, 显然, 这些子网络也存在信息传输时间的不同.

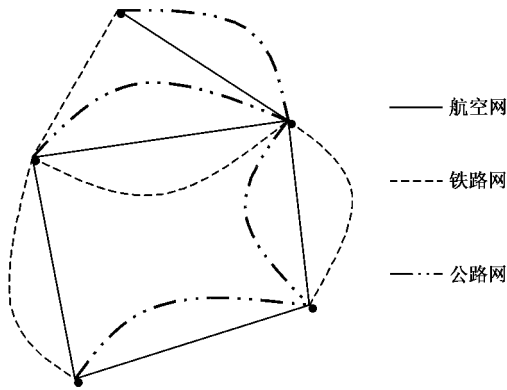


图 1 交通网络示意图

本文运用网络拆分的思想根据边之间信息传输速度的不同通过引入滞后将多重边的复杂网络拆分成多个子网络, 进而建立数学模型, 并且在此基础上还将对多重边复杂网络进行稳定性分析, 给出网络稳定时的充分条件, 最后通过仿真验证了结果的正确性.

2. 模型描述

最近, 文献 [14, 15] 提出了连续时间线性耦合网络的动力学模型:

$$\dot{x}_i = f(x_i) + \epsilon \sum_{j=1}^N a_{ij} Hx_j, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

这里 $f: R^n \rightarrow R^n$ 是连续可微的函数, $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})^T \in R^n$ 为节点 i 的状态变量, 常数 $\epsilon > 0$ 为网络的耦合强度, $H \in R^{n \times n}$ 为各个节点状态变量之间的内部耦合函数, 耦合矩阵 $A = (a_{ij})_{N \times N} \in R^{N \times N}$ 表示网络的拓扑结构, 满足耗散耦合条件 $\sum_j a_{ij} = 0$,

其中 a_{ij} 的定义如下: 若节点 i 和节点 $j (i \neq j)$ 之间有连接, 则 $a_{ij} = a_{ji} = 1$, 否则 $a_{ij} = a_{ji} = 0 (i \neq j)$, 对角元为 $a_{ii} = -\sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}, i = 1, 2, \dots, N$. 这个模型很好地刻画了单边复杂网络的动力学特性.

本文将考虑的是复杂网络多重边时的情况, 根据节点间信息传输速度的不同, 通过引入滞后对多重边网络进行拆分, 将多重边网络拆分成多个子网络的组合形式.

若把多重边网络拆分成多个子网络, 显然有多种拆分方式, 而我们拆分的原则是根据边的不同性质进行拆分, 考虑含有 N 个节点的多重边复杂网络, 假设网络中边的性质有 m 种, 网络中两点间的最大重边数为 k , 其中具有相同性质的边和 N 个点就形成了一个子网络, 这样就得到了 m 个子网络, 拆分后的子网络可能也是多重边的网络, 设第 l 个子网络的最大重边数为 $p_l (l = 0, 1, \dots, m-1)$ 并且 $p_l \leq k$, 这样就构成了网络的拆分(拆分后的每个子网络都有其自身的性质而且可能不是连通的). 本文把网络中各个边传输速度的不同定义为性质不同, 以传输速度最快的或没有时滞的边和 N 个节点组成的网络为基准网络, 称这个基准网络为零子网络($l = 0$)即时滞 $\tau_0 = 0$ 的网络, 剩余边中相对于零子网络有相同时滞 τ_l 的边和 N 个节点构成第 $l (l = 1, \dots, m-1)$ 个子网络, 这样, 最后可以拆分成 m 个子网络. 以交通网为例, 把交通网拆分成公路网、铁路网、航空网等子网络, 以运输速度最快的航空网络为零子网络, 公路网、铁路网相对于航空网分别存在滞后 τ_1 和 τ_2 . 在现实生活中像交通网这样存在传输滞后的情况是大量存在的, 比如, 通信网络和人际间的联系网络. 因此, 我们根据多重边复杂网络中边的传输速度不同通过引入滞后对多重边网络进行拆分的方法是可行的. 图 2 是对交通网络进行拆分过程的示意图.

