第 57 卷 第 3 期 2008 年 3 月
1000-3290/2008/57(03)/1485-08

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.57, No.3, March, 2008

分数阶统一混沌系统的投影同步*

王兴元† 贺毅杰

(大连理工大学电子与信息工程学院,大连 116024)

(2007 年 4 月 10 日收到;2007 年 4 月 30 日收到修改稿)

改变系统参数计算了分数阶统一系统的最大 Lyapunov 指数和关联维数,研究了分数阶统一系统的动力学行为. 基于线性系统的稳定判定准则,设计了一种同步方案,实现了分数阶统一混沌系统的投影同步. 通过对分数阶 Chen 系统、分数阶 Lü 系统和分数阶类 Lorenz 系统投影同步的数值模拟,进一步验证了所提出方案的有效性.

关键词:分数阶统一系统,最大 Lyapunov 指数,关联维数,投影同步

PACC:0545,0555

1. 引　　言

1990 年,Pecora 和 Corroll 提出了混沌同步的概念[1],并在实验室中用电路实现了同一信号驱动下的两个相同耦合混沌系统的同步[2]. 现如今,人们对混沌同步已做了深入地研究[3—7],并在不同的混沌系统中实现了不同类型的混沌同步,如完全同步,广义同步,相同步,延迟同步等[8—16]. 1999 年,Mainieri 等[17]在部分线性混沌系统中观察到一种新的同步——投影同步,即在一定条件下耦合的主从系统的输出状态不仅相位锁定,而且振幅还按某一比例因子关系演化. 此后,投影同步引起了人们关注. 如,Xu 等[18]给出了三维混沌系统投影同步的稳定性标准、任意维连续混沌系统投影同步的判断准则和任意维离散混沌系统投影同步的必要条件;Chee 等[19]将投影同步技术应用于混沌保密通信中. 在混沌保密通信中,投影同步可以把二进制数扩展到 M 进制以实现更快的传输,因此对投影同步的研究具有重要的理论意义和应用前景. 为此,本文把投影同步扩展到分数阶系统,并设计一个同步方案,实现了一类分数阶混沌系统的投影同步.

2. 系统描述

目前,人们已给出多种分数阶微分系统的定义. 下面作者介绍最常用的一种定义:

$$D^{\theta}x(t) = J^{m-\theta}x^{(m)}(t)\ (\theta > 0),$$

这里 m 是不小于 θ 的最小整数,$x^{(m)}$ 表示通常意义下的 m 阶导数;J^{β} $(\beta > 0)$ 是 β 阶 Reimann-Liouville 积分算子,且

$$J^{\beta}y(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-\tau)^{\beta-1}y(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

这里 Γ 是 Gamma 函数,D^{θ} 是 θ 阶的 Caputo 微分算子[20].

2002 年,Lü 等提出了一个统一混沌系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= (25a+10)(x_2-x_1),\\ \dot{x}_2 &= (28-35a)x_1 - x_1x_3 + (29a-1)x_2,\\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - (a+8)x_3/3.\end{aligned}\tag{1}$$

当参数 $a\in[0,1]$ 时,系统(1)是混沌的[21]. 系统(1)是 Lorenz 系统、Chen 系统和 Lü 系统的统一体. 当 $a=0$, $a=0.8$ 和 $a=1$ 时,系统(1)分别等价于 Lorenz 系统、Lü 系统和 Chen 系统. 数值仿真实验表明 $a\in[0,0.8)$ 或 $a\in(0.8,1]$ 时,系统(1)的混沌吸引子分别拓扑等价于 Lorenz 吸引子和 Chen 吸引子. 下面我们给出分数阶统一混沌系统:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^q x_1}{\mathrm{d}t^q} &= (25a+10)(x_2-x_1),\\ \frac{\mathrm{d}^q x_2}{\mathrm{d}t^q} &= (28-35a)x_1 - x_1x_3 + (29a-1)x_2,\\ \frac{\mathrm{d}^q x_3}{\mathrm{d}t^q} &= x_1x_2 - (a+8)x_3/3.\end{aligned}\tag{2}$$

* 国家自然科学基金(批准号:60573172)和高等学校博士学科点专项科研基金(批准号:20070141014)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail:wangxy@dlut.edu.cn

