

# 多频谐和与噪声作用下 Flickering 振子的安全盆侵蚀与混沌\*

戎海武<sup>1)†</sup> 王向东<sup>1)</sup> 徐伟<sup>2)</sup> 方同<sup>2)</sup>

1) 佛山大学数学系, 佛山 528000)

2) 西北工业大学应用数学系, 西安 710072)

(2007 年 5 月 25 日收到, 2007 年 6 月 27 日收到修改稿)

研究了催化反应 Flickering 振子在多频率确定性谐和外力和有界随机噪声联合作用下, 系统安全盆的侵蚀和混沌现象. 将 Melnikov 方法推广到包含有限多个频率外力和随机噪声联合作用的情形, 推导出了系统的随机 Melnikov 过程. 根据 Melnikov 过程在均方意义上出现简单零点的条件给出了系统出现混沌的临界值, 然后用数值模拟方法计算了系统的安全盆分岔点. 结果表明, 由于随机扰动的影响, 系统的安全盆分岔点发生了偏移, 并且使得混沌容易发生. 同时证明, 激励频率数目的增加扩大了参数空间上的混沌区域, 也使得安全盆分岔提前发生, 系统变得不安全.

关键词: 多频率激励, Flickering 振子, 安全盆, 混沌

PACC: 0547

## 1. 引言

20 世纪 80 年代以来, 简谐激励下单自由度非线性系统分岔和混沌的研究取得了很大进展, Poincaré 截面法、Melnikov 方法等方法提供了强有力的研究工具. 但是关于多频激励非线性系统的研究很少. 尽管实验和数值仿真已经证实这类系统存在分岔和混沌运动. 主要原因是没有将多频强迫激励非线性系统简化为二维 Poincaré 映射的直接方法. 目前, 在多频激励下单自由度非线性系统的分岔和混沌已经有一些研究<sup>[1-4]</sup>, 而研究多频激励和噪声联合作用下非线性系统的分岔和混沌的工作尚未见到. 本文将在这方面作些尝试.

实际上噪声的干扰总是不可避免的, 所以研究噪声对系统性质的影响有助于理论结果的工程应用. 关于随机分岔的研究尚处于起步阶段, 目前随机分岔的定义主要分为两大类<sup>[5]</sup>. 一类是基于系统响应的稳态概率密度的形状随系统参数的变化而突然发生变化, 例如从单峰突然变为双峰, 这类定义称为  $P$  分岔. 另一类是基于系统的最大 Lyapunov 指数的

符号随参数变化给出的定义, 称为  $D$  分岔. 研究表明, 这两类定义给出的结果并不完全一致. Baxendale<sup>[6]</sup> 给出了一个例子, 当系统的最大 Lyapunov 指数随参数的变化而发生符号变化时, 系统的稳态概率密度的形状并不依赖分岔参数发生变化. 另一方面, Crauel 和 Flandolf<sup>[7]</sup> 给出了一个相反的例子, 当系统的稳态概率密度由单峰变为双峰时, 系统的最大 Lyapunov 指数的符号没有发生改变. 综上所述, 对于随机分岔的讨论仍然存在许多困难和问题, 要同时体现系统的拓扑特性和随机特征, 是随机分岔定义的中心问题. 我们认为, 随机分岔定义的关键是如何表征随机系统的拓扑特性, 找到随机系统合适的不变量. 在最近的一些工作中<sup>[8-12]</sup>, 作者们曾提出以系统的随机吸引子(包括随机鞍)的形态的突然变化(包括合并或分裂)来描述随机系统的分岔. 从工程应用的角度来说, 实际考虑的问题并非仅仅为吸引子、平衡点、周期解、分岔和混沌等, 有时更为重要的是振动的有界性问题. 若质点的运动振幅超过一定限度, 往往会导致结构的破坏, 由此产生对安全盆的研究<sup>[13, 14]</sup>, 但这些研究并没有考虑随机噪声的影响. 本文作者曾进行过这方面的研究, 并提出了

\* 国家自然科学基金(批准号: 10772046)和广东省自然科学基金(批准号: 7010407)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: ronghw@foshan.net

安全盆分岔和随机安全盆分岔的概念<sup>[15,16]</sup>. 本文是在文献 [15,16] 的基础上用随机 Melnikov 方法做进一步的研究. 本文研究了催化反应 Flickering 振子在确定性多频率谐和外力和有界随机噪声联合作用下, 系统安全盆的侵蚀和混沌现象, 推导出了系统的随机 Melnikov 过程. 根据 Melnikov 过程在均方意义上出现简单零点的条件给出了系统出现混沌的临界值. 然后用数值模拟方法计算了系统的安全盆分岔点. 结果表明, 由于随机扰动的影响, 系统的随机安全盆分岔点发生了偏移, 系统变得不安全, 并且使得混沌更容易发生. 同时证明, 激励频率数目的增加扩大了参数空间上的混沌区域, 也使得安全盆分岔提前发生, 系统变得不安全.

