

一个新四维非自治超混沌系统的分析与电路实现^{*}

仓诗建^{1)†} 陈增强^{2)‡} 袁著祉²⁾

1) 天津科技大学工业设计系, 天津 300222)

2) 南开大学自动化系, 天津 300071)

(2007 年 4 月 25 日收到, 2007 年 6 月 5 日收到修改稿)

在以 Lorenz 系统为基础的一个新超混沌系统上, 加入一个驱动信号, 组成了一个四维非自治超混沌系统. 该系统基本动力学特性的变化, 主要是通过控制外界输入信号的频率实现的. 在不同的频率参数下, 该系统体现出了周期轨、二维环面、混沌以及超混沌不同的动力学特性. 其中周期轨特性较为显著. 这个现象在数值仿真以及分形分析上得到了很好地验证. 最后设计一个模拟电路, 通过实验结果进一步验证了与数值仿真的一致性.

关键词: Lorenz 系统, 超混沌, 调频, 电路实现

PACC: 0545, 2960

1. 引 言

自 1963 年 Lorenz 发现以他命名的模型方程以来^[1], 混沌动力学在非线性研究领域取得了重大发展. 国内许多学者也对混沌的特性做了深入地分析和研究^[2-6]. 现在混沌动力学正由数学和物理的基础理论研究逐步过渡到实际的工程应用领域, 并得到了很大发展. 例如混沌理论可用在保密通讯、图像加密等数字信息领域^[7-9], 因而混沌动力学具有广泛的运用前景.

混沌之所以可以用于数字信息加密是因为混沌运动有以下特点: 1) 运动轨迹对初始值极其敏感, 在任意接近的两点出发的轨迹不可预测; 2) 混沌运动既非周期又不收敛, 运动轨迹上的点遍历整个区域; 3) 运动轨迹在有限区域内不断伸缩折叠使系统输出类似于随机噪声的现象. 这些动力学特点使得混沌序列有一定的频带宽度, 而且类似于随机的特性很强, 很难追踪和捕捉, 可以利用混沌序列生成密钥, 达到加密的目的. 由于混沌系统的确定性, 使得混沌序列可以控制再生, 达到解密的目的. 传统的 Lorenz 系统结构较简单, 在物理上容易实现, 因而 Lorenz 系统是研究混沌动力学特性的一个基本结构, 它的三维系统如下:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= rx + y - xz, \\ \dot{z} &= xy - bz. \end{aligned} \quad (1)$$

已经证明当 $\sigma = 10$, $b = 8/3$, r 不小于 24.74 时, 呈现混沌状态. 由于 Lorenz 系统的简单结构, 许多人在此基础上作了改进, 发现了许多新的三维混沌系统. 较为知名的系统如 Chen 系统^[10], Lü 系统^[11, 12], Liu 系统^[13]和 Qi 系统^[14].

这些系统的共同点就是结构都较为简单, 在物理上容易实现. 但是这样的系统用于数字信息加密工程领域的效果不是很好, 这主要是因为三维混沌系统的带宽相对较窄的局限性容易导致混沌序列容易被数字滤波器给滤掉, 失去了加密的意义. 但是对于一个超混沌系统或者高频混沌系统而言, 混沌序列的信号有很高的带宽, 这些系统生成的混沌序列对于数字加密领域有非常重要的研究意义. 因此, 超混沌系统是非线性动力学一个重要的研究方向.

为了利用 Lorenz 系统简单的结构特点, Gao 等在 Lorenz 系统的基础引入一个新的反馈变量, 设计了一个四维系统^[15]. 这个系统的结构如下:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 10(y - x), \\ \dot{y} &= 28x + y - xz - u, \\ \dot{z} &= xy - \frac{8}{3}z, \end{aligned}$$

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 60374037, 60574036), 高等学校博士学科点专项科研基金(批准号: 20050055013)和教育部新世纪优秀人才支持计划(批准号: 2005290)资助的课题.

[†] E-mail: csj98231@tust.edu.cn

[‡] E-mail: chenzq@nankai.edu.cn

$$\dot{u} = kyz, \quad (2)$$

要使一个系统是超混沌系统,这个系统必须满足下列条件:1)存在超混沌吸引子的超混沌系统在相空间中至少是四维;2)超混沌系统中耦合的方程导致不稳定的维数至少为二维,其中之一必须包含非线性项^[6]。

Gao 等在 Lorenz 系统的微分方程组中的第二个方程中引入一个二次反馈控制项 u , 形成一个四维动力学系统. 通过调节系统的参数 k , 可以改变轨迹的运动形式, 具体表现为周期、混沌和超混沌. 经过理论分析得知, 当 $0 < k < 0.152$ 时, 得到的 Lyapunov 指数为二正, 一负和一零, 此条件下该系统是一个超混沌系统.