我们考虑一个由 N 个相同节点构成的耗散耦合 k 重边动态网络, 其中网络中边的性质有 m 种, 根据上面的思想和方法, 我们把这个 k 重边动态网络拆分成 m 个子网络, 则整个动态网络的状态方程为

$$\begin{aligned} \dot{x}_i = & f(x_i) + \epsilon_0 \sum_{j=1}^N a_{(0)ij} Hx_j(t) \\ & + \epsilon_1 \sum_{j=1}^N a_{(1)ij} Hx_j(t - \tau_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \epsilon_2 \sum_{j=1}^N a_{(2)ij} Hx_j(t - \tau_2) \\
& + \dots + \epsilon_{m-1} \sum_{j=1}^N a_{(m-1)ij} Hx_j(t - \tau_{m-1}), \\
& i = 1, 2, \dots, N, \tag{1}
\end{aligned}$$

式中 $f: R^n \rightarrow R^n$ 是连续可微的函数, $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})^T \in R^n$ 为节点 i 的状态变量, $\tau_l, l = 1, 2, \dots, m-1$ 是第 l 个子网络相对于不存在时滞的零子网络的时滞时间, 常数 $\epsilon_l > 0, l = 0, 1, 2, \dots, m-1$ 为第

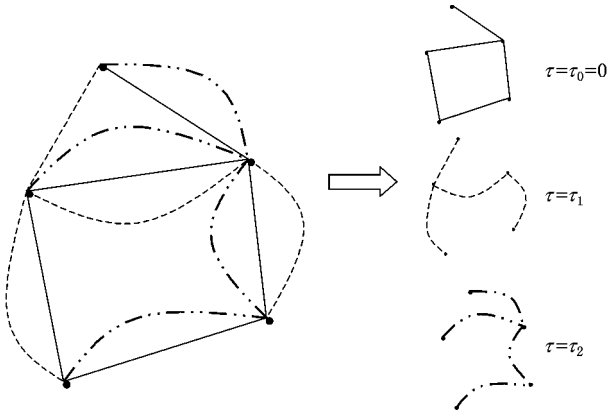


图2 网络拆分示意图 (τ 表示运输时间的滞后)

l 个子网络的耦合强度, $H \in R^{n \times n}$ 为各个节点状态变量之间的内部耦合函数(本文假设所有拆分后的子网络内部耦合函数相同), 耦合矩阵 $A_{(l)} = (a_{(l)ij})_{N \times N} \in R^{n \times n}, l = 0, 1, 2, \dots, m-1$ 表示第 l 个子网络的拓扑结构, 满足耗散耦合条件 $\sum_j a_{(l)ij} = 0$, 其中 $a_{(l)ij}$ 的具体定义如下: 若第 l 个子网络中的节点 i 和节点 $j (i \neq j)$ 之间有连接且连接数为 q , 这里 $q \leq p_l$, 则 $a_{(l)ij} = a_{(l)ji} = q$, 若两点之间无连接, 则 $a_{(l)ij} = a_{(l)ji} = 0 (i \neq j)$, 且矩阵 $A_{(l)}$ 的对角元的定义如下:

$$\begin{aligned}
a_{(l)ii} &= - \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{(l)ij} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{(l)ji}, \\
& i = 1, 2, \dots, N, l = 0, 1, 2, \dots, m-1.
\end{aligned}$$

对于图2的交通网来说, $N = 5, m = k = 3, p = 1$, 其中飞机网可看作零子网络即 $l = 0$, 时滞 $\tau_0 = 0$, 铁路网对于飞机网存在时滞 τ_1 , 公路网对于飞机网存在时滞 τ_2 . 则网络状态方程为

$$\dot{x}_i = f(x_i) + \epsilon_0 \sum_{j=1}^N a_{(0)ij} Hx_j(t)$$

$$\begin{aligned}
& + \epsilon_1 \sum_{j=1}^N a_{(1)ij} Hx_j(t - \tau_1) \\
& + \epsilon_2 \sum_{j=1}^N a_{(2)ij} Hx_j(t - \tau_2), \\
& i = 1, 2, \dots, N, \tag{2}
\end{aligned}$$

各变量的具体描述与动态网络(1)式以相同.

注1 我们对多重边复杂网络进行拆分后得到的 m 个子网络, 可能连通也可能不连通.

注2 N 个节点、 $m \geq 2$ 种性质、 k 重边的动态网络中, $k = 1$ 时, 网络为一个单边的复杂网络, 但是它同样可以根据上面的思想和方法进行拆分, 拆分后的 m 个子网络均是不连通的.

在下一部分, 我们将对多重边网络的稳定性进行分析, 给出稳定性的定理. 对定理进行证明时我们需要用到下面的引理.

引理 对于任意的 $x, y \in R^n, \mu > 0$, 有下式成立:

$$2x^T y \leq \mu x^T x + \frac{1}{\mu} y^T y.$$

3. 稳定性分析

如果当 $t \rightarrow \infty$ 时有

$$x_1(t) \rightarrow x_2(t) \rightarrow \dots \rightarrow x_N(t) \rightarrow s(t), \tag{3}$$

就称动态网络(1)式是稳定的. 由于耗散耦合条件, 平衡点 $s(t) \in R^n$ 为单个孤立节点的解, 满足 $s(t) = f(s(t))$.