## 2. 双频激励确定性催化反应 Flickering 振子

考虑如下受双频谱和外激的催化反应 Flickering 振子<sup>[17]</sup>

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + xy + \epsilon(-\mu x + f\cos\omega_1 t + f\cos\omega_2 t), \\ \dot{y} &= -x + \frac{1}{2}(x^2 - y^2), \end{aligned} \quad (1)$$

式中  $0 < \epsilon \ll 1$  为小参数,  $f > 0$  是谐和力的振幅,  $\omega_1, \omega_2 > 0$  是谐和力的频率. 当  $\epsilon = 0$  时, 系统(1)成为一个无阻尼、无外力的保守系统, 也是一个 Hamilton 系统, 其 Hamilton 量为

$$H(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{6}x^3. \quad (2)$$

方程(1)有四个奇点  $(0, 0)$  是中心  $(2, 0)$  和  $(-1, \pm\sqrt{3})$  是三个双曲鞍点, 连接鞍点的异宿轨有三条, 分别是  $(-1, \sqrt{3})$  到  $(2, 0)$  的异宿轨  $\Gamma_1$ :

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\text{th}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), \\ y_1(t) &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\text{th}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), \end{aligned} \quad -\infty < t < +\infty. \quad (3)$$

从  $(-1, -\sqrt{3})$  到  $(-1, \sqrt{3})$  的异宿轨  $\Gamma_2$ :

$$\begin{aligned} x_2(t) &= -1 \\ y_2(t) &= \sqrt{3}\text{th}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), \end{aligned} \quad -\infty < t < +\infty. \quad (4)$$

和从  $(2, 0)$  到  $(-1, -\sqrt{3})$  的异宿轨  $\Gamma_3$ :

$$\begin{aligned} x_3(t) &= \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\text{th}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), \\ y_3(t) &= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\text{th}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), \end{aligned} \quad -\infty < t < +\infty. \quad (5)$$

当  $\epsilon > 0$  时, 系统(1)可能出现横截同宿点. 根据 Smale-Birkhoff 定理, 非线性系统若存在横截同宿点时, 意味着系统出现混沌. Melnikov 方法是一种用于判断特定种类的非线性系统何时出现 Smale 意义下混沌的解析方法, 它需要考虑系统 Poincaré 映射的鞍点附近稳定流形与不稳定流形之间的距离, 并用与此距离相关的一个积分——Melnikov 函数来判断系统是否出现横截同宿点. 对应于系统(1), 相应于  $\Gamma_1$  的 Melnikov 函数为

$$\begin{aligned} M_{\Gamma_1}(t_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} [-\mu x_1(t) + f\cos\omega_1(t+t_0) \\ &\quad + f\cos\omega_2(t+t_0)]y_1(t)dt \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\mu + fI_1\cos\omega_1 t_0 + fI_2\cos\omega_2 t_0 \quad (6) \end{aligned}$$

式中  $I_i = \pi\omega_i \operatorname{csch}\left(\frac{\pi\omega_i}{\sqrt{3}}\right)$ ,  $i = 1, 2$ . 而相应于  $\Gamma_3$  的 Melnikov 函数为  $M_{\Gamma_3} = M_{\Gamma_1}$ , 相应于  $\Gamma_2$  的 Melnikov 函数为

$$\begin{aligned} M_{\Gamma_2}(t_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} [-\mu x_2(t) + f\cos\omega_1(t+t_0) \\ &\quad + f\cos\omega_2(t+t_0)]y_2(t)dt \\ &= -2\sqrt{3}\mu + 2fI_1\cos\omega_1 t_0 + 2fI_2\cos\omega_2 t_0. \quad (7) \end{aligned}$$

由(6)式可知, Melnikov 函数  $M_{\Gamma_1}$  有简单零点的充分必要条件为

$$f > \frac{\sqrt{3}\mu}{2(I_1 + I_2)}. \quad (8)$$

由(7)式可知, Melnikov 函数  $M_{\Gamma_2}$  有简单零点的充分必要条件为

$$f > \frac{\sqrt{3}\mu}{I_1 + I_2}. \quad (9)$$

显然, 当条件(9)满足时条件(8)也满足. 故在以后的讨论中我们只研究异宿轨  $\Gamma_1$  产生横截同宿点的条件(8), 而不研究条件(9). 由条件(8)可以知道, 当外力的振幅  $f$  超过阈值  $\frac{\sqrt{3}\mu}{2(I_1 + I_2)}$  时, 系统可能产生混沌.

从工程应用的角度来说, 振动的有界性问题很重要. 若质点的运动振幅超过一定限度, 往往会导致结构的破坏, 由此产生对安全盆的研究. 所谓一个系统的安全盆, 可以由相空间的一个有界区域  $D$  来定义, 使得以安全盆内部的点为起始点出发的轨线当时间趋于无穷大时仍在区域  $D$  内运动. 即以安全盆外部的点为起始点出发的轨线将逃逸出区域  $D$ , 它

们是不安全的,将导致系统的破坏或崩溃.安全盆的结构与某些吸引子的吸引盆的结构类似<sup>[14]</sup>,当系统参数发生变化时,安全盆的面积和形状也将发生改变.并且安全盆侵蚀现象和混沌有联系,当系统的安全盆受到侵蚀后,其边界往往出现分形形状.另一方面,混沌运动也可以是有界的,所以安全盆内某些点为初值的运动可能为混沌运动.