这里 $\mathrm{d}^q/\mathrm{d}t^q = \mathrm{D}^q$，阶 q 满足 $0<q\leqslant 1$. 当 $q=0.9$ 且 $a\in[0,1]$ 时，作者研究了分数阶统一混沌系统的动力学行为. 当 $a\in[0,0.4)$ 时，系统(2)收敛到一个固定点；当 $a\in[0.4,1]$ 时，系统(2)是混沌的. 当 $a=0.4$ 时，根据 Benettin 等人提出的计算微分方程组最大 Lyapunov 指数的方法[22]，作者计算出 $\lambda_1=0.765$，表明此时分数阶类 Lorenz 系统的运动是混沌的；当 $a=0.8$ 时，计算出 $\lambda_1=0.745$，此时系统(2)即分数阶 Lü 系统是混沌的. 当 $a=0.9$ 时，求出 $\lambda_1=0.732$，此时系统(2)即分数阶类 Chen 系统是混沌的；当 $a=1$ 时，$\lambda_1=0.652$，此时系统(2)即分数阶 Chen 系统是混沌的. 图 1(a)和图 1(b)分别给出了 $a\in[0.4,1]$，且每次递增 0.02 时系统(2)相对应的最大 Lyapunov 指数 λ_1 和关联维数 d，图 2(a)—(h)给出了当 $a=0.4,0.8,0.9,1$ 时，系统(2)的吸引子及其在 x-y 平面的投影. 由图 1 可知，图 2 所给出系统(2)吸引子的关联维数 d 均为分数、最大 Lyapunov 指数 λ_1 皆为正值，这表明此时系统(2)的运动是混沌的，即图 2 给出的是混沌吸引子.

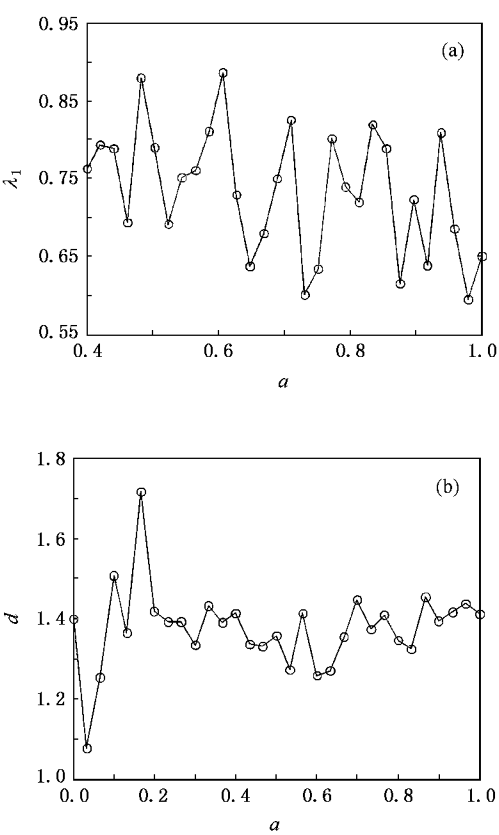

图 1 $a\in[0.4,1]$ 时，系统(2)的最大 Lyapunov 指数和关联维数的变化曲线 (a)最大 Lyapunov 指数；(b)关联维数

3. 投影同步方案

考虑一个分数阶混沌系统

$$\frac{\mathrm{d}^q \boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^q} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)), \tag{3}$$

这里 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in R^n$ 为状态变量，$\boldsymbol{f}: R^n\to R^n$ 为连续向量函数. 把函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))$ 分解为

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)) = \hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}(t) + \hat{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{x}(t)), \tag{4}$$

$\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}(t)$ 是 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))$ 的线性部分，$\hat{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{x}(t))$ 是 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))$ 的非线性部分，再把 $\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}(t)$ 分解成 $\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}(t)$，$\boldsymbol{A}$ 是常满秩矩阵，并且它的所有特征值实部都为负. 令

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(t)) = \bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}(t) + \hat{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{x}(t)), \tag{5}$$

则系统(3)可重写为

$$\frac{\mathrm{d}^q \boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^q} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(t)). \tag{6}$$

本文投影同步指的是两个相关的分数阶系统的状态矢量按照指定比例达到同步. 对于给定的系统(6)，

$$\frac{\mathrm{d}^q \boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t^q} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(t))/\alpha, \tag{7}$$

这里 $\boldsymbol{y}(t)\in R^n$ 是系统(7)的 n 维状态矢量，α 是指定的比例因子. 系统(3)与系统(7)的同步误差被定义为 $\boldsymbol{e}(t)=\boldsymbol{x}(t)-\alpha\boldsymbol{y}(t)$，则误差系统为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^q \boldsymbol{e}(t)}{\mathrm{d}t^q} &= \frac{\mathrm{d}^q \boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t^q} - \alpha\frac{\mathrm{d}^q \boldsymbol{y}(t)}{\mathrm{d}t^q}\\ &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) - \alpha\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(t)\\ &= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}(t)-\alpha\boldsymbol{y}(t))\\ &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}(t).\end{aligned} \tag{8}$$

因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值实部都为负，根据线性系统的稳定判定准则知，同步误差系统(8)在零点是渐进稳定的，并且有 $\lim\limits_{t\to\infty}\boldsymbol{e}(t)=0$，即系统(6)的状态矢量 $\boldsymbol{x}(t)$ 和系统(7)的状态矢量 $\boldsymbol{y}(t)$ 达到投影同步.