考虑一个由 N 个相同节点构成的连续时间的耗散耦合动态网络, 其中网络的性质 $m = 2$, 整个动态网络的状态方程为

$$\begin{aligned}
\dot{x}_i &= f(x_i) + \epsilon_0 \sum_{j=1}^N a_{(0)ij} Hx_j(t) \\
& + \epsilon_1 \sum_{j=1}^N a_{(1)ij} Hx_j(t - \tau_1), i = 1, 2, \dots, N \tag{4}
\end{aligned}$$

各变量的具体描述与动态网络(1)式相同.

对状态方程式(4)关于平衡点 $s(t)$ 线性化, 令 ξ_i 为第 i 个节点状态的变分, 可以得到如下的变分方程:

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_i(t) &= Df(s) \xi_i(t) + \epsilon_0 \sum_{j=1}^N a_{(0)ij} H \xi_j(t) \\
& + \epsilon_1 \sum_{j=1}^N a_{(1)ij} H \xi_j(t - \tau_1),
\end{aligned}$$

这里 $Df(s)$ 是 $f(s)$ 关于 $s(t)$ 的 Jacobi 矩阵, 在令 $\xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N]^T$ 则上式可以写成

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= Df(s)\xi(t) + \varepsilon_0 HA_{(0)}\xi(t) + \varepsilon_1 HA_{(1)}\xi(t - \tau_1) \\ &= [Df(s) + \varepsilon_0 HA_{(0)}]\xi(t) + \varepsilon_1 HA_{(1)}\xi(t - \tau_1). \end{aligned} \tag{5}$$

基于 Lyapunov 稳定定理 对于动态网络(4)式进行稳定系分析 , 可以得出如下的充分性条件 :

定理 1 如果存在一个正定对称矩阵 $P \in R^{n \times n}$, 使得

$$P[Df(s) + \varepsilon_0 HA_{(0)}] + [Df(s) + \varepsilon_0 HA_{(0)}]^T P = -2Q, \tag{6}$$

以及

$$\|P\| \|\varepsilon_1 HA_{(1)}\| < \lambda_{\min}(Q) \tag{7}$$

成立 那么动态网络(4)式是稳定的. 这里 Q 是一给定的实正定对称矩阵.

证明 考虑下面的 Lyapunov 方程 :

$$\dot{V}(t) = \xi^T(t)P\xi(t) + \int_{t-\tau_1}^t \xi^T(s)Q\xi(s)ds, \tag{8}$$

这里 P 和 Q 都是对称矩阵. 把(5)式结果代入(8)式 , 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \xi^T(t)[Df(s) + \varepsilon_0 HA_{(0)}]^T P \\ &\quad + P[Df(s) + \varepsilon_0 HA_{(0)}]\xi(t) \\ &\quad + 2\xi^T(t - \tau_1)\varepsilon_1 HA_{(1)}^T P\xi(t) \\ &\quad + \xi^T(t)Q\xi(t) - \xi^T(t - \tau_1)Q\xi(t - \tau_1). \end{aligned}$$

根据已知条件(6) , 应用引理 , 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -\xi^T(t)Q\xi(t) + \xi^T(t - \tau_1)Q\xi(t - \tau_1) \\ &\quad + \xi^T(t)P(\varepsilon_1 HA_{(1)})Q^{-1}(\varepsilon_1 HA_{(1)})^T P\xi(t) \\ &\quad - \xi^T(t - \tau_1)Q\xi(t - \tau_1) \\ &= \xi^T(t)[\mathbf{I} - Q + P(\varepsilon_1 HA_{(1)}) \\ &\quad \times Q^{-1}(\varepsilon_1 HA_{(1)})^T P]\xi(t). \end{aligned}$$

同时可知

$$\begin{aligned} &[\lambda_{\max}(Q^{-1/2}P(\varepsilon_1 HA_{(1)})Q^{-1}(\varepsilon_1 HA_{(1)})^T PQ^{1/2})]^{1/2} \\ &= \|Q^{-1/2}P(\varepsilon_1 HA_{(1)})Q^{-1/2}\| \\ &\leq \|Q^{-1/2}\|^2 \|P(\varepsilon_1 HA_{(1)})\| \\ &= \lambda_{\max}(Q^{-1}) \|P(\varepsilon_1 HA_{(1)})\| \\ &= \frac{\|P(\varepsilon_1 HA_{(1)})\|}{\lambda_{\min}(Q)}. \end{aligned}$$

根据条件(7)可以得到

$$\lambda_{\max}(Q^{-1/2}P(\varepsilon_1 HA_{(1)})Q^{-1}(\varepsilon_1 HA_{(1)})^T PQ^{1/2}) < 1,$$

因此 , 可知

$$P(\varepsilon_1 HA_{(1)})Q^{-1}(\varepsilon_1 HA_{(1)})^T P < Q,$$

可以证得 $\dot{V}(x(t), t) < 0$.