本文研究当  $f$  变化时,系统(1)安全盆的变化情况.在数值计算中,取系统参数为  $\epsilon = 0.1$ ,  $\mu = 0.8$ ,

$\omega_1 = 1.0$ ,  $\omega_2 = 1.3$ ,且在系统响应的相空间中选取一个充分大的有界区域  $D: D = \{(x, y) : -3 \leq x \leq 3, -3 \leq y \leq 3\}$ ,该区域包含了系统(1)的四个奇点和三条异宿轨,并把此区域分成  $200 \times 200$  个小格子,将格点作为系统解的初始值.当系统过这些初始值的解在足够长的时间如 5000 个时间单位内逃逸出区域  $D$ ,则认为此解是不安全的;如果没有逃逸出区域  $D$ ,则近似地认为它是安全、有界的解.对于不同的  $f$ ,系统(1)安全盆变化情况见图 1(a)–(h).

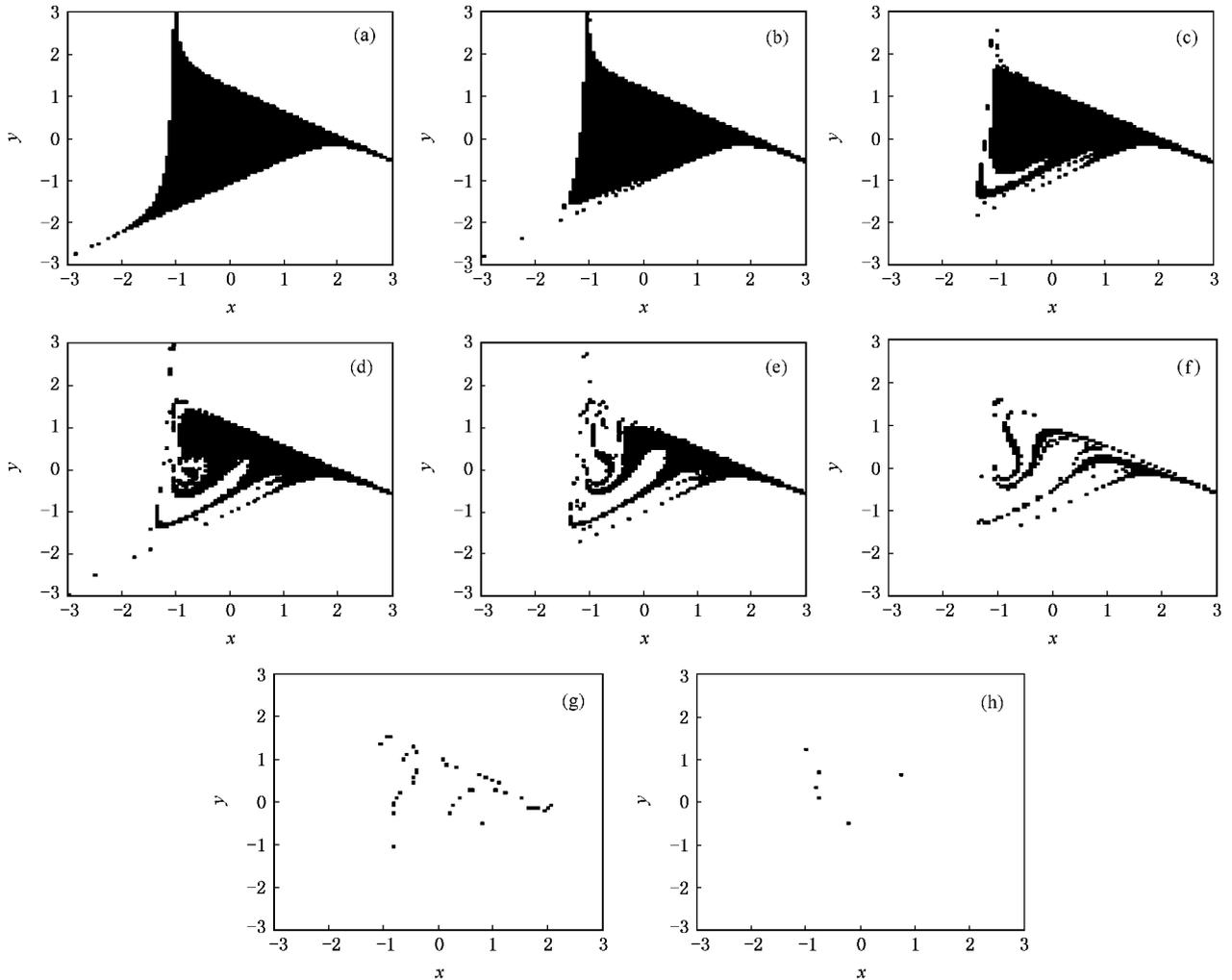


图 1 系统(1)的安全盆侵蚀( $\epsilon = 0.1$ ,  $\mu = 0.8$ ,  $\omega_1 = 1.0$ ,  $\omega_2 = 1.3$ ) (a)  $f = 0.60$ ; (b)  $f = 1.00$ ; (c)  $f = 1.40$ ; (d)  $f = 1.60$ ; (e)  $f = 1.70$ ; (f)  $f = 1.80$ ; (g)  $f = 2.00$ ; (h)  $f = 2.20$

图 1 中的黑色部分代表导致系统安全解的初始值组成的部分,构成了系统的安全盆,即以安全盆内的点作为初始值的解是系统的安全解,而空白部分则代表导致系统不安全解的初始值组成的部分,即以安全盆外的点作为初始值的解是系统的不安全解.

