

双 δ 激光脉冲作用下 Paul 阱中单离子的规则与混沌运动*

陈文钦^{1)†} 海文华^{1)†} 宋建文¹⁾

¹⁾ 湖南师范大学物理系, 长沙 410081)

²⁾ 华南热带农业大学基础学院, 儋州 571737)

(2007 年 5 月 30 日收到, 2007 年 7 月 3 日收到修改稿)

考虑赝势近似下囚禁于 Paul 阱中的单离子与双 δ 脉冲型周期势相互作用系统的规则与混沌运动. 应用积分方程方法得到系统的经典运动精确解, 通过数值方法作出相空间轨道图和平均能量的时间演化曲线. 结合分析与数值结果, 发现两个有趣的结论. 即在离子与单 δ 脉冲作用出现共振失稳的情形, 在双 δ 脉冲作用下却出现了稳定的规则运动. 离子随着双 δ 脉冲中两个脉冲之间的时间间隔减小而由规则运动转为混沌运动, 其平均能量扩散的快慢与混沌运动的混乱程度相关. 还研究了系统的共振失稳, 发现通过调节激光波矢可以控制这种不稳定性.

关键词: 双 δ 脉冲, 囚禁离子, 精确解, 混沌

PACC: 3280, 0545

1. 引言

自从利用 Paul 阱在室温下实现了单个离子的稳定囚禁以后^[1], 关于囚禁单离子的研究报道越来越多. 目前, 世界上至少有 20 多个小组在对 Paul 阱中的单离子进行研究^[2]. 离子囚禁技术与激光冷却的结合使离子阱系统具有更多的优点, 从而被科学和技术研究的更多领域采用. 如非经典态的制备^[3-5], 量子跃迁现象的观测^[6], 量子逻辑操作^[7-9], 量子信息^[10, 11], 高精光谱测量^[12]和离子阱质谱分析^[13]等等. 囚禁于 Paul 阱中的离子是一个非常有趣的非线性动力学系统, 目前对单离子和多离子动力学特征的研究已引起了许多关注^[14, 15]. 产生非线性的因素很多, 激光场作用于囚禁单离子产生的非线性尤为被关注^[16-22]. 当激光强度很小时, 运动方程的线性项起主导作用, 离子作规则运动. 随着激光强度增加, 方程中的非线性逐渐起主导作用, 离子将进入混沌状态^[18-21]. 文献 19 研究了激光驻波作用下的单离子系统, 文献 20, 21 分别研究了单驻波和双驻波型激光单 δ 脉冲作用下囚禁单离子系统的经典和量子力学特征, 文献 22 研究了高斯型激光脉

冲作用下的囚禁单离子系统经典混沌和量子混沌的性质. 最近, 人们又研究了激光形成的空间 δ 势对囚禁单离子量子态的影响^[23]. 根据量子-经典对应原理, 经典不稳定性和混沌特征必将在离子的量子运动中有所对应. 因此对囚禁离子各种新的经典运动性质的研究仍然是必要和重要的.

与单 δ 激光脉冲作用下的系统相比, 双 δ 激光脉冲作用系统有许多不同性质, 近年来已引起人们关注^[24-26]. 双 δ 激光脉冲作用于一维转子称为 2δ -KR 系统, 其量子力学时间演化矩阵 $U(t, t_0) = U(T, 0)$ 比单 δ 激光脉冲作用于转子 (δ -KR) 的 $U(T, 0)$ 有一个新的振荡结构^[24], 导致新的时间演化性质. 在单 δ 激光脉冲对原子的作用系统中, 通常经典混沌力学只显示短时间 (2 或 3 个脉冲) 的扩散关联^[26, 27]; 而在双 δ 激光脉冲对原子作用的系统, 经典混沌扩散显示新型的长程整体关联^[25]. 我们期待, 双 δ 激光脉冲对囚禁离子的作用也将导致某些新的现象.