根据 Lyapunov 稳定定理 , 可知动态网络(4)在平

衡点处是稳定的. 证毕.

进一步考虑由 N 个相同节点构成的含有三种性质的连续时间耗散耦合动态网络 :

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f(x_i) + \varepsilon_0 \sum_{j=1}^N a_{(0)ij} Hx_j(t) \\ &\quad + \varepsilon_1 \sum_{j=1}^N a_{(1)ij} Hx_j(t - \tau_1) \\ &\quad + \varepsilon_2 \sum_{j=1}^N a_{(2)ij} Hx_j(t - \tau_2), \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \tag{9}$$

线性化可得

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= Df(s)\xi(t) + \varepsilon_0 HA_{(0)}\xi(t) \\ &\quad + \varepsilon_1 HA_{(1)}\xi(t - \tau_1) + \varepsilon_2 HA_{(2)}\xi(t - \tau_2) \\ &= [Df(s) + \varepsilon_0 HA_{(0)}]\xi(t) + \varepsilon_1 HA_{(1)}\xi(t - \tau_1) \\ &\quad + \varepsilon_2 HA_{(2)}\xi(t - \tau_2). \end{aligned} \tag{10}$$

那么有如下结论 :

定理 2 如果存在一个正定对称矩阵 $P \in R^{n \times n}$, 使得

$$P[Df(s) + \varepsilon_0 HA_{(0)}] + [Df(s) + \varepsilon_0 HA_{(0)}]^T P = -3Q \tag{11}$$

以及

$$\|P(\varepsilon_1 HA_{(1)})\| + \|P(\varepsilon_2 HA_{(2)})\| < \lambda_{\min}(Q) \tag{12}$$

成立 那么动态网络(9)式是稳定的. 这里 Q 是一给定的实正定对称矩阵.

证明 同定理 1 证明类似 , 考虑下面的 Lyapunov 方程 :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \xi^T(t)P\xi(t) + \int_{t-\tau_1}^t \xi^T(s)Q\xi(s)ds \\ &\quad + \int_{t-\tau_2}^t \xi^T(s)Q\xi(s)ds, \end{aligned} \tag{13}$$

这里 P 和 Q 都是对称矩阵. 把(10)式结果代入(13)式 , 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \xi^T(t)[Df(s) + \varepsilon_0 HA_{(0)}]^T P \\ &\quad + P[Df(s) + \varepsilon_0 HA_{(0)}]\xi(t) \\ &\quad + 2\xi^T(t - \tau_1)\varepsilon_1 HA_{(1)}^T P\xi(t) \\ &\quad + 2\xi^T(t - \tau_2)\varepsilon_2 HA_{(2)}^T P\xi(t) \\ &\quad + 2\xi^T(t)Q\xi(t) - \xi^T(t - \tau_1)Q\xi(t - \tau_1) \\ &\quad - \xi^T(t - \tau_2)Q\xi(t - \tau_2). \end{aligned}$$

根据已知条件(11)和引理可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq \xi^T(t)[\mathbf{I} - Q + P(\varepsilon_1 HA_{(1)})Q^{-1}(\varepsilon_1 HA_{(1)})^T P \\ &\quad + P(\varepsilon_2 HA_{(2)})Q^{-1}(\varepsilon_2 HA_{(2)})^T P]\xi(t), \end{aligned}$$

可知

$$\begin{aligned}
& [\lambda_{\max}(Q^{-1/2} P(\epsilon_1 HA_{(1)}) Q^{-1}(\epsilon_1 HA_{(1)})^T P Q^{1/2} \\
& + Q^{-1/2} P(\epsilon_2 HA_{(2)}) Q^{-1}(\epsilon_2 HA_{(2)})^T P Q^{-1/2})]^{1/2} \\
\leq & \| Q^{-1/2} P(\epsilon_1 HA_{(1)}) Q^{-1/2} \| \\
& + \| Q^{-1/2} P(\epsilon_2 HA_{(2)}) Q^{-1/2} \| \\
= & \lambda_{\max}(Q^{-1} [\| P(\epsilon_1 HA_{(1)}) \| + \| P(\epsilon_2 HA_{(2)}) \|]) \\
= & \frac{ \| P(\epsilon_1 HA_{(1)}) \| + \| P(\epsilon_2 HA_{(2)}) \| }{ \lambda_{\min}(Q) } .
\end{aligned}$$

根据条件 (12) 可得到

$$\begin{aligned}
& P(\epsilon_1 HA_{(1)}) Q^{-1}(\epsilon_1 HA_{(1)})^T P \\
& + P(\epsilon_2 HA_{(2)}) Q^{-1}(\epsilon_2 HA_{(2)})^T P < Q ,
\end{aligned}$$

可以证得 $\dot{V}(x(t), t) < 0$.