考虑到系统的物理实现, 通常采用电路来完成. 在设计电路过程中参数 k 往往与某一个比例运算放大电路对应, 调节参数 k 的表现是调节比例运算放大电路的电位器. 现在的问题是想得到一个与具体确定的参数 k 对应的电位器的值比较困难, 这是因为调节电位器很容易过调或者欠调, 使实际得到的阻值与理想的阻值存在一定的误差, 误差的大小与实际调节的精度相关, 因而在直观上也很难判断和取舍. 现在绝大多数系统的物理实现也仅仅是近似的结果. 通过调节电位器改变参数 k , 把这样的电路系统当作混沌信号发生器, 有个很大的缺点就是我们真的能完全得到想要的参数条件下的结果吗? 即便得到暂时的结果, 一旦我们想要调节电位器获得其他行为特性的结果, 然后再回调到以前的参数值, 还能保持原来的系统特性吗?

显然这样的实际系统不能精确地反映参数变化对系统的动力学行为的变化. 为了克服调节电位器带来的不确定性以及不利于随时精确更改的缺点, 我们采用调节连续信号频率的方法, 在此基础上设计了一个新的非自治系统. 通过精确调节驱动信号的频率, 改变系统的动力学特性.

本文的主要目的就是精确地调节模拟输入信号的频率, 观察和验证新系统的非线性动力学特性. 具体做法是在系统(2)一个确定的参数下(固定参数 k), 设计一个新的超混沌系统, 一方面要保证这个新系统具有超混沌特性, 另一方面可以准确简单地控制这个新系统的动力学特性. 在系统(2)的基础上, 把外界控制信号引入到这个超混沌系统中, 形成一个非自治系统, 可以通过调节外界输入信号的频率达到改变系统(2)的动力学特性的目的. 通过调

节连续信号的频率改变系统的行为状态, 这就是本文的特点. 实验过程中的驱动信号由信号发生器直接输出, 其频率在表盘上很容易确定和更改, 而且非常容易操作, 精度又非常高. 用这种方法改变动力学行为特性, 可以说是一个很好的选择. 可以大大增强混沌信号发生器的灵活性. 本文与一般混沌系统的不同之处在于参数的调节方式, 利用这种新的调节方法可以灵活地设计数字加密领域所需的混沌信号发生器.

除了前面叙说的系统的电路实现, 在调节参数上采用调频的方法外, 本文设计的系统还具有比较丰富动力学特性, 具体为周期轨、二维环面、混沌和超混沌, 其中周期轨的行为较为特出, 这也是本文要重点说明的. 对于这个系统的分析主要是通过 Lyapunov 指数图, 分形图来解释系统的动力学特性. 最后给出了设计的实验电路及其观测的结果, 进一步从物理实现上验证仿真结果的准确性.

2. 新四维非自治系统的模型及数值仿真

加入外界控制信号的四维非自治系统的模型结构如下:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 10(y - x), \\ \dot{y} &= 28x + y - xz - u, \\ \dot{z} &= xy - \frac{8}{3}z, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\dot{u} = kyz + a \sin(\omega t),$$

它是系统(2)为基础, 在第四个方程里加入驱动信号 $a \sin(\omega t)$, 其中参数 a 表示输入信号的幅值, 参数 ω 表示输入信号的角频率, 它与频率 f 的关系满足 $\omega = 2\pi f$, 参数 a 和 ω 都是常数.

由于非自治系统中引入时间 t , 在分析和计算时远不如自治系统方便, 为此可将系统(3)等价转化为一个带有正弦项的五维自治系统, 即

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 10(y - x), \\ \dot{y} &= 28x + y - xz - u, \\ \dot{z} &= xy - \frac{8}{3}z, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\dot{u} = kyz + a \sin(v),$$

$$\dot{v} = \omega,$$

借助系统(4)可以很容易地进行分析和计算.

对于这样一个自治系统, 系统的吸引子很可能

出现超混沌吸引子以及二维环面吸引子. 想要得到这个结论, 需要借助数值仿真来解释这样的问题.

对于加入驱动信号 $a \sin(\omega t)$ 的系统 (3), 我们通过调节频率参数 ω 得到一些不同特性的仿真结果, 下面给出了参数 ω 取不同值时, 系统表现出不同的吸引子和运动形式:

- 1) 当 $\omega = 1$ 时, 如图 1(a), 系统的吸引子是一个周期为 16 的极限环, 运动形式是周期运动.
- 2) 当 $\omega = 2$ 时, 如图 1(b), 系统的吸引子是一

个周期为 8 的极限环, 运动形式是周期运动, 与图 1(a) 相比, 只不过周期数随着 ω 的增加而降低.

3) 当 $\omega = 2.75$ 时, 如图 1(c), 系统的吸引子是一个混沌吸引子, 运动形式是混沌运动, 轨迹在吸引域内运动得比较乱.

4) 当 $\omega = 3.5$ 时, 如图 1(d), 系统的吸引子是一个周期为 4 的极限环, 运动形式是周期运动, 可以比较图 1(a) 和 (b).