4. 数值模拟

分数阶统一混沌系统(2)中

$$\bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} -(25a+10) & 25a+10 & 0\\ 28-35a & 29a-1 & 0\\ 0 & 0 & -(a+8)/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}, \tag{9}$$

令

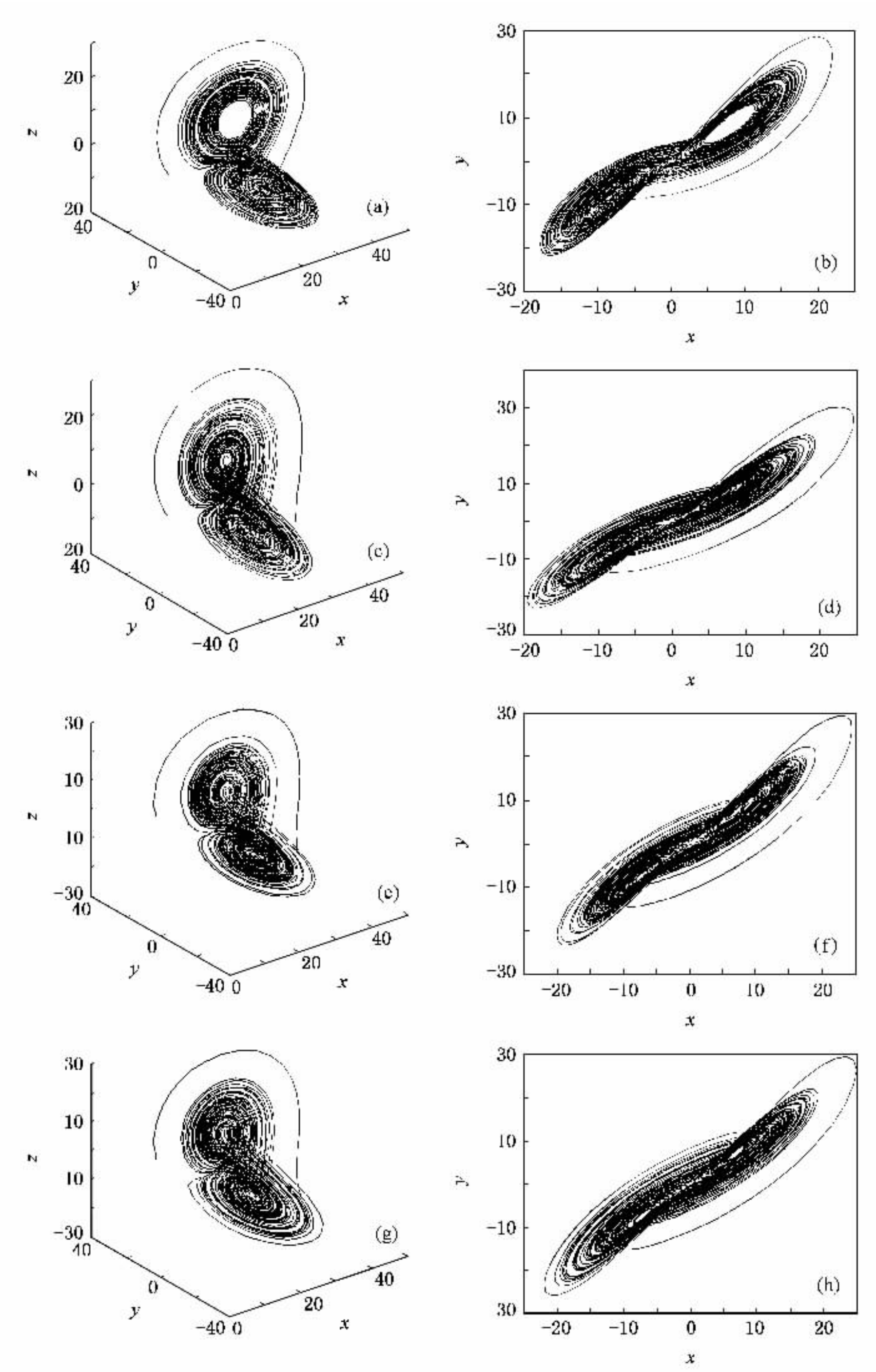

图 2　a 取不同值时，系统(2)的吸引子及其在 x-y 平面上的投影　(a) $a=0.4$ 时的吸引子；(b) $a=0.4$ 时吸引子的投影；(c) $a=0.8$ 时的吸引子；(d) $a=0.8$ 时吸引子的投影；(e) $a=0.9$ 时的吸引子；(f) $a=0.9$ 时吸引子的投影；(g) $a=1$ 时的吸引子；(h) $a=1$ 时吸引子的投影