根据 Lyapunov 稳定定理知动态网络 (9) 在平衡点处是稳定的. 证毕.

上面关于多重边网络的稳定性分析, 是根据网络拆分的思想考虑节点间的传输速度不同从而引入滞后进行的, 但是在很多情况下节点本身也有可能存在滞后, 设其滞后的状态方程如下:

$$\dot{x}_i(t) = f_1(x_i(t)) + f_2(x_i(t - \tau)).$$

考虑节点本身存在滞后 τ 的情况, 对于由 N 个相同节点构成的含有两种性质的连续时间耗散耦合动态网络, 可得状态方程为

$$\begin{aligned}
\dot{x}_i(t) = & f_1(x_i(t)) + f_2(x_i(t - \tau)) \\
& + \epsilon_0 \sum_{j=1}^N a_{(0)ij} H x_j(t) \\
& + \epsilon_1 \sum_{j=1}^N a_{(1)ij} H x_j(t - \tau_1), \\
i = & 1, 2, \dots, N.
\end{aligned} \tag{14}$$

在平衡点 $s(t)$ 线性化

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}(t) = & Df_1(s)\xi(t) + Df_2(s)\xi(t - \tau) \\
& + \epsilon_0 HA_{(0)}\xi(t) + \epsilon_1 HA_{(1)}\xi(t - \tau_1) \\
= & [Df_1(s) + \epsilon_0 HA_{(0)}] \xi(t) \\
& + Df_2(s)\xi(t - \tau) + \epsilon_1 HA_{(1)}\xi(t - \tau_1),
\end{aligned} \tag{15}$$

有如下结论:

定理 3 如果存在一个正定对称矩阵 $P \in R^{n \times n}$ 使得

$$P [Df(s) + \epsilon_0 HA_{(0)}] + [Df(s) + \epsilon_0 HA_{(0)}]^T P = -3Q,$$

以及

$$\| P(\epsilon_1 HA_{(1)}) \| + \| P(\epsilon_2 HA_{(2)}) \| < \lambda_{\min}(Q)$$

成立, 那么动态网络 (14) 式是稳定的. 这里, Q 是一给定的实正定对称矩阵.

定理 3 的证明和定理 2 的证明类似, 我们略去.

注 1 当网络中的性质数 $m > 3$ 时, 对于网络稳定性的分析可以进行同上的类似处理.

注 2 对于复杂网络动力学模型 (4) 来说, 当 $a_{(1)ij} = 0, p_0 = 1$ 时, 整个网络就是一个单边的连续时间线性耗散耦合网络模型^[14, 15]; 当 $a_{(0)ij} = 0, p_1 = 1$ 时, 整个网络就是一个单边的具有耦合时滞的连续时间网络^[16-19]. 而对于动力学模型 (14) 来说, 当 $\tau = 0$ 时, 整个网络就回归到模型 (4).

4. 仿 真

首先, 我们以含有两种性质的复杂网络为例, 进行数值仿真研究. 选取一个包含四个节点的网络, 其中每个节点是二维线性系统, 设节点方程为 $(\dot{x}_{i1}, \dot{x}_{i2})^T = (-x_{i1}, -2x_{i2})^T$, 则节点方程的 Jacobian 矩阵为 $Df(s(t)) = \text{diag}(-1, -2) \triangleq J$. 设内部耦合矩阵 $H = \text{diag}(1, 1)$, 耦合强度为 $\epsilon_0 = \epsilon_1 = 0.2$, 信息传输的时滞 $\tau_1 = 1$, 且子网络的最大重边数为 $p_0 = 2, p_1 = 1$, 外部耦合矩阵 $A_{(0)}$ 和 $A_{(1)}$ 分别为

$$\begin{aligned}
A_{(0)} = & \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \\
A_{(1)} = & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

在平衡点 $s(t) = 0$ 处线性化, 相应的可以得到

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1(t) \\ \dot{\xi}_2(t) \\ \dot{\xi}_3(t) \\ \dot{\xi}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{cases} \text{diag}(J, J, J, J) + \epsilon_0 \text{diag}(H, H, H, H) \end{cases}$$

$$\times \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \xi_3(t) \\ \xi_4(t) \end{bmatrix} + \epsilon_1 \text{diag}(H, H, H, H)$$

$$\times \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(t-1) \\ \xi_2(t-1) \\ \xi_3(t-1) \\ \xi_4(t-1) \end{bmatrix},$$