5) 当 $\omega = 4.34$ 时, 如图 1(e), 系统的吸引子是

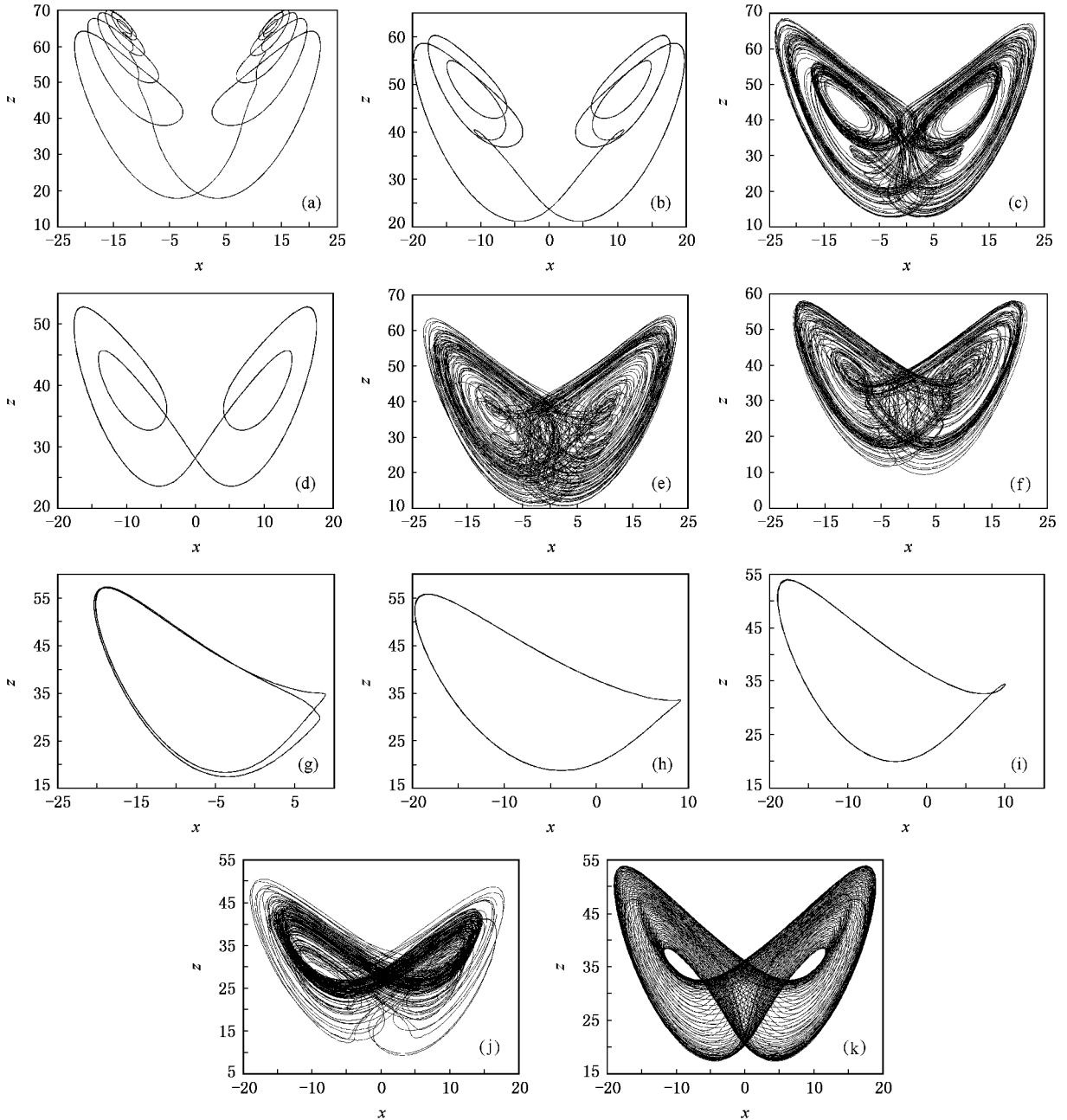


图 1 四维非自治系统的相图 (a)~(k) 都表示 $x-z$ 相平面的相图, 按次序分别对应参数 $\omega = 1, \omega = 2, \omega = 2.75, \omega = 3.5, \omega = 4.34, \omega = 5.25, \omega = 7.45, \omega = 7.6, \omega = 7.7, \omega = 8.5, \omega = 6.5$ 时在 $x-z$ 平面的相轨迹

一个超混沌吸引子,运动形式是超混沌运动,显然,在吸引域内,超混沌的运动轨迹比混沌的轨迹要乱得多.

6)当 $\omega = 5.25$ 时,如图 1(f),系统的吸引子是一个混沌吸引子,运动形式是混沌运动,可以与 3)和 5)做比较.

7)当 $\omega = 7.45$ 时,如图 1(g),系统的吸引子是一个周期为 2 的极限环,运动形式是周期运动.

8)当 $\omega = 7.6$ 时,如图 1(h),系统的吸引子是一个单周期极限环,运动形式是周期运动.

9)当 $\omega = 7.7$ 时,如图 1(i),系统的吸引子是一个周期为 2 的极限环,但是与图 1(g)不同,运动形式仍是周期运动.