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-(25a+10) & 25a+10 & 0\\ 28-35a & b & 0\\ 0 & 0 & -(a+8)/3\end{pmatrix},\tag{10}$$

通过选取合适的 b，可使矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值实部都为负．故有

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(t))=\begin{pmatrix}0\\ (29a-1-b)x_2-x_1x_3\\ x_1x_2\end{pmatrix}.\tag{11}$$

1）取 $a=1$，此时系统(2)变为分数阶 Chen 系统，即

$$\frac{\mathrm{d}^q x_1}{\mathrm{d}t^q} = 35(x_2 - x_1),$$
$$\frac{\mathrm{d}^q x_2}{\mathrm{d}t^q} = -7x_1 - x_1 x_3 + 28x_2, \qquad (12)$$
$$\frac{\mathrm{d}^q x_3}{\mathrm{d}t^q} = x_1 x_2 - 3x_3,$$

则

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -35 & 35 & 0 \\ -7 & b & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ (28-b)x_2 - x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}.$$

令驱动系统为(12)式. 当 $b<7$ 时，矩阵 A 所有特征值实部都为负，构造新系统

$$\frac{\mathrm{d}^q y_1}{\mathrm{d}t^q} = 35(y_2 - y_1),$$
$$\frac{\mathrm{d}^q y_2}{\mathrm{d}t^q} = -7y_1 + by_2 + \frac{1}{\alpha}((28-b)x_2 - x_1 x_3), \qquad (13)$$
$$\frac{\mathrm{d}^q y_3}{\mathrm{d}t^q} = -3y_3 + \frac{1}{\alpha}x_1 x_2$$

为响应系统.

选取驱动系统(12)和响应系统(13)的初始点分别为$(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (5, 8, 10)$和$(y_1(0), y_2(0), y_3(0)) = (1, 10, 15)$. 首先选取参数 $b=5$ 和比例因子 $\alpha=2$，作者模拟了系统(12)和系统(13)投影同步的误差效果如图 3 所示，由图 3(a)—(c)可见，误差 $e_1(t)$，$e_2(t)$和 $e_3(t)$在 t 分别为 4.7，7.2 和 8.1 s 时渐进稳定于零点；然后选取 $b=1$ 和 $\alpha=2$，由误差效果图 4(a)—(c)可见，误差 $e_1(t)$，$e_2(t)$和 $e_3(t)$在 t 分别为 3.3，2.6 和 4.5 s 时渐进稳定于零点. 上述实验表明：随参数 b 减小，系统(12)和系统(13)在更短的时间获得了同步. 因此我们得出结论：b 的取值影响系统达到同步的速度，即 $b<7$ 且$(7-b)$的值越大同步速度越快. 图 5 给出了比例因子 α 分别选取为 2，0.5 和 −0.5 时，系统(12)和(13)达到投影同步时的吸引子. 由图 5(a)，(b)和(c)可见，系统(12)状态矢量的幅值分别是系统(13)的 2 倍，0.5 倍和 0.5 倍，两系统的相位分别为同相、同相和反相，即系统(12)和系统(13)的吸引子按指定的比例因子达到了投影同步.

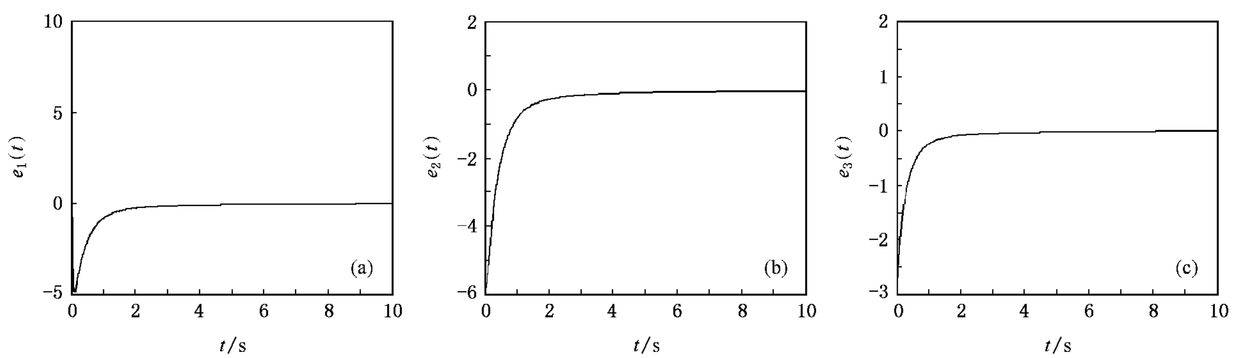

图 3 $a=1$，$\alpha=2$ 和 $b=5$ 时，系统(12)和系统(13)投影同步的误差曲线 (a) $e_1(t)$的响应曲线；(b) $e_2(t)$的响应曲线；(c) $e_3(t)$的响应曲线