其中 $\dot{\xi}_i = (\xi_{i1}, \xi_{i2})^T \in R^2, i = 1, 2, 3, 4,$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \begin{bmatrix} -1.6\xi_{11} + 0.4\xi_{21} + 0.2\xi_{31} - 0.2\xi_{11}(t-1) + 0.2\xi_{21}(t-1) \\ -2.6\xi_{12} + 0.4\xi_{22} + 0.2\xi_{32} - 0.2\xi_{12}(t-1) + 0.2\xi_{22}(t-1) \end{bmatrix}, \\ \dot{\xi}_2 &= \begin{bmatrix} 0.4\xi_{11} - 1.8\xi_{21} + 0.2\xi_{31} + 0.2\xi_{41} + 0.2\xi_{11}(t-1) - 0.4\xi_{21}(t-1) + 0.2\xi_{31}(t-1) \\ 0.4\xi_{12} - 2.8\xi_{22} + 0.2\xi_{32} + 0.2\xi_{42} + 0.2\xi_{12}(t-1) - 0.4\xi_{22}(t-1) + 0.2\xi_{32}(t-1) \end{bmatrix}, \\ \dot{\xi}_3 &= \begin{bmatrix} 0.2\xi_{11} + 0.2\xi_{21} - 1.8\xi_{31} + 0.4\xi_{41} + 0.2\xi_{21}(t-1) - 0.4\xi_{31}(t-1) + 0.2\xi_{41}(t-1) \\ 0.2\xi_{12} + 0.2\xi_{22} - 2.8\xi_{32} + 0.4\xi_{42} + 0.2\xi_{22}(t-1) - 0.4\xi_{32}(t-1) + 0.2\xi_{42}(t-1) \end{bmatrix}, \\ \dot{\xi}_4 &= \begin{bmatrix} 0.2\xi_{21} + 0.4\xi_{31} - 1.6\xi_{41} + 0.2\xi_{31}(t-1) - 0.2\xi_{41}(t-1) \\ 0.2\xi_{22} + 0.4\xi_{32} - 2.6\xi_{42} + 0.2\xi_{32}(t-1) - 0.2\xi_{42}(t-1) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

我们选择 $Q = I \in R^{8 \times 8}$ 根据定理 1, 可得

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{591}{689} & 0 & -\frac{146}{869} & 0 & -\frac{91}{869} & 0 & -\frac{41}{869} & 0 \\ 0 & -\frac{2461}{6208} & 0 & -\frac{371}{6208} & 0 & -\frac{211}{6208} & 0 & -\frac{61}{6208} \\ -\frac{146}{869} & 0 & -\frac{536}{869} & 0 & -\frac{96}{869} & 0 & -\frac{91}{869} & 0 \\ 0 & -\frac{371}{6208} & 0 & -\frac{2301}{6208} & 0 & -\frac{221}{6208} & 0 & -\frac{211}{6208} \\ -\frac{91}{869} & 0 & -\frac{96}{869} & 0 & -\frac{536}{869} & 0 & -\frac{146}{869} & 0 \\ 0 & -\frac{211}{6208} & 0 & -\frac{221}{6208} & 0 & -\frac{2301}{6208} & 0 & -\frac{371}{6208} \\ -\frac{41}{869} & 0 & -\frac{91}{869} & 0 & -\frac{146}{869} & 0 & -\frac{591}{869} & 0 \\ 0 & -\frac{61}{6208} & 0 & -\frac{211}{6208} & 0 & -\frac{371}{6208} & 0 & -\frac{2461}{6208} \end{bmatrix},$$

可知动态网络 (4) 式在零点处是稳定的. 则节点 i 的动力学曲线如图 3 所示.