本文主要探讨在赝势近似下, 双 δ 激光脉冲作用在 Paul 阱中的单离子系统产生的规则和混沌运动. 我们首先应用积分方程方法得到系统的经典运动精确解, 包括任意时间区间的连续运动态和以双

* 国家自然科学基金 (批准号: 10575034) 和波谱与原子分子物理国家重点实验室 (批准号: T152504) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: whhai2005@yahoo.com.cn

δ 激光脉冲中第一个激光脉冲打开时刻为时间变量的离散映射关系. 通过数值方法作出在不同参数值和不同初始条件下的相空间轨道, 并计算囚禁离子的平均能量. 结合分析与数值结果研究囚禁离子的规则与混沌运动特性. 我们发现几个新的动力学性质: 一是囚禁离子的运动状态与双 δ 激光脉冲中第二个脉冲打开的时间间隔 τ 紧密相关, 固定其他参数调节 τ . 随着 τ 的减小, 系统将由规则运动状态过渡到混沌运动状态; 二是在单 δ 脉冲作用于离子系统出现共振失稳的情形下, 2δ 激光脉冲作用的囚禁离子系统却出现了稳定的规则运动; 三是在离子的初始能量小于一定值时, 囚禁离子处于规则运动状态. 我们也研究了囚禁离子平均能量的扩散, 发现扩散程度与离子的混沌运动状态紧密相关, 随着混沌程度的加剧, 能量扩散也越明显. 我们还研究了系统的共振失稳, 发现通过调节激光波矢设置合适的初始位置可以控制这种不稳定性, 并讨论了所设初始位置的误差对系统稳定性的影响.

2. 系统的经典运动精确解

文献 [27] 的作者指出, 以 T 为时间间隔周期性开关激光源可以在 iT 时刻产生一系列的单 δ 脉冲. 我们考虑单离子被囚禁于 Paul 阱中, 沿 x 方向引入激光驻波, 但在 iT 时刻开关激光源后紧接着以极短时间间隔 τ 再次开关激光源一次, 此时近似于产生了一系列双 δ (2δ) 脉冲, 脉冲强度正比于 Rabi 频率的平方. 在赝势近似下, 系统的哈密顿量可写为 [24, 25, 28]

$$\bar{H} = \frac{\bar{p}^2}{2m} + \frac{m}{2} \omega_0^2 \bar{x}^2 + \bar{K} \cos(2k\bar{x}) \sum_{i=1}^{\infty} [\delta(\bar{t} - iT) + \delta(\bar{t} - iT - \tau)], \quad (1)$$

(1) 式中 i 为整数, m 为离子质量, \bar{p} 和 \bar{x} 分别为离子动量和坐标, ω_0 为阱频, 与加在 Paul 阱上的直流电压和交流电压以及阱参数有关, k 为激光波矢, $\bar{K} = \hbar\sigma\sqrt{\pi}\Omega_0^2(8\Delta)$ 为 δ 脉冲强度, 其中 Δ 为失谐量, $\sigma \rightarrow 0$ 为脉冲宽度, Ω_0 为 Rabi 频率. 由 σ 的量纲为 $T\Omega$ 和 Δ 的量纲为 T^{-1} , 可知 \bar{K} 与 \hbar 具有相同量纲.

将 (1) 式代入哈密顿正则方程, 可以得到离子在阱中受双 δ 脉冲作用的经典运动方程

$$\ddot{\bar{x}} + \omega_0^2 \bar{x} = \frac{2k\bar{K}}{m} \sin(2k\bar{x}) \sum_{i=1}^{\infty} [\delta(\bar{t} - iT)$$

$$+ \delta(\bar{t} - iT - \tau)]. \quad (2)$$

令 $\bar{t} = Tt$, $\bar{\tau} = T\tau$ 和 $\bar{x} = \frac{x}{2k}$, 得到无量纲化的经典运动方程

$$\ddot{x} + \omega^2 x = K\omega \sin(x) \sum_{i=1}^{\infty} [\delta(t - i) + \delta(t - i - \tau)], \quad (3)$$

式中 $\omega = \omega_0 T$ 为无量纲频率, 因 \bar{K} 与 \hbar 有相同量纲, $K = \frac{4k^2}{m\omega_0} \bar{K} = 4 \frac{\hbar\bar{K}}{m\omega_0/k}$ 的分子分母均有动量的量纲, 所以 K 为无量纲的脉冲强度, 新的变量 t , τ 和 x 也是无量纲的, 且 $\tau \ll 1$.