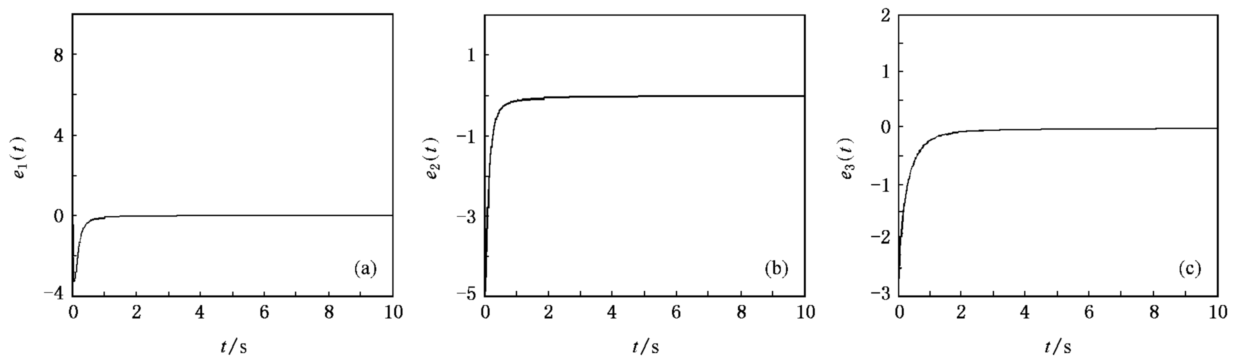

图 4 $a=1$，$\alpha=2$ 和 $b=1$ 时，系统(12)和系统(13)投影同步的误差曲线 (a) $e_1(t)$的响应曲线；(b) $e_2(t)$的响应曲线；(c) $e_3(t)$的响应曲线

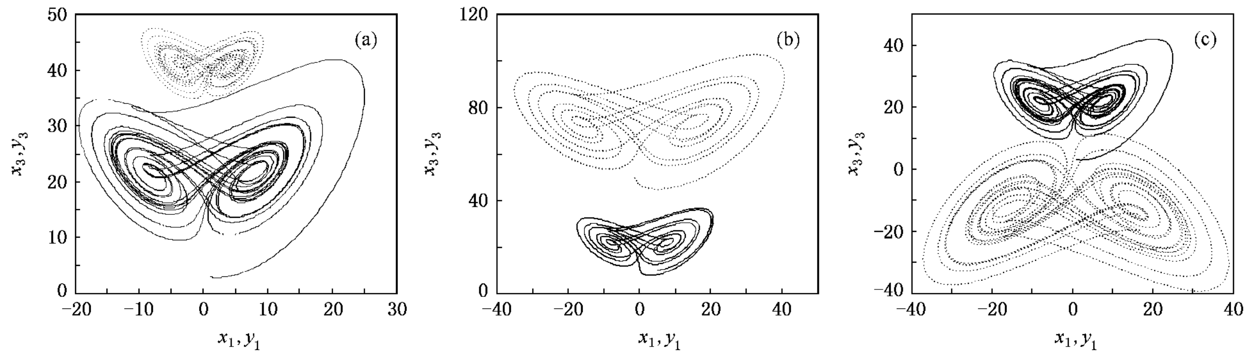

图 5　α 取不同值时，系统(12)和(13)达到投影同步时的吸引子(实线对应系统(12)，虚线对应系统(13))　(a) $\alpha = 2$；(b) $\alpha = 0.5$；(c) $\alpha = -0.5$

2) 取 $a = 0.8$，此时系统(2)变为分数阶 Lü 系统，即

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^q x_1}{\mathrm{d}t^q} &= 30(x_2 - x_1),\\ \frac{\mathrm{d}^q x_2}{\mathrm{d}t^q} &= -x_1 x_3 + 23.2 x_2,\\ \frac{\mathrm{d}^q x_3}{\mathrm{d}t^q} &= x_1 x_2 - 2.93 x_3,\end{aligned} \tag{14}$$

则

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -30 & 30 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -2.93 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ (23.2 - b)x_2 - x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}.$$

令驱动系统为(14)式．当 $b < 0$ 时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 所有特征值实部都为负，构造新系统

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^q y_1}{\mathrm{d}t^q} &= 30(y_2 - y_1),\\ \frac{\mathrm{d}^q y_2}{\mathrm{d}t^q} &= b y_2 + \frac{1}{\alpha}((23.2 - b)x_2 - x_1 x_3),\\ \frac{\mathrm{d}^q y_3}{\mathrm{d}t^q} &= -2.93 y_3 + \frac{1}{\alpha} x_1 x_2\end{aligned} \tag{15}$$