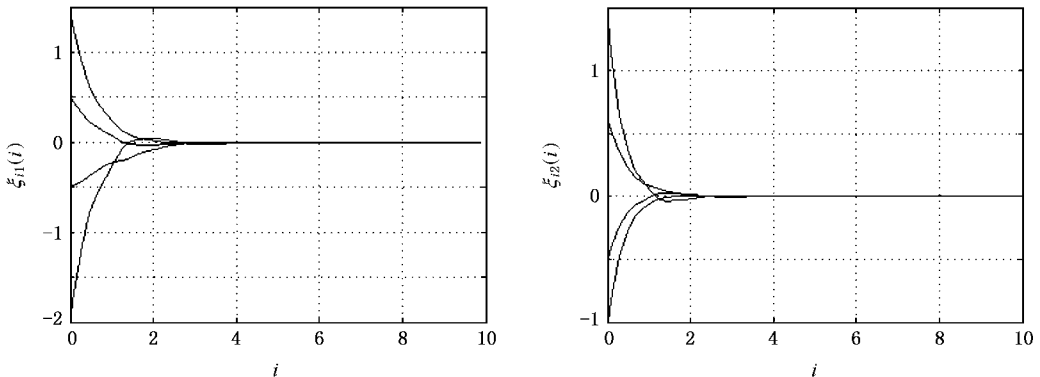


图 3 两种性质时节点 i 的动力学曲线

考虑包含四个节点含有三种性质的网络, 节点方程为 $(\dot{x}_{i1}, \dot{x}_{i2})^T = (-x_{i1}, -2x_{i2})^T$, 则 $Df(x(t)) = \text{diag}(-1, -2)$, 设内部耦合矩阵 $H = \text{diag}(1, 1)$; 耦合强度为 $\epsilon_0 = \epsilon_1 = 0.2, \epsilon_2 = 0.1$; 信息传输的时滞 $\tau_1 = 1, \tau_2 = 2$; 子网络的最大重边数为 $p_0 = p_1 = p_2 = 1$,

外部耦合矩阵 $A_{(0)}, A_{(1)}$ 和 $A_{(2)}$ 分别为

$$A_{(0)} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

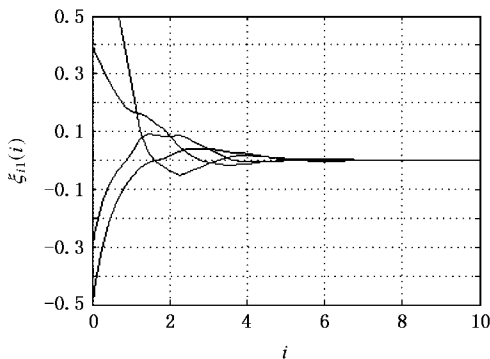
$$A_{(1)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A_{(2)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

在平衡点 $s(t)=0$ 处线性化,且选取 $Q=I \in R^{8 \times 8}$, 根据定理 2 可得

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{47}{42} & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{21} & 0 \\ 0 & -\frac{71}{112} & 0 & -\frac{3}{56} & 0 & -\frac{3}{56} & 0 & -\frac{1}{112} \\ -\frac{1}{6} & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{56} & 0 & -\frac{33}{56} & 0 & -\frac{3}{56} & 0 & -\frac{3}{56} \\ -\frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{56} & 0 & -\frac{3}{56} & 0 & -\frac{33}{56} & 0 & -\frac{3}{56} \\ -\frac{1}{21} & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & -\frac{47}{42} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{112} & 0 & -\frac{3}{56} & 0 & -\frac{3}{56} & 0 & -\frac{71}{112} \end{bmatrix}$$

可知动态网络(9)式在零点处是稳定的,节点 i 的动力学曲线如图 4 所示.



考虑网络含有两种性质且节点存在滞后的情况.选取含有四个节点的,节点为一维的动态网络,设节点的状态方程为 $\dot{x} = -3x(t) + x(t - \tau)$, 则 $Df_1(s(t)) = -3, Df_2(s(t)) = 1$. 设内部耦合 $H = 1$ 耦合强度为 $\epsilon_0 = \epsilon_2 = 0.2$, 节点本身的滞后 $\tau = 1$, 信息传输的时滞 $\tau_1 = 2$, 子网络的最大重边数为 $p_0 = p_1 = 1$, 外部耦合矩阵 $A_{(0)}$ 和 $A_{(1)}$ 分别为

$$A_{(0)} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$A_{(1)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

在平衡点 $s(t)=0$ 处线性化,且选取 $Q=I \in R^{4 \times 4}$, 根据定理 3 可得

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{287}{646} & -\frac{1}{38} & -\frac{1}{38} & -\frac{1}{323} \\ -\frac{1}{38} & -\frac{8}{19} & -\frac{1}{38} & -\frac{1}{38} \\ -\frac{1}{38} & -\frac{1}{38} & -\frac{8}{19} & -\frac{1}{38} \\ -\frac{1}{323} & -\frac{1}{38} & -\frac{1}{38} & -\frac{287}{646} \end{bmatrix},$$

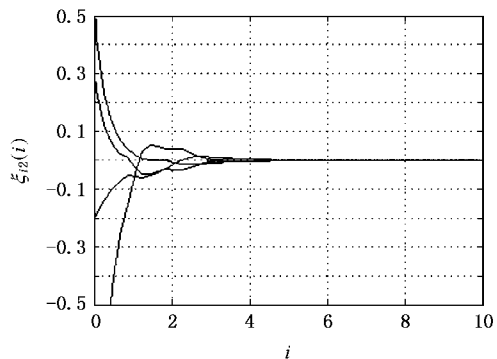


图 4 三种性质时节点 i 的动力学曲线

可知动态网络(14)式在零点处是稳定的,图 5 所示的为节点 i 的动力学曲线图.