图 1(a)是一个完整的安全盆图形,而图 1(b)–

(h)则是受到侵蚀后的安全盆.计算表明,当  $f \leq f_s = 0.63$  时,系统的安全盆没有侵蚀,形状如图 1(a)所示;当  $f > f_s$  时,随着  $f$  的逐渐增大,安全盆被慢慢侵蚀,且将导致安全盆边界的分形形状(图 1(b), (c))部分侵蚀(图 1(d)–(f)),及完全侵蚀(图 1(g)(h));当  $f > f_c = 2.47$  时,安全盆为空白,即对

任何初始值系统解都是不安全的. 如果将安全盆的突变现象(从完整的安全盆到被侵蚀、直至完全消失)作为一种分岔现象, 将  $f$  作为分岔参数, 则  $f_s = 0.63$ ,  $f_e = 2.47$  是系统(1)的两个分岔点.  $f_s$  是安全盆侵蚀的起始点, 而  $f_e$  是安全盆消失的起始点. 即当  $f \leq f_s$  时, 系统的安全盆没有侵蚀; 当  $f_s < f \leq f_e$  时, 安全盆被慢慢侵蚀; 当  $f > f_e$  时, 安全盆完全消失.

而当  $\mu = 0.8$ ,  $\omega_1 = 1.0$ ,  $\omega_2 = 1.3$  时, 系统(1)可能产生混沌的临界值可由(8)式得到为  $f = 0.39$ , 此值与系统(1)的安全盆分岔的第一个分岔点  $f_1 = 0.63$  比较接近, 从而说明系统的安全盆侵蚀现象与混沌现象是密切联系的.

### 3. 双频激励的随机催化反应 Flickering 振子

下面考虑随机噪声对安全盆和混沌的影响, 此时系统(1)变为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + xy + \varepsilon(-\mu x + f \cos \omega_1 t + f \cos \omega_2 t + \xi(t)), \\ \dot{y} &= -x + \frac{1}{2}(x^2 - y^2), \end{aligned} \quad (10)$$

式中  $\xi(t)$  是随机噪声项, 本文采用如下的模型:

$$\xi(t) = g \cos \varphi(t), \dot{\varphi} = \Omega + \gamma \dot{W}(t), \quad (11)$$

式中  $g > 0$  为随机激励的强度,  $\Omega$  为随机激励的中心频率,  $W(t)$  为标准 Wiener 过程,  $\gamma \geq 0$  为随机扰动的强度.  $\xi(t)$  可以看作周期性外力中的角频率  $\Omega$  受到了强度为  $\gamma$  的白噪声  $\dot{W}(t)$  扰动. 由文献[18]可知  $\xi(t)$  功率谱密度为

$$S_\xi(\omega) = \frac{1}{2} \frac{g^2 \gamma^2 (\Omega^2 + \omega^2 + \gamma^2/4)}{(\Omega^2 - \omega^2 + \gamma^2/4)^2 + \Omega^2 \gamma^4}. \quad (12)$$

当  $\gamma \rightarrow 0$  时,  $S_\xi(\omega)$  在  $\omega = \pm \Omega$  处取值为无穷大而在其他处的值趋于零, 这是一种典型的窄带噪声的功率谱密度; 当  $g = \gamma/\sqrt{2} \rightarrow \infty$  时,  $S_\xi(\omega) \rightarrow 1$ , 为白噪声(典型的宽带噪声)的功率谱密度. 由于  $|\xi(t)| \leq g$ , 故  $\xi(t)$  是一种有界随机噪声.

由于有界噪声具有连续有界的样本函数, 它满足 Melnikov 方法的适用条件. 文献[19, 20]用随机 Melnikov 方法研究了白噪声对系统混沌的影响, 本文利用随机 Melnikov 方法研究有界噪声的影响, 可得系统(10)相应于  $\Gamma_1$  的 Melnikov 积分为

$$\begin{aligned} M_{\Gamma_1}(t_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} [-\mu x_1(t) + f \cos \omega_1(t + t_0) + f \cos \omega_2(t + t_0) + \xi(t + t_0)] y_1(t) dt \\ &= M_d(t_0) + M_f(t_0), \end{aligned} \quad (13)$$

式中  $M_d(t_0)$  为系统(10)受到谐和外力和阻尼力作用下 Melnikov 过程的均值, 由(6)式可知,

$$\begin{aligned} M_d(t_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} [-\mu x_1(t) + f \cos \omega_1(t + t_0) + f \cos \omega_2(t + t_0)] y_1(t) dt \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \mu + f I_1 \cos \omega_1 t_0 + f I_2 \cos \omega_2 t_0, \end{aligned} \quad (14)$$

而

$$\begin{aligned} M_f(t_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(t + t_0) y_1(t) dt \\ &= \frac{3}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(t + t_0) \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) dt \end{aligned}$$

为系统(10)在有界噪声  $\xi(t)$  作用下 Melnikov 积分的随机部分.