下面我们分两种情况对方程 (3) 的解进行分析:

1) 在时间区间 $i-1+\tau < t < i$, 方程 (3) 因为右边等于 0 而成为简谐运动方程

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (4)$$

方程 (4) 的解为我们熟知的

$$x = A_i \cos(\omega t) + B_i \sin(\omega t), \quad (5a)$$

$$p = \frac{\dot{x}}{\omega} = -A_i \sin(\omega t) + B_i \cos(\omega t), \quad (5b)$$

(5) 式中 p 为无量纲动量, A_i, B_i 为由初始条件决定的积分常数. (5) 式表明, 当 $i-1+\tau < t < i$ 时, 离子作频率为 ω 、振幅为 $\sqrt{A_i^2 + B_i^2}$ 的简谐运动, 但对于不同的时间区间, A_i 和 B_i 为不同的待定常数.

2) 当 $t = iT$ 时, 设 $0 < \epsilon \ll \tau$, 由于位置 x 是连续的, 我们可以得到 i 和 $(i \pm \epsilon)$ 时刻有相同的位置表达式, 即

$$x_i = A_i \cos(\omega i) + B_i \sin(\omega i) \cong x_{i \pm \epsilon}. \quad (6a)$$

此时受激光脉冲作用 $p_{i-\epsilon} \neq p_{i+\epsilon}$, 取

$$p_i = p_{i-\epsilon} = -A_i \sin(\omega i) + B_i \cos(\omega i). \quad (6b)$$

下面利用文献 [29, 30] 中提出的解积分方程的方法, 求给定初始无量纲坐标 x_0 和动量 p_0 时方程 (3) 的精确解. 首先求 (4) 式的两线性无关解

$$X_1 = \sin(\omega t), \quad (7a)$$

$$X_2 = X_1 \int X_1^{-2} dt = -\frac{1}{\omega} \cos(\omega t). \quad (7b)$$

这样我们可以得到在时间区间 $0 < t < i$, 与微分方程 (3) 完全等价的积分方程

$$x = A_0 \cos(\omega t) + B_0 \sin(\omega t) + X_2 \int_{1-\epsilon}^{i-\epsilon} X_1 K\omega \sin(x) \times \sum_{n=1}^{i-1} [\delta(t - n) + \delta(t - n - \tau)] dt - X_1 \int_{1-\epsilon}^{i-\epsilon} X_2 K\omega \sin(x) \sum_{n=1}^{i-1} [\delta(t - n)$$

$$+ \delta(t - n - \tau)] H t, \quad (8)$$

式中 $A_0 = x_0$ 和 $B_0 = p_0$. 利用 δ 函数的性质, 将(7)式代入(8)式, 得到在时间区间 $0 < t < i$ 的精确解

$$\begin{aligned} x = & \left[A_0 - K \sum_{n=1}^{i-1} \sin(\omega n) \sin(x_n) \right. \\ & \left. - K \sum_{n=1}^{i-1} \sin(\omega n + \omega\tau) \sin(x_{n+\tau}) \right] \cos(\omega t) \\ & + \left[B_0 + K \sum_{n=1}^{i-1} \cos(\omega n) \sin(x_n) \right. \\ & \left. + K \sum_{n=1}^{i-1} \cos(\omega n + \omega\tau) \sin(x_{n+\tau}) \right] \sin(\omega t). \quad (9) \end{aligned}$$

它描述了系统在任意时间区间的连续运动状态, 与(5)式比较, 有

$$\begin{aligned} A_i = & A_0 - K \sum_{n=1}^{i-1} \sin(\omega n) \sin(x_n) \\ & - K \sum_{n=1}^{i-1} \sin(\omega n + \omega\tau) \sin(x_{n+\tau}), \quad (10a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_i = & B_0 + K \sum_{n=1}^{i-1} \cos(\omega n) \sin(x_n) \\ & + K \sum_{n=1}^{i-1} \cos(\omega n + \omega\tau) \sin(x_{n+\tau}). \quad (10b) \end{aligned}$$

进一步可得到 A_{i+1} , B_{i+1} 与 A_i , B_i 关系

$$\begin{aligned} A_{i+1} = & A_i - K \sin(\omega i) \sin(x_i) \\ & - K \sin(\omega i + \omega\tau) \sin(x_{i+\tau}), \quad (11a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{i+1} = & B_i + K \cos(\omega i) \sin(x_i) \\ & + K \cos(\omega i + \omega\tau) \sin(x_{i+\tau}). \quad (11b) \end{aligned}$$