5. 结 论

本文考虑了多重边复杂网络中边性质的不同,

根据网络中节点间信息传输速度的不同,通过引入滞后对多重边网络进行了拆分,将多重边网络拆分成多个子网络的组合形式,并建立数学模型,分析了多重边复杂网络的稳定性.通过数值仿真研究,验证了结论的有效性.本文运用网络拆分的思想对网络的多重边进行了处理,建立了多重边复杂网络的

动力学模型, 解决了多重边网络模型如何建立的问题. 希望本文的研究能对多重边复杂网络的研究起到抛砖引玉的作用.

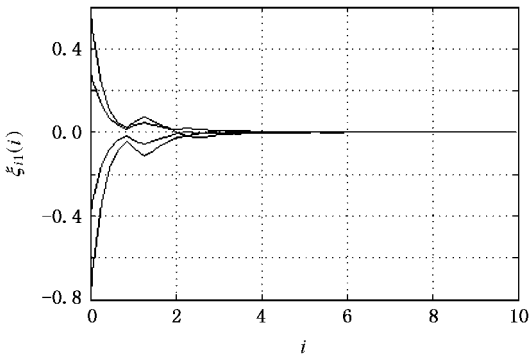


图 5 节点含滞后的节点 i 的动力学曲线图

- [1] Erdos P , Rényi A 1960 *Publications of the Mathematica Institute of the Hungarian Academy of Sciences* **5** 17
- [2] Watts D J , Strogatz S H 1998 *Nature* **393** 440
- [3] Barabási A L , Albert R 1999 *Science* **286** 509
- [4] Wang X F , Chen G R 2003 *IEEE Circuits and Systems Magazine* **3** 6
- [5] Fang J Q , Wang X F , Liu Z R 2004 *Sci. Techn. Rev.* **2** 9 (in Chinese) [方锦清、汪小帆、刘曾荣 2004 科技导报 **2** 9]
- [6] Lv J , Yu X , Chen G 2004 *Physica A* **334** 281
- [7] Li J , Wang B H , Jiang P Q *et al* 2006 *Acta Phys. Sini.* **55** 4051 (in Chinese) [李 季、汪秉宏、蒋品群等 2006 物理学报 **55** 4051]
- [8] Li Y , Liu Y , Shan X M , Ren Y , Jiao J , Qiu B 2005 *Chinese Physics* **14** 2153
- [9] Zhen J , Liu Q X 2006 *Chinese Physics* **15** 1248
- [10] Newman M E J , Watts D J 1999 *Phys. Lett. A* **263** 341
- [11] Li X , Chen G 2003 *Physica A* **328** 274
- [12] Pecora L M , Carroll T L 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2109
- [13] Barahona M , Pecora L M 2004 *Phys. Rev. Lett.* **89** 54101
- [14] Wang X F , Chen G 2002 *IEEE Trans. Circuits and Systems-I* **49** 54
- [15] Wang X F , Chen G 2002 *Int. J. Bifurcation and Chaos* **12** 187
- [16] Li C , Chen G 2004 *Physica A* **343** 236
- [17] Li C P , Sun W G , Kurths J 2006 *Physica A* **361** 24
- [18] Zhou J , Chen T P 2006 *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I* **53** 3
- [19] Luo Q , Wu W , Li L X , Yang Y X , Peng H P 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 239 (in Chinese) [罗 群、吴 薇、李丽香、杨义先、彭海朋 2008 物理学报 **57** 239]

Stability analysis of complex networks with multi-links^{*}

Gao Yang¹⁾ Li Li-Xiang¹⁾ Peng Hai-Peng¹⁾ Yang Yi-Xian¹⁾ Zhang Xiao-Hong^{1 2)}

1) *Information Security Center, State Key Laboratory of Networking and Switching Technology, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China*

2) *School of Information Engineering, Jiangxi University of Science and Technology, Ganzhou 341000, China*

(Received 30 May 2007 ; revised manuscript received 20 June 2007)

Abstract

In this paper a new idea about network split is presented according to the different nature of the network links. Time-delay has been introduced into networks to effect the split and on that a model of complex dynamical networks with multi-links has been constructed. Based on Lyapunov theory, the stability analysis of networks with multi-links is also studied. The sufficient conditions of the stability of networks with time-delay and without time-delay are respectively presented. The validity of the results are proved by numerical simulation of this paper.

Keywords : complex networks with multi-links , network split , time-delay , Lyapunov theory

PACC : 0545

^{*} Project supported by the National Basic Research Program of China(973 Program)(Grant No.2007CB310704), the National Natural Science Foundation of China(Grant No. 60673098), the National Natural Science Foundation of China(NSFC)and the Research Grants Council of Hong Kong(RGC)Joint Research Scheme(Grant No.60731160626).