为响应系统．

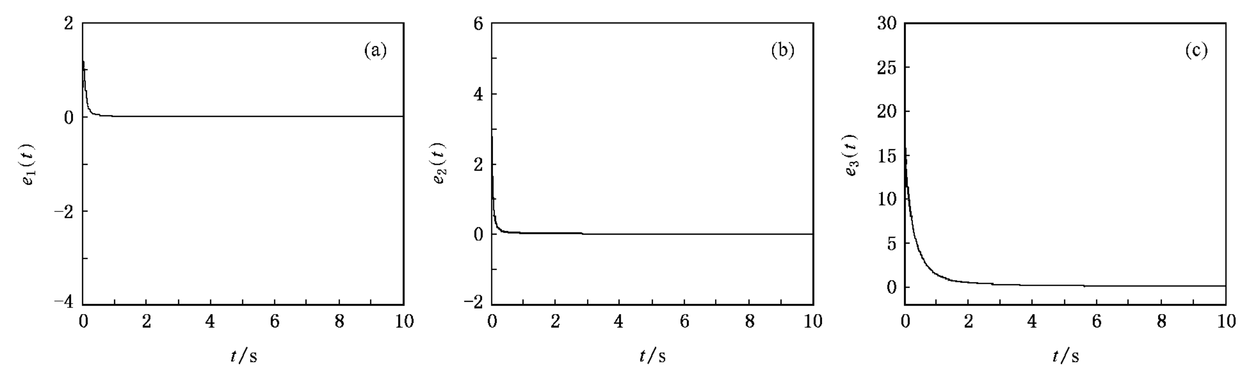

图 6　$a = 0.8$，$\alpha = 2$ 和 $b = -20$ 时，系统(14)和系统(15)投影同步的误差曲线　(a) $e_1(t)$ 的响应曲线；(b) $e_2(t)$ 的响应曲线；(c) $e_3(t)$ 的响应曲线

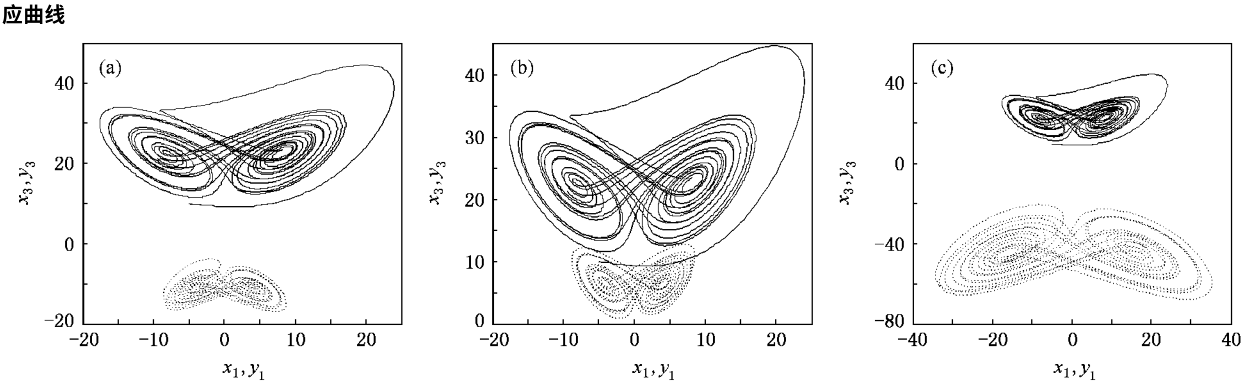

图 7　α 取不同值时，系统(14)和(15)达到投影同步时的吸引子(实线对应系统(14)，虚线对应系统(15))　(a) $\alpha = -2$；(b) $\alpha = 2$；(c) $\alpha = -0.5$

选取驱动系统(14)和响应系统(15)的初始点分别为$(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (-5, 8, 10)$和$(y_1(0), y_2(0), y_3(0)) = (1, -5, 15)$.首先选取参数$b = -20$和比例因子$\alpha = 2$,作者模拟了系统(14)和系统(15)投影同步的误差效果如图6所示,由图6(a)—(c)可见,误差$e_1(t)$,$e_2(t)$和$e_3(t)$在t分别为1,2.8和5.5 s时渐进稳定于零点,即系统(14)和系统(15)获得了同步.减小b值,再进行同步模拟实验,作者发现同上规律:b值的选取影响同步速度,即$b<0$且$|b|$的值越大同步速度越快.图7为比例因子α分别选取为-2,2和-0.5时,系统(14)和(15)达到投影同步时的吸引子;由图7(a),(b)和(c)可见,系统(14)状态矢量的幅值分别是系统(15)的2倍、2倍和0.5倍,两系统的相位分别为反相、同相和反相,即系统(14)和系统(15)的吸引子按指定的比例因子达到了投影同步.