再利用(5)式和(6)式即可得到在 $t = i$ 与 $t = i + 1$ 时刻的精确解, 并得到以 2δ 脉冲中的第一个脉冲打开时刻 i 为时间变量的离散映射关系

$$\begin{aligned} x_{i+1} = & x_i \cos(\omega) + p_i \sin(\omega) + K \sin(\omega) \sin(x_i) \\ & + K \sin(\omega - \omega\tau) \sin(x_{i+\tau}), \quad (12a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{i+1} = & -x_i \sin(\omega) + p_i \cos(\omega) + K \cos(\omega) \sin(x_i) \\ & + K \cos(\omega - \omega\tau) \sin(x_{i+\tau}), \quad (12b) \end{aligned}$$

式中 $x_{i+\tau}$ 可以由(6)(9)式和(10)式得出, 具体表为

$$\begin{aligned} x_{i+\tau} = & x_i \cos(\omega\tau) + p_i \sin(\omega\tau) \\ & + K \sin(\omega\tau) \sin(x_i). \quad (13) \end{aligned}$$

从(12)式可以看出, 只要给定初始时刻的位置 $x_0 = A_0$ 和动量 $p_0 = B_0$, 就可以通过迭代得到任意 i 时刻的运动状态.

3. 囚禁离子的混沌与规则轨道

当一个周期 T 内只开关一次激光光源, 即只有

一列单激光 δ 脉冲作用时, 文献[20]已经对囚禁离子的规则运动和混沌运动还有共振失稳与稳定性控制等进行了较深入地分析. 紧接 i 时刻后的第二个 δ 脉冲的介入必将使囚禁离子的运动变得更加复杂. 由(12)式出发, 利用数学软件 Mathematica 编制迭代程序, 可以画出单个囚禁离子在不同物理参数和初始条件下的相空间轨道图, 并用以对囚禁离子的规则与混沌运动作进一步的研究.

首先考虑囚禁离子相空间轨道随无量纲参数 τ 的变化情况. 因为要求 $\tau \ll 1$, 另外考虑在文献[23]中选取 $\tau \sim 0.01-0.10$, 我们也选取此参数区间进行讨论. 对于参数 $K = 0.280$, $\omega = 0.212$ 和初始条件 $x_0 = 43.92$, $p_0 = 135.0$, 当选取参数 $\tau = 0.1$ 时, 所得图像如图 1(a)所示. 这是一条封闭曲线, 表明囚禁离子作规则运动. 调节参数 τ 值, 逐渐减小到 $\tau = 0.064$, 所得轨道相图一直是封闭曲线, 表明离子在该参数区域一直处于规则运动状态. 随着参数 τ 取值进一步减小, 离子慢慢由规则运动进入混沌运动, 中间没有突变. 图 1(b)为 $\tau = 0.05$ 时的轨道相图, 图像点已经扩散开来, 表明离子已经完全进入混沌状态. 继续减小 τ 值, 到 $\tau = 0.01$ 时, 图像点完全扩散开来, 如图 1(c)所示, 表明囚禁离子混沌运动状态进一步加深, 离子的运动越来越复杂. 值得说明的是, 如果选取 $\tau = 0$, 但脉冲强度减半取 $K = 0.140$, 即囚禁离子只受强度相同的单 δ 脉冲作用时, 所得图像也是封闭曲线, 如图 1(d)所示. 这表明在双 δ 脉冲系统的混沌区域, 单 δ 脉冲作用下的离子运动状态可以是规则的.