由于线性时不变过滤器的作用, 随机过程  $M_f(t_0)$  是平稳的随机过程, 其均值为零, 方差可以通过对整个频率范围内谱的积分计算得到

$$\sigma_{M_f}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |Y(\omega)|^2 S_\xi(\omega) d\omega, \quad (15)$$

式中

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y_1(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{3}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) e^{-j\omega t} dt \\ &= \pi \omega \operatorname{csch}\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \pi \omega\right). \end{aligned} \quad (16)$$

结合(12)、(15)和(16)式可得

$$\begin{aligned} \sigma_{M_f}^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \pi \omega \operatorname{csch}\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \pi \omega\right) \right]^2 \\ &\quad \times \frac{1}{2} \frac{g^2 \gamma^2 (\Omega^2 + \omega^2 + \gamma^2/4)}{(\Omega^2 - \omega^2 + \gamma^2/4)^2 + \Omega^2 \gamma^4} d\omega. \end{aligned} \quad (17)$$

给出系统参数的具体值后, 由(17)式可以用数值方法计算方差. 由(13)式可知, 系统(10)相应于  $\Gamma_1$  的 Melnikov 积分的均值为  $M_d(t_0)$ , 它是随机过程  $M_{\Gamma_1}(t_0)$  的波动中心, 而均方差  $\sigma_{M_f}$  表示  $M_{\Gamma_1}(t_0)$  对均值  $M_d(t_0)$  的均方偏离程度, 这样  $M_{\Gamma_1}(t_0)$  将在区间  $[M_d(t_0) - \sigma_{M_f}, M_d(t_0) + \sigma_{M_f}]$  内波动. 当均方差  $\sigma_{M_f}$  足够大时, 即使在确定性情况( $\xi(t) = 0$ )时

$M_{\Gamma_1}(t_0)$ 取不到零点,即系统(1)不产生混沌,但是在随机激励的情况( $\xi(t) \neq 0$ ), $M_{\Gamma_1}(t_0)$ 可以取到零点,从而使得系统(10)产生混沌.这说明随机激励的作用可以增大系统的混沌区域,使得系统更容易产生混沌运动.由(13),(14)式可得相应于 $\Gamma_1$ 的Melnikov函数有简单零点的充分必要条件为

$$f > \frac{\sqrt{3}\mu}{2(I_1 + I_2)} - \frac{\sigma_{M_f}}{I_1 + I_2}. \quad (18)$$

下面用数值模拟方法研究系统(10)的随机安全盆侵蚀现象.为与确定性的系统(1)进行比较,在系统(10)中取系统参数为

$$\begin{aligned} \epsilon = 0.1, \mu = 0.8, \omega_1 = 1.0, \omega_2 = 1.3, \\ \Omega = 1.5, \gamma = 0.3, g = 0.4. \end{aligned}$$

在模拟随机过程 $\xi(t)$ 时,采用蒙特-卡罗方法<sup>[21]</sup>,限于计算量本文仅取10个样本.有关安全解的定义同前述,如果在这10个样本中,由初始点出发的解都是安全解,则称此初始点为安全初始点,所有的安全初始点组成了系统(6)的随机安全盆.对于不同的 $f$ ,系统(10)随机安全盆变化情况见图2(a)~(h).同图1一样,图2中黑色部分代表导致系统安全解的初始值组成的部分,而空白部分则代表导致系统不安全解的初始值组成的部分.