3)取$a = 0.4$,此时系统(2)变为分数阶类Lorenz系统,即

$$\begin{aligned}
\frac{d^q x_1}{dt^q} &= 20(x_2 - x_1),\\
\frac{d^q x_2}{dt^q} &= 14x_1 - x_1x_3 + 10.6x_2,\\
\frac{d^q x_3}{dt^q} &= x_1x_2 - 2.8x_3,
\end{aligned} \tag{16}$$

则

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -20 & 20 & 0\\ 14 & b & 0\\ 0 & 0 & -2.8 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(t)) = \begin{pmatrix} 0\\ (10.6 - b)x_2 - x_1x_3\\ x_1x_2 \end{pmatrix}.$$

令驱动系统为(16)式.当$b<14$时,矩阵$\boldsymbol{A}$所有特征值实部都为负.构造新系统为

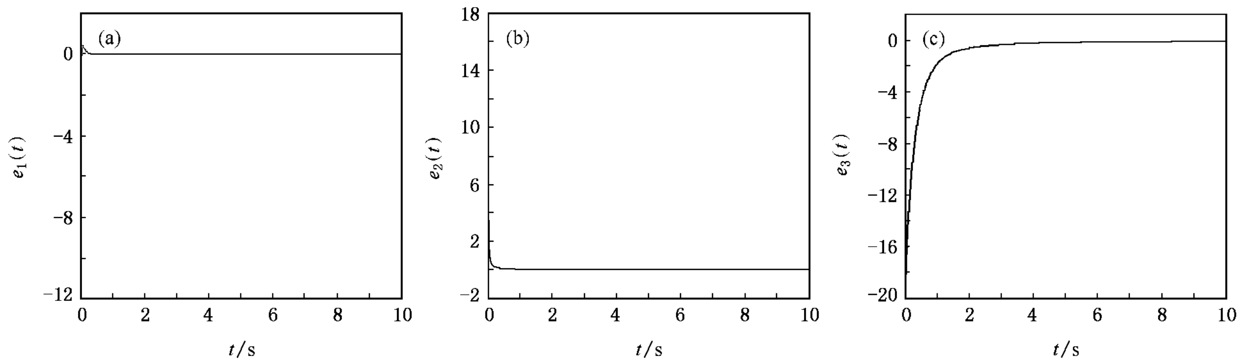

图8 $a=0.4$,$\alpha=2$和$b=-50$时,系统(16)和系统(17)投影同步的误差曲线 (a)$e_1(t)$的响应曲线;(b)$e_2(t)$的响应曲线;(c)$e_3(t)$的响应曲线

$$\begin{aligned}
\frac{d^q y_1}{dt^q} &= 20(y_2 - y_1),\\
\frac{d^q y_2}{dt^q} &= 14y_1 + by_2 + \frac{1}{\alpha}((10.6 - b)x_2 - x_1x_3),\\
\frac{d^q y_3}{dt^q} &= y_1y_2 - 2.8y_3 + \frac{1}{\alpha}x_1x_2
\end{aligned} \tag{17}$$

为响应系统.

选取驱动系统(16)和响应系统(17)的初始点分别为$(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (5, 8, 10)$和$(y_1(0), y_2(0), y_3(0)) = (1, 10, 15)$.首先选取参数$b = -50$和比例因子$\alpha = 2$,作者模拟了系统(16)和系统(17)投影同步的误差效果如图8所示,由图8可见,误差$e_1(t)$,$e_2(t)$和$e_3(t)$最终在t分别为0.3,0.9和8.2 s时渐进稳定于零点,即系统(16)和系统(17)获得了同步.减小b值,再进行同步模拟实验,作者发现同样规律:b值的选取影响同步速度,即$b<14$且$(14-b)$的值越大同步速度越快.图9为比例因子α分别选取为2,-2和-0.5时,系统(16)和(17)达到投影同步时的吸引子;由图9(a),(b)和(c)可见,系统(16)状态矢量的幅值分别是系统(17)的2倍、2倍和0.5倍,两系统的相位分别为同相、反相和反相,即系统(16)和系统(17)的吸引子按指定的比例因子达到了投影同步.