10)当 $\omega = 8.5$ 时,如图 1(j),系统的吸引子是混沌吸引子,运动形式是混沌运动.

11)特别当 $\omega = 6.5$ 时,如图 1(k),系统的吸引子是一个二维环面,运动形式是拟周期运动.

这里有必要对仿真结果作一些说明.这个四维非自治系统表现出的非线性动力学特性是周期运动,拟周期运动,混沌运动和超混沌运动.这里特别要注意的是 $\omega \in [0, 2.6]$ 时周期轨的演化过程,在 ω 较小时,例如 $\omega = 0.1$,系统表现出的行为特性是难以计数的多倍数周期轨,但是这种特性又不是混沌,这与一般的混沌系统或者超混沌系统相比是一个很特殊的情况,因为许多混沌或者超混沌系统往往在几倍周期后就会出现混沌或者超混沌现象,像这种出现大倍数的周期轨仍然不是混沌或者超混沌的特性在一般的混沌系统中是很少见的,在 $\omega = 2$ 时表现出 8 倍周期的周期轨.这个特点与一般混沌系统相比,是比较特殊的地方.具体表现为随着 ω 的增大,周期轨的周期数逐步下降,直到 $\omega = 2.6$ 由 4 倍周期轨突变为混沌.

3. 分形分析

为了更好的认识这个 4 维非自治系统的动力学特性与参数 ω 的关系,我们从分形图出发,确定在不同的参数条件下的轨迹运动形式.

图 2 是状态变量 x 关于参数 ω 的分形图,参数 ω 的取值范围是 $\omega \in [0, 10]$,从图中可以看出,当参数 ω 从 0.01 开始,以步进长 0.01 变化到 10 这个范围内,状态变量 x 从无穷周期运动变为有限周期运动,混沌运动,有限周期运动,超混沌运动,混沌运

动,超混沌运动,拟周期运动,周期运动,最后变成混沌运动的变化过程.

刻画运动形式最好的指标就是 Lyapunov 指数,这里我们采用 Lyapunov 指数确定参数 ω 变化时,从而可以判断状态变量具体的运动类型.一个 4 维非自治系统可以转化为 5 维自治系统,因此,我们要考虑的 Lyapunov 指数是 5 个,分别为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ 和 λ_5 ,这里分析计算的系统是采用与系统(3)完全等价的系统(4). $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ 和 λ_5 的符号不同,表示的状态变量的运动形式就不同,具体关系如下:

- 1) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 < 0, \lambda_5 = 0$, 周期运动;
- 2) $\lambda_1 > 0, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 < 0, \lambda_5 = 0$, 混沌运动;
- 3) $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 < 0, \lambda_1, \lambda_5 = 0$, 拟周期运动;
- 4) $\lambda_1, \lambda_2 > 0, \lambda_3, \lambda_4 < 0, \lambda_5 = 0$, 超混沌运动.

当参数 ω 在 0 到 10 之间取值时,通过 Lyapunov 指数图 3 可知,在不同的参数范围内对应状态变量的 Lyapunov 指数的符号是不同的,具体如下:

- 1) 当参数 $\omega \in [0, 2.6] \cup [3.1, 3.76] \cup [6.29, 6.41] \cup [6.82, 8.35]$ 时,状态变量的 Lyapunov 指数满足 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 < 0, \lambda_5 = 0$, 表明是周期运动.
- 2) 当参数 $\omega \in [2.6, 3.1] \cup [3.76, 3.85] \cup [4.1, 4.25] \cup [4.45, 5.88] \cup [6.15, 6.29] \cup [8.35, 10]$ 时,状态变量的 5 个 Lyapunov 指数满足 $\lambda_1 > 0, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 < 0, \lambda_5 = 0$, 表明是混沌运动.
- 3) 当参数 $\omega \in [3.8, 4.1] \cup [5.88, 6.15]$ 时,状态变量的 5 个 Lyapunov 指数满足 $\lambda_1, \lambda_2 > 0, \lambda_3, \lambda_4 < 0, \lambda_5 = 0$, 表明是超混沌运动.
- 4) 当参数 $\omega \in [6.41, 6.82]$ 时,状态变量的 5 个 Lyapunov 指数满足 $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 < 0, \lambda_1, \lambda_5 = 0$, 表明是拟周期运动.

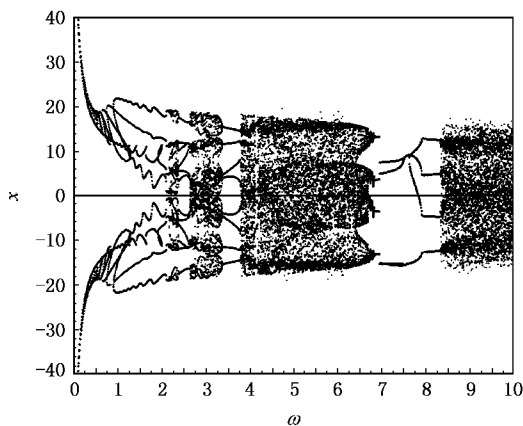


图 2 关于参数 ω 变化的状态变量 x 分形图

我们选择其中具有代表性的频率控制参数 ω 值确定具体的 Lyapunov 指数值如表 1. 通过分形图 2

和 Lyapunov 指数图 3, 可以确定参数 ω 与状态变量的运动特性之间的关系.