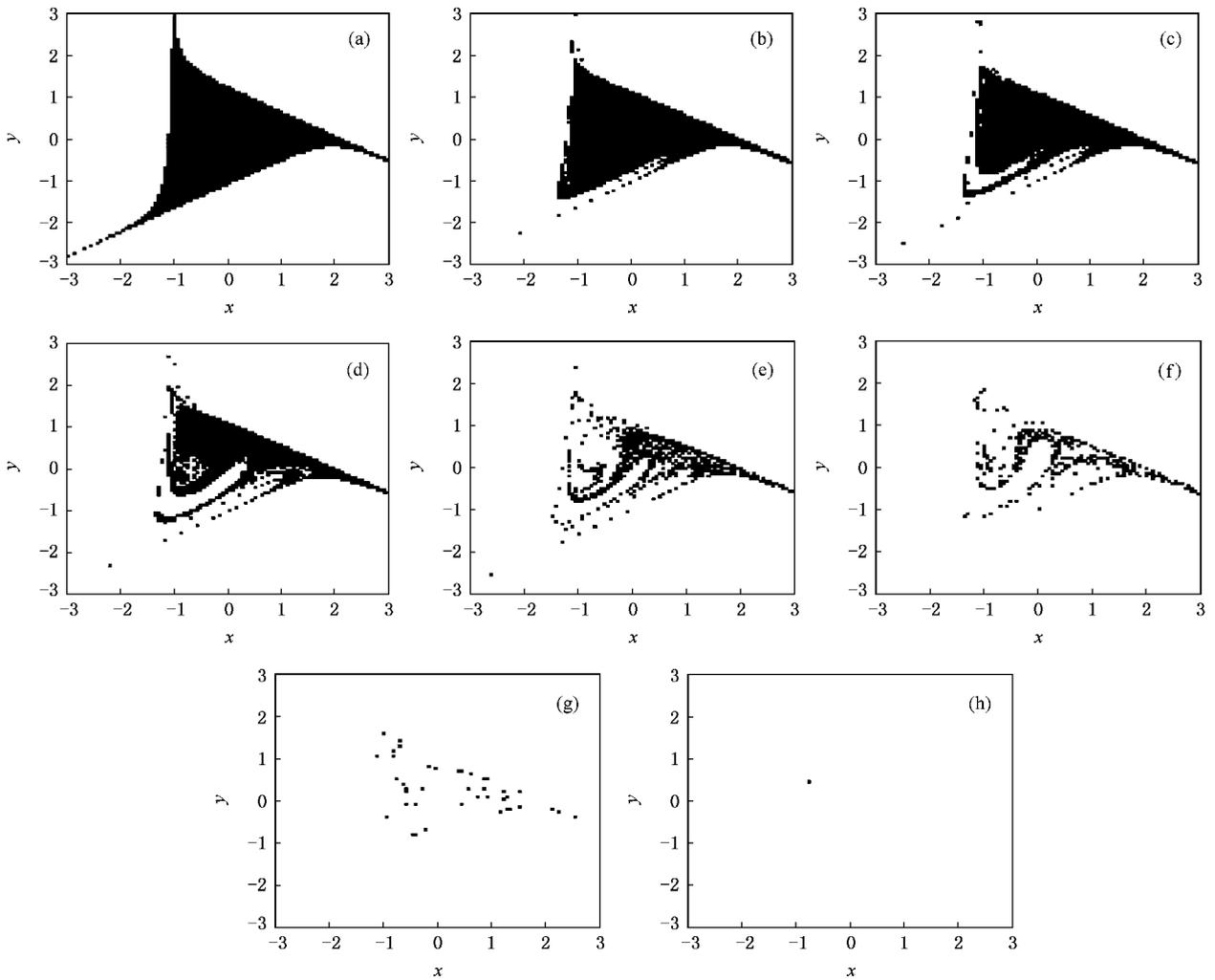


图2 系统(10)的安全盆侵蚀( $\epsilon = 0.1, \mu = 0.8, \omega_1 = 1.0, \omega_2 = 1.3, \Omega = 1.5, \gamma = 0.3, g = 0.4$ ) (a) $f = 0.40$ ; (b) $f = 1.20$ ; (c) $f = 1.40$ ; (d) $f = 1.60$ ; (e) $f = 1.70$ ; (f) $f = 1.75$ ; (g) $f = 1.80$ ; (h) $f = 2.00$

从图2(a)~(h)可见,随着 $f$ 的逐渐增大,安全盆被慢慢侵蚀,这与确定性系统(1)中的安全盆侵蚀现象(见图1)类似.计算表明,当 $f \leq f_s = 0.60$ 时,系

统的安全盆没有侵蚀,形状如图2(a)所示;当 $f > f_s$ 时,随着 $f$ 的逐渐增大,安全盆被慢慢侵蚀(图2(b)~(g))及完全侵蚀(图2(h));当 $f > f_e = 2.04$

时,安全盆为空白,即对任何初始值系统解都是不安全的.不妨称系统(10)的安全盆突变现象(从完整的安全盆到被侵蚀、直至完全消失)看作为一种分岔现象.将  $f$  作为分岔参数,则  $f_s = 0.60$ ,  $f_e = 2.04$  是系统(10)的两个随机安全盆分岔点.与确定性系统(1)相比较,随机扰动使得  $f_s$  从 0.63 偏移到 0.60,  $f_e$  从 2.47 偏移到 2.04.事实上,比较(18)和(8)二式可以知道,随机噪声  $\xi(t)$  使得系统的混沌提前发生,由于系统的安全盆侵蚀与混沌是密切联系的,故使得系统的安全盆分岔提前发生.

而当  $\varepsilon = 0.1$ ,  $\mu = 0.8$ ,  $\omega_1 = 1.0$ ,  $\omega_2 = 1.3$ ,  $\Omega = 1.5$ ,  $\gamma = 0.3$ ,  $g = 0.4$  时,由(18)式得到的系统(10)产生混沌的临界值为  $f = 0.26$ ,此值与系统(10)的安全盆分岔的第一个分岔点  $f_s = 0.60$  比较接近,从而说明在随机系统中安全盆侵蚀与混沌也是密切联系的.

综上所述,随机扰动使得系统安全盆分岔提前发生,安全盆区域变小,从而使得系统变得不安全.由(18)式得到的系统(10)产生混沌的临界值为  $f = 0.26$ ,比由(8)式得到的系统(1)产生混沌的临界值  $f = 0.38$  小,故随机扰动使得系统更容易产生混沌.

从图1和图2可以看出,随机系统的安全盆侵蚀与确定系统的安全盆侵蚀在定性上类似的.但是,随机系统的安全盆本质上是在近似几乎必然意义下定义的.由于计算量的限制,取的样本容量只有10个,故在每次计算中,反映随机系统的安全盆侵蚀图2都有所不同.在一次样本中系统的安全初始点在另一个样本中可能并不是系统的安全初始点,只有当在所有10个样本中都是系统的安全初始点才定义为随机系统的安全初始点,所以这种安全初始点是在近似几乎必然意义下的,即随机系统的安全盆的定义也是在近似几乎必然意义下的.当样本容量趋于无穷时,这种定义就是在几乎必然意义下的.