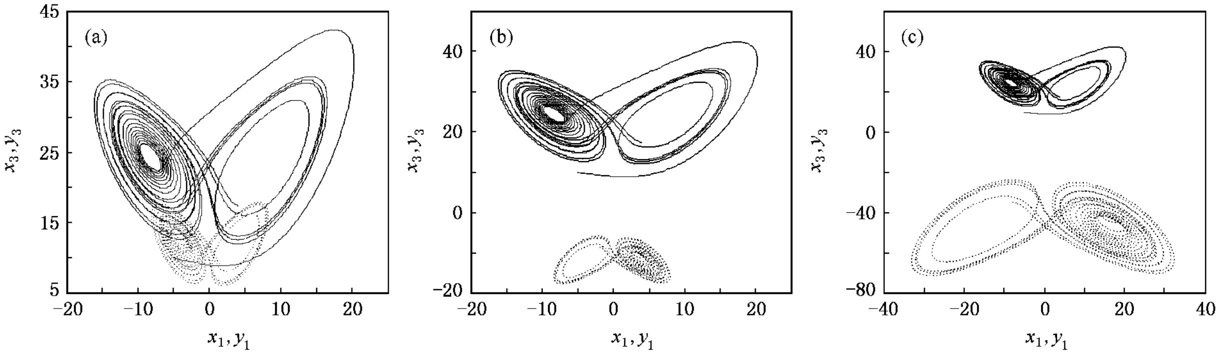

图 9　α 取不同值时，系统(16)和(17)达到投影同步时的吸引子(实线对应系统(16)，虚线对应系统(17))　(a) $\alpha = 2$；(b) $\alpha = -2$；(c) $\alpha = -0.5$

5. 结　　论

本文研究了分数阶统一系统的动力学行为，提出一种同步方法，并从理论上证明了该方法可以实现一类分数阶混沌系统的投影同步. 通过对分数阶 Chen 系统，分数阶 Lü 系统和分数阶类 Lorenz 系统投影同步的数值模拟，进一步验证了所提出方案的有效性.

[1] Pecora L M，Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821

[2] Carroll T L，Pecora L M 1991 *IEEE Trans. Circuits Systems* **38** 453

[3] Chen G，Dong X 1993 *IEEE Trans. Circuits Systems* **40** 591

[4] Fuh C C，Tung P C 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 2952

[5] Chen G，Dong X 1998 *From Chaos to Order*：*Methodologies*，*Perspectives & Applications* (Singapore：World Scientific) chapt. 1

[6] Wang G R，Yu X L，Chen S G 2001 *Chaotic Control*，*Synchronization & Utilizing* (Beijing：National Defence Industry Press) chapt. 7 (in Chinese) [王光瑞、于熙龄、陈式刚 2001 混沌的控制、同步与利用(北京：国防工业出版社)第七章]

[7] Wang X Y 2003 *Chaos in the Complex Nonlinearity System* (Bejjing：Electronics Industry Press) chapt. 2 (in Chinese) [王兴元 2003 复杂非线性系统中的混沌(北京：电子工业出版社)第二章]

[8] Shinbrot T，Grebogi C，Ott E，Yorke J A 1993 *Nature* **363** 411

[9] Michael G R，Arkady S P，Jurgen K 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 4193

[10] Yu X，Song Y 2001 *Int. J. Bifur. Chaos* **11** 1737

[11] Yang X S 2001 *Applied Mathematics & Computation* **122** 71

[12] Ho M C，Hung Y C，Chou C H 2002 *Phys. Lett.* A **296** 43

[13] Shahverdiev E M，Sivaprakasam S，Shore K A 2002 *Phys. Lett.* A **292** 320

[14] Wang S H，Liu W Q，Ma B J，Xiao J H，Jiang D Y 2005 *Chin. Phys.* **14** 55

[15] Chen F X，Zhang W D 2007 *Chin. Phys.* **16** 937

[16] Wang X Y，Wu X J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1988 (in Chinese) [王兴元、武相军 2007 物理学报 **56** 1988]

[17] Mainieri R，Rehacek J 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 3042

[18] Xu D L 2001 *Phys. Lett.* E **63** 027201

[19] Chee C Y，Xu D L 2005 *Chaos*，*Solitons & Fractals* **23** 1063

[20] Caputo M 1967 *The Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* **13** 529

[21] Wang J W，Zhang Y B 2006 *Chaos*，*Solitons & Fractals* **30** 1265

[22] Benettin G，Galgani L，Giorgilli A，Strelcyn J M 1980 *Meccanica* **15** 9

Projective synchronization of the fractional order unified system*

Wang Xing-Yuan† He Yi-Jie

(*School of Electronic & Information Engineering*, *Dalian University of Technology*, *Dalian* 116024, *China*)

(Received 10 April 2007; revised manuscript received 30 April 2007)

Abstract

This paper calculates the largest Lyapunov exponent and correction dimension of the fractional order unified system when changing the system parameter, and studies the dynamical behavior of this system. Based on the stability criterion of linear systems, a new approach for constructing projective synchronization of fractional order unified system is proposed. Numerical simulations of fractional order Chen system, fractional order Lü system and fractional order Lorenz-like system are provided to demonstrate the effectiveness of the proposed scheme.

Keywords: fractional order unified system, largest Lyapunov exponent, correction dimension, projective synchronization

PACC: 0545, 0555

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60573172) and the Doctoral Program Foundation of Institution of Higher Education of China (Grant No. 20070141014).

† Corresponding author. E-mail: wangxy@dlut.edu.cn