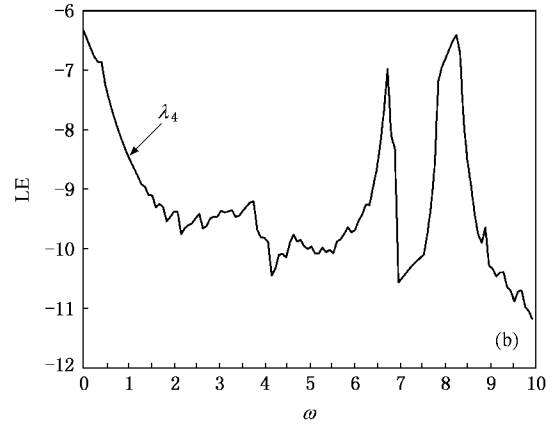
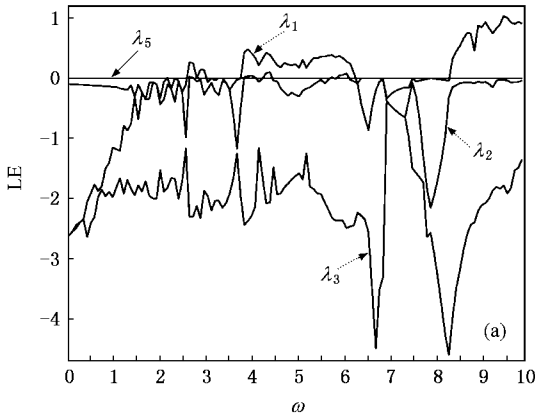


图 3 系统(3)的 Lyapunov 指数图

表 1 不同参数 ω 对应的 Lyapunov 指数图、吸引子类型和运动形式

ω	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	吸引子类型	运动形式
1.00	-0.135	-1.130	-1.962	-8.439	0	周期轨	周期运动
2.00	-0.322	-0.435	-1.526	-9.371	0	混沌吸引子	混沌运动
2.75	0.201	-0.035	-2.223	-9.610	0	周期轨	周期运动
3.51	-0.144	-0.145	-1.986	-9.392	0	超混沌吸引子	超混沌运动
4.34	0.418	0.104	-2.099	-10.09	0	混沌吸引子	混沌运动
5.00	0.225	-0.321	-1.563	-10.07	0	二维环面	拟周期运动
6.50	0	-0.771	-2.377	-8.518	0	周期轨	周期运动
7.21	-0.194	-0.561	-0.562	-10.25	0	混沌吸引子	混沌运动
9.00	0.815	-0.058	-2.157	-10.267	0	混沌吸引子	混沌运动

4. 系统的电路设计和实验结果

混沌系统的最直接最简单的物理实现是通过电路来完成的,许多混沌系统的动力学行为都是通过电路得到了验证^[17,48]. 同样这个 4 维非自治系统可以通过电路来实现,由于直接根据系统微分方程设计的电路很难正常运行,为此有必要对原方程作一些适当地变换,这样做的目的有两方面:一是通过线型缩放,使得状态变量的变化范围在集成电路允许工作的电压范围内;二是简化电路设计,尽量减少元件和集成电路. 为了详细说明系统方程到电路的实现过程,我们重新调整原系统方程后得到

$$\begin{aligned}
 0.1x &= y - x, \\
 0.1y &= 2.8x + 0.1y - xz - 0.1u, \\
 0.1x &= xy - 0.27z, \\
 0.1u &= kyz + 0.01a\sin(\omega t).
 \end{aligned} \tag{5}$$

这里的状态变量做了 10 倍的缩小变换,调整后的系统(5)与原系统(3)等价,并不改变系统的物理性质.

基于这个系统模型,我们设计的电路如图 4. 它包括 4 个相互耦合的通道,分别实现状态变量 x, y, z 和 u . 电路中的模拟运算放大器 LF347 实现系统中的加法、减法和积分的运算,非线性项主要由模拟乘法器 AD633 实现. 设计过程中参数 $k = 0.1$, 但是不对电容 C 的具体值作限制,目的是为了选择合适的参数值,使系统得到最佳的输出结果. 后面我们会分析这样做的意义. 根据电路图,采用图中标注的元件参数值,经过化简,我们得到如下动态方程:

$$\begin{aligned}
 RCx &= y - x, \\
 RCy &= 2.8x + 0.1y - xz - 0.1u, \\
 RCz &= xy - 0.27z, \\
 RCu &= 0.1yz + 2.5f(t),
 \end{aligned} \tag{6}$$