#### 4. 多频激励的随机 Flickering 振子

增加更多的激励频率,系统(10)将变为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + xy + \varepsilon(\mu x + f \cos \omega_1 t + f \cos \omega_2 t \\ &\quad + \dots + f \cos \omega_n t + \xi(t)), \\ \dot{y} &= -x + \frac{1}{2}(x^2 - y^2), \end{aligned} \quad (19)$$

类似前面的推导,可得相应于  $\Gamma_1$  的 Melnikov 函数有简单零点的充分必要条件为

$$f > \frac{\sqrt{3}\mu}{\chi(I_1 + I_2 + \dots + I_n)} - \frac{\sigma_{M_1}}{I_1 + I_2 + \dots + I_n}. \quad (20)$$

式中  $I_i = \pi \omega_i \operatorname{csch}\left(\frac{\pi \omega_i}{\sqrt{3}}\right)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . 比较条件(8)(18)和(20)可以看出,增加频数及随机噪声扩大了参数空间上能够混沌发生的可能性,同时也使得系统安全盆分岔提前发生,安全盆区域变小,从而使得系统变得不够安全.

事实上,在单频激励的确定性 Duffing 系统,即在系统(19)中当  $n = 1$ ,  $\xi(t) = 0$  时,系统的其他参数为  $\varepsilon = 0.1$ ,  $\mu = 0.8$ ,  $\omega_1 = 1.0$  与系统(1)一致,由(20)式可得系统(19)产生混沌的临界值为  $f = 0.66$ ,计算可得系统(19)的两个安全盆分岔点为  $f_s = 0.77$ ,  $f_e = 4.07$ ,而系统(1)产生混沌的临界值为  $f = 0.39$ ,安全盆分岔点分别是  $f_s = 0.63$ ,  $f_e = 2.47$ .在单频激励的随机 Duffing 系统,即在系统(19)中当  $n = 1$ ,  $\xi(t) \neq 0$  时,系统的其他参数为  $\varepsilon = 0.1$ ,  $\mu = 0.8$ ,  $\omega_1 = 1.0$ ,  $\Omega = 1.5$ ,  $\gamma = 0.3$ ,  $g = 0.4$  与系统(10)一致,由(20)式可得系统(19)产生混沌的临界值为  $f = 0.46$ ,计算可得系统(19)的两个安全盆分岔点为  $f_s = 0.74$ ,  $f_e = 3.86$ ,而系统(10)产生混沌的临界值为  $f = 0.26$ ,安全盆分岔点分别是  $f_s = 0.60$ ,  $f_e = 2.04$ .比较上面的结果可知无论在确定性或随机情形,增加激励频率后可以使得系统产生混沌的临界值  $f$  变小,即系统产生混沌的参数空间扩大,而且使得系统的两个安全盆分岔点  $f_s$ ,  $f_e$  变小,即系统安全盆区域变小,从而使得系统变得不够安全.

安全盆区域的变化与系统参数有很大关系,计算表明当  $\mu$  增大时,系统的安全盆区域将变大,且使得安全盆分岔点延后.事实上,从(20)式可知,增大  $\mu$  也可以使得系统产生混沌的阈值变大.当随机激励的强度  $g$  增大时,系统的安全盆区域将变小,且使得安全盆分岔点提前.事实上,由(17)式可知,当  $g$  增大时,其方差  $\sigma_{M_1}^2$  增大,由(20)式可知系统产生混沌的阈值变小,使得系统更加容易产生混沌.无论在确定性系统还是随机系统,根据 Melnikov 方法得到的系统产生混沌的临界值与系统安全盆分岔的第一个分岔点比较接近,从而说明系统的安全盆侵蚀与混沌是密切联系的.图2说明随着外力幅值  $f$  的逐渐增大,系统的能量越来越大,系统变得越来越不安全,故安全盆被慢慢侵蚀,这是符合物理直觉的.

考虑更一般的情形,当系统中不同激励频率所对应的激励力幅值不同时,系统(19)变为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + xy + \epsilon(\mu x + f_1 \cos \omega_1 t \\ &\quad + f_2 \cos \omega_2 t + \dots + f_n \cos \omega_n t + \xi(t)), \\ \dot{y} &= -x + \frac{1}{2}(x^2 - y^2), \end{aligned} \quad (21)$$

当  $f_1 = f_2 = \dots = f_n = f$  时(21)式就退化到(19)式,类似前面的推导,可以得到系统(21)相应于  $\Gamma_1$  的 Melnikov 过程为

$$M_{\Gamma_1}(t_0) = M_{\text{A}}(t_0) \pm M_{\text{I}}(t_0), \quad (22)$$

式中  $M_{\text{A}}(t_0)$  为系统(22)受到谐和外力和阻尼力作用下相应于  $\Gamma_1$  的 Melnikov 过程的均值,

$$\begin{aligned} M_{\Gamma_1}(t_0) &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\mu \pm f_1 I_1 \cos \omega_1 t_0 \pm f_2 I_2 \cos \omega_2 t_0 \\ &\quad \pm \dots \pm f_n I_n \cos \omega_n t_0. \end{aligned} \quad (23)$$

而  $M_{\text{I}}(t_0)$  为系统(21)在有界噪声  $\xi(t)$  作用下相应

于  $\Gamma_1$  的 Melnikov 积分的随机部分,与第三节给出的一致.由(22)(23)式可得 Melnikov 函数有简单零点的条件为

$$f_1 I_1 + f_2 I_2 + \dots + f_n I_n > \frac{\sqrt{3}}{2}\mu - \sigma_{M_{\text{I}}}. \quad (24)$$

当  $f_1 = f_2 = \dots = f_n = f$  时(24)式就退化到(21)式.

## 5. 结 论

研究表明,增加频数及随机噪声扩大了参数空间上能够混沌发生的可能性,同时也使得系统安全盆分岔提前发生,安全盆区域变小,从而使得系统变得不够安全.随机安全盆的突变现象可以作为系统随机分岔的另一种定义.随机分岔的相关研究还可见文献[22, 23].本文研究的 Flickering 系统是一个典型的非线性系统,对于其他的非线性系统,本文的方法也是适用的.

- [1] Wiggins S 1987 *Phys. Let. A* **124** 138
- [2] Yagasaki K 1991 *ASME J. Appl. Mech.* **58** 244
- [3] Yagasaki K 1999 *J. Nonlinear Sci.* **9** 131
- [4] Lou J J, He Q W, Zhu S J 2004 *Appl. Math. Mech.* **25** 1299 (in Chinese)[楼京俊、何其伟、朱石坚 2004 应用数学和力学 **25** 1299]
- [5] Arnold L 1998 *Random Dynamical Systems* (New York, Berlin, Heidelberg: Springer) 1
- [6] Baxendale P 1986 *Stochastic processes and their applications* In eds. Ito K and Hida T (LN in Mathematics) (New York, Berlin, Heidelberg: Springer) 1
- [7] Crauel H, Flandoli F 1998 *J. Dyn. Differential Equations* **10** 259
- [8] Xu W, He Q, Fang T et al 2003 *Int. J. Bifurcation Chaos* **10** 3115
- [9] Xu W, He Q, Fang T et al 2004 *Int. J. Non-Linear Mech.* **9** 1473
- [10] Xu W, He Q, Rong H W et al 2003 *Acta. Phys. Sin.* **52** 1365 (in Chinese)[徐伟、贺群、戎海武等 2003 物理学报 **52** 1365]
- [11] Xu W, He Q, Rong H W et al 2004 *Phys. A-statistical Applications* **338** 319
- [12] Xu W, He Q, Fang T et al 2005 *Chaos Solitons and Fractals* **23** 141
- [13] Nayfeh A H, Sanchez N E 1989 *Int. J. Non-Linear Mech.* **24** 483
- [14] Soliman M S 1995 *J. Sound Vib.* **182** 729
- [15] Rong H W, Wang X D, Xu W et al 2005 *Acta. Phys. Sin.* **54** 4610 (in Chinese)[戎海武、王向东、徐伟等 2005 物理学报 **54** 4610]
- [16] Rong H W, Wang X D, Xu W et al 2007 *Acta. Phys. Sin.* **56** 2005 (in Chinese)[戎海武、王向东、徐伟等 2007 物理学报 **56** 2005]
- [17] Wang S H 1999 *Differential Equation Model and Chaos* (Hefei: Chinese Science and Technology University Press [in Chinese] 王树禾 1999 微分方程模型与混沌(合肥:中国科学技术大学出版社))
- [18] Wedig W V 1990 *Structural Safety* **8** 13
- [19] Frey M, Simiu E 1993 *Phys. D* **63** 321
- [20] Lin H, Yim S C S 1996 *ASME J. Appl. Mech.* **63** 509
- [21] Zhu W Q, 1992 *Random Vibration* (Beijing: Science Press) (in Chinese)[朱位秋 1992 随机振动(北京:科学出版社)]
- [22] Xiong J J, Gao Z T, Liu X B et al 2000 *Acta. Phys. Sin.* **49** 49 (in Chinese)[熊峻江、高镇同、刘先斌等 2000 物理学报 **49** 49]
- [23] Zhu W Q, Lu M Q, Wu Q T 1993 *J. Sound Vib.* **165** 285

# Bifurcations of safe basins and chaos in Flickering oscillator under multi-frequency harmonic and bounded noise excitation \*

Rong Hai-Wu<sup>1)†</sup> Wang Xiang-Dong<sup>1)</sup> Xu Wei<sup>2)</sup> Fang Tong<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> Department of Mathematics, Foshan University, Foshan 528000, China)

<sup>2)</sup> Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

( Received 25 May 2007 ; revised manuscript received 27 June 2007 )

## Abstract

The erosion of the safe basins and related chaotic motions of a Flickering oscillator under multi-frequency external periodic forces and bounded random noise are studied. By the Melnikov method, the system's Melnikov integral is computed and the parametric threshold for the onset of chaos is obtained. The Melnikov's global perturbation technique is therefore generalized to higher dimensional systems. Using the Monte-Carlo and Runge-Kutta method, the erosion of safe basins is also discussed. As an alternative definition, stochastic bifurcation may be defined as a sudden change in the character of stochastic safe basins when the bifurcation parameter of the system passes through a critical value. This definition applies equally well either to randomly perturbed motions or to purely deterministic motions. It is found that increasing the number of forcing frequencies or increasing the random noise may destroy the integrity of the safe basins, bring forward the occurrence of the stochastic bifurcation and make the threshold for onset of chaos vary in a larger extent, which hence makes the system less safe and chaotic motions easier to occur.

**Keywords** : multi-frequency excitation, Flickering oscillator, safe basin, chaos

**PACC** : 0547

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 10772046 ) and the Natural Science Foundation of Guangdong Province, China ( Grant No. 7010407 ).

† Corresponding author. E-mail : ronghw@foshan.net