其中 $f(t) = A\sin(\Omega t)$ 这里的 R 和 C 分别表示积分器中的电阻和电容, A 表示外加驱动信号的幅值, Ω

表示模拟信号的角频率. 它与原系统角频率 ω 对应关系如下:

$$\omega = 10RC \cdot \Omega \text{ 或者 } f = 10RC \cdot F.$$

这里, F 表示模拟信号的频率. 若 $RC = 0.1$, 比较前面的两个系统 (5) 和 (6), 是完全等价的. 由于实际测量驱动信号的幅值 $A = 2 \text{ V}$, 这就意味着参数 $a = 500$. 在这样的元件参数下, 用示波器观测到状态变量输出波形的频率相当低, 只有几 Hz, 如果不用带存储的数字示波器是很难捕捉到输出波形, 于是我们调整 $RC = 10^{-4}$, 这就相当于在保证原系统性质不变的情况下, 使得输出信号的频率提高了 1000 倍. 实验表明, 在这样的充放电系数下, 能够得到理想的输出波形. 如果 RC 太小, 容易引入高频信号的

干扰, 使观察到的结果失真.

若 $RC = 10^{-4}$, 选择 $R = 100 \text{ k}\Omega$, 则 $C = 1 \text{ nF}$. 比如原系统的驱动信号的频率 $f = 1 \text{ Hz}$, 对应的模拟驱动信号的频率为 $F = 1 \text{ kHz}$. 有了这样的对应关系后, 就很容易看到参数 ω 在不同取值时仿真得到的结果与示波器观测到的结果之间的对应关系.

在固定驱动信号输出幅值的前提下, 即 $A = 2 \text{ V}$, 通过简单的调节驱动信号的频率, 就可以得到周期、倍周期、混沌以及超混沌之间的过渡和变化情况, 如图 5(a)~(j). 比较图中的数值仿真结果, 它们基本是一致的.

由于混沌系统对初始条件的敏感性, 以及系统在运行过程中容易受到随机噪声或者外界高频信号

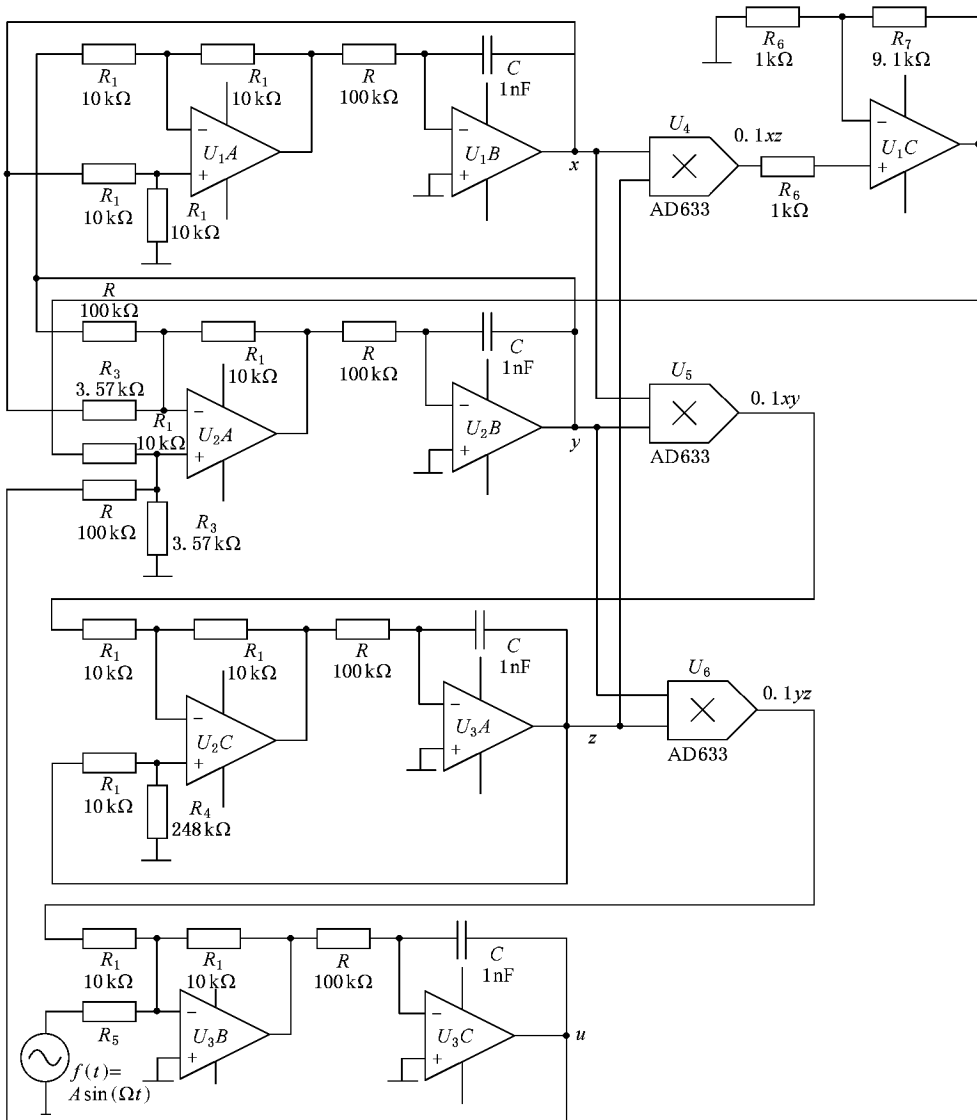


图 4 四维非自治系统 (3) 的电路实现 (电阻和电容的值的大小标注在图中. U_1, U_2 和 U_3 是模拟集成运算放大器 LF347, U_4, U_5 和 U_6 是模拟乘法器 AD633. 实验过程中集成电路 $U_1 \sim U_6$ 的工作电压是 $\pm 15 \text{ V}$)

的干扰,都可能使实验结果和仿真分析存在误差.在实验过程中的表现:当参数 $\omega \in [0, 2.6]$ 时得到周期轨与实验电路存在偏差,主要表现在投影角度上,还有就是通过模拟示波器没有观测到二维环面,其他

结果都能和数值仿真结果相对应.实验过程中采用的信号发生器是 YB1638,模拟示波器是 YB4360,示波器观测到结果的水平刻度是 0.5 V/div ,垂直刻度是 2 V/div .

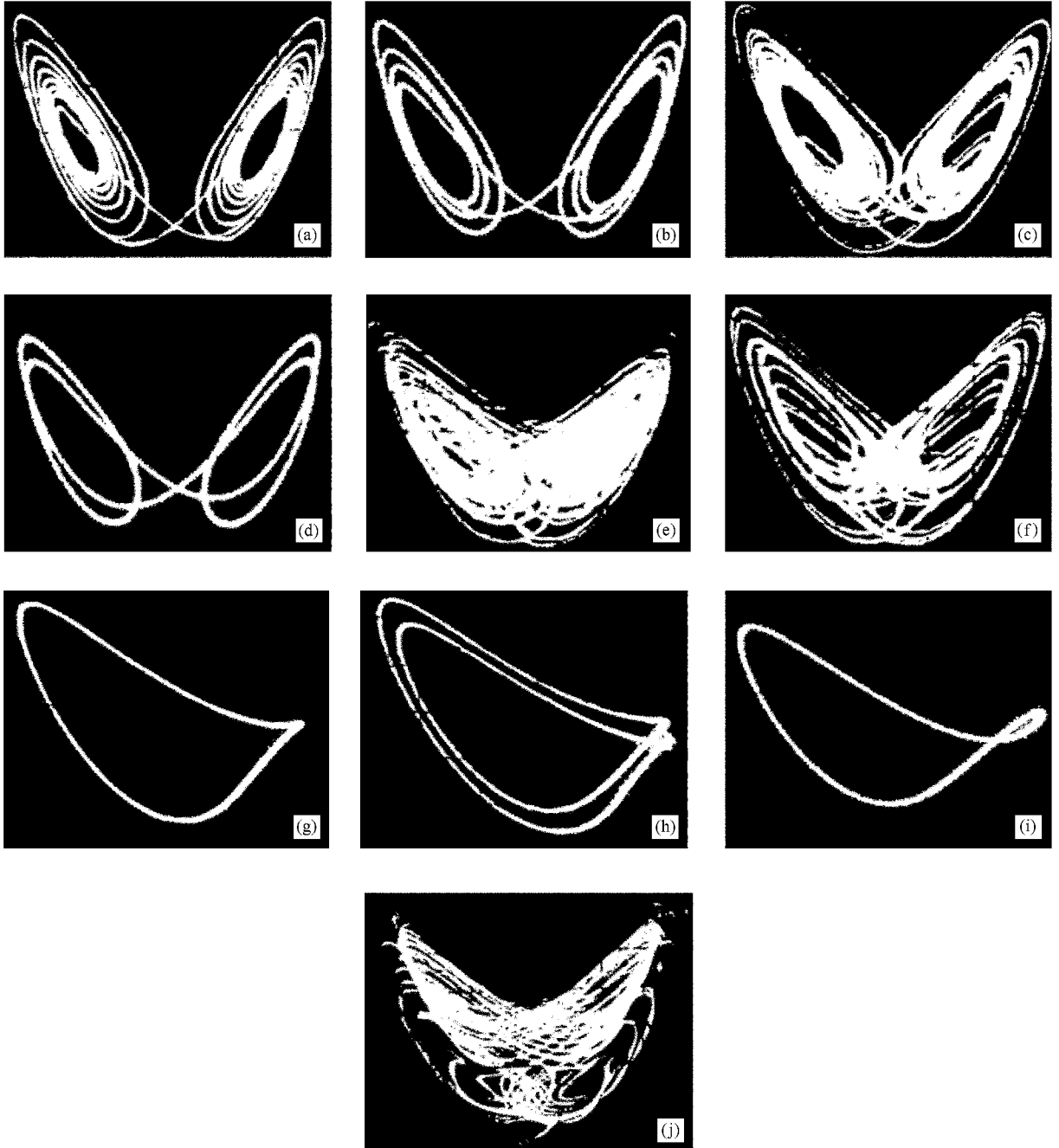


图5 用模拟示波器 YB4360 观测到 $x-z$ 相平面的相图(随着正弦信号发生器 YB1638 输出的频率 F 的增加,可以得到不同的相图.按次序(a)~(j)对应的输入模拟信号的频率为 $F = 185 \text{ Hz}$, $F = 394 \text{ Hz}$, $F = 455 \text{ Hz}$, $F = 583 \text{ Hz}$, $F = 722 \text{ Hz}$, $F = 868 \text{ Hz}$, $F = 1.21 \text{ kHz}$, $F = 1.23 \text{ kHz}$, $F = 1.24 \text{ kHz}$, $F = 1.47 \text{ kHz}$)

5. 结 论

通过对系统 (3) 的数值仿真, 分形分析, 以及实验电路的实现可知, 利用简单的 Lorenz 系统, 可以生成更加复杂的高维系统. 本文就是在 Lorenz 系统基

础上生成的一个 4 维非自治系统. 通过调节外界输入信号的频率可以控制这个系统的动力学特性, 使系统运动的形式呈周期、拟周期、混沌以及超混沌运动. 因此在实际运用领域, 通过调节外部驱动信号的频率而改变系统的动力学行为的方式, 有一定的实用参考价值.

- [1] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 130
- [2] Wang F Z, Qi G Y, Chen Z Q *et al* 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4005 (in Chinese) 【王繁珍、齐国元、陈增强等 2006 物理学报 **55** 4005】
- [3] Guan X P, Fan Z P, Zhang Q L *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2216 (in Chinese) 【关新平、范正平、张群亮等 2002 物理学报 **51** 2216】
- [4] Hua C C, Guan X P 2004 *Chinese Physics* **13** 1391
- [5] Liu C X 2006 *Acta Phys. Sin.* **51** 1998 (in Chinese) 【刘崇新 2006 物理学报 **51** 1998】
- [6] Chen G R, Lü J 2003 *Analysis, control and synchronization the generalized Lorenz systems family* (Beijing: Science Press) (in Chinese) 【陈关荣、吕金虎 2003 Lorenz 系统族动力学分析、控制与同步(北京:科学出版社)】
- [7] Kuang J Y, Deng K, Huang R H 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1856 (in Chinese) 【匡锦瑜、邓 昆、黄荣怀 2001 物理学报 **50** 1856】
- [8] Li X J, Peng J H, Xu N *et al* 2003 *Journal of Image and Graphics* **8** (A) 1192 (in Chinese) 【李雄军、彭建华、徐 宁等 2003 中国图象图形学报 **8** (A) 1192】
- [9] Hua C C, Guan X P 2004 *Chinese Physics* **13** 1441
- [10] Chen G R, Ueta T 1999 *Int. J. Bifurcation and Chaos* **9** 1465
- [11] Lü J H, Chen G R 2002 *Int. J. Bifurcation and Chaos* **12** 659
- [12] Lü J H, Chen G R, Zhang S 2002 *Int. J. Bifurcation and Chaos* **12** 2917
- [13] Liu W B, Chen G R 2003 *Int. J. Bifurcation and Chaos* **13** 261
- [14] Qi G Y, Chen G R, Du S Z *et al* 2005 *Physical A* **352** 295
- [15] Gao T G, Chen G R, Chen Z Q, Cang S J 2007 *Phys. Lett. A* **361** 78
- [16] Rössler O E, 1979 *Phys. Lett. A* **71** 155
- [17] Song Y Z, Zhao G Z, Qi D L 2006 *Chinese Physics* **15** 2006
- [18] Wang F Q, Liu C X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3295 (in Chinese) 【王发强、刘崇新 2006 物理学报 **55** 3295】

Analysis and circuit implementation of a new four-dimensional non-autonomous hyper-chaotic system^{*}

Cang Shi-Jian¹⁾²⁾ Chen Zeng-Qiang²⁾ Yuan Zhu-Zhi²⁾

1) *Department of Industry Design, Tianjin University of Science and Technology, Tianjin 300222, China*

2) *Department of Automation, Nankai University, Tianjin 300071, China*

(Received 25 April 2007 ; revised manuscript received 5 June 2007)

Abstract

A new four-dimensional non-autonomous hyper-chaotic system is presented by adding input signal to a hyper-chaotic system based on Lorenz system. The resulting hyper-chaotic system may have any dynamic behavior among the periodic orbits, two-tori, chaos and hyper-chaos by controlling the frequency of input signal, while the periodic orbits are more prominent. The phenomenon is well demonstrated by numerical simulations and bifurcation analysis. Finally, an analog electronic circuit is designed to implement the new system, and the experimental results of the non-autonomous hyper-chaotic circuit well agreed with the simulation results.

Keywords : Lorenz system, hyper-chaos, frequency modeling, circuit implementation

PACC : 0545, 2960

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 60374037, 60574036), the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (Grant No. 20050055013) and the Program for New Century Excellent Talents in University of China (Grant No. 2005290).