从(12)式可以看出, 当参数 $\omega = 2N\pi$, N 为整数, 且 $\tau = 0$, 即单 δ 脉冲作用时, 随着时间的推移, 囚禁离子位置不变, 但动量一直等比增加, 此时囚禁离子发生共振, 从而失去稳定性. 这种共振引起的不稳定性虽然是可以被控制的, 但初始位置的准确调节是比较困难的, 这是文献[20]所讨论的情形. 当第二个 δ 脉冲加入, 同样在 $\omega = 2N\pi$, N 为整数, 情形却完全不同. 下面我们对此进行讨论, 当 $\omega = 2N\pi$ 时(12)式化简为

$$x_{i+1} = x_i - K \sin(\omega\tau) \sin(x_{i+\tau}), \quad (14a)$$

$$p_{i+1} = p_i + K \sin(x_i) + K \cos(\omega\tau) \sin(x_{i+\tau}), \quad (14b)$$

式中 $x_{i+\tau}$ 仍然由(13)式表示, 显然, 如果 $\omega\tau \neq 2M\pi$, M 为整数, 囚禁离子并没有发生共振. 利用(14)式可以画出囚禁离子的相轨道图, 当选取参数 $0 < K \leq 0.83$, $0 < N \leq 20$ 和 $0.01 \leq \tau \leq 0.1$, 选取初始条件 0

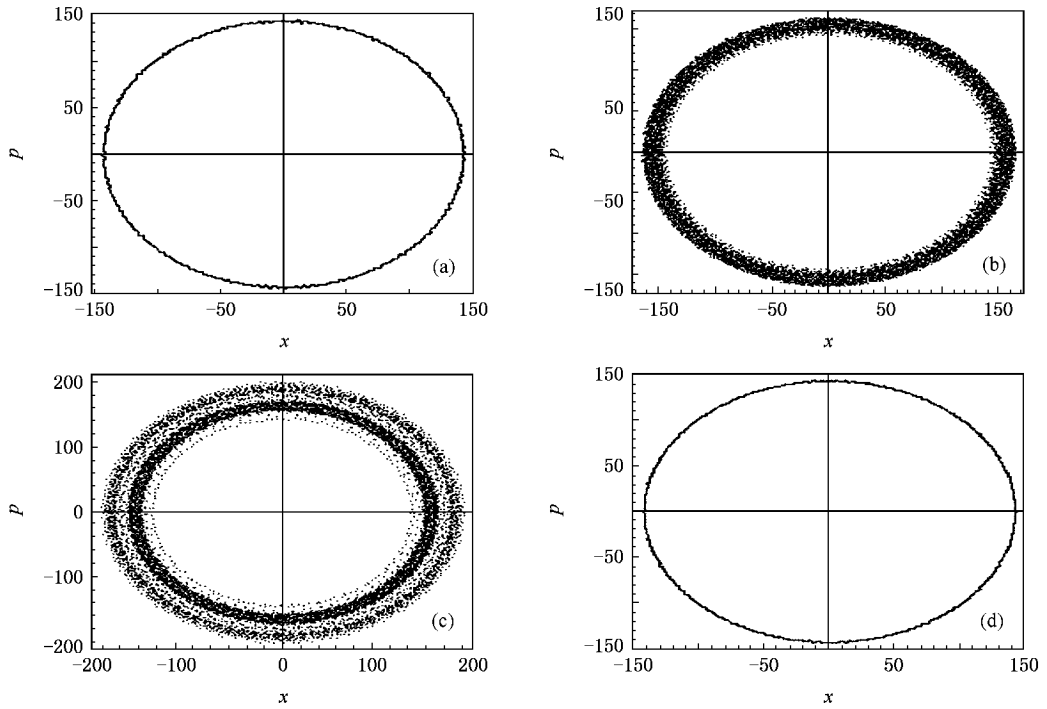


图 1 相空间轨道随参数 τ 的变化(选取参数 $K = 0.280$, $\omega = 0.212$ 和初始条件 $x_0 = 43.92$, $p_0 = 135.0$) (a) $\tau = 0.064$ 图像形成封闭曲线, 此时囚禁离子作规则运动; (b) $\tau = 0.05$, 图像点已经扩散开来, 表明离子完全处于混沌状态下; (c) $\tau = 0.01$, 此时图像点完全扩散开来, 囚禁离子混沌运动状态进一步加深; (d) $\tau = 0$, $K = 0.140$, 此时相当于相同强度的单 δ 脉冲作用, 图像形成封闭曲线, 此时囚禁离子作规则运动

$\leq x_0 \leq 180$ 和 $0 \leq p_0 \leq 180$, 随机画出的相轨道图均是闭合曲线, 而且只局限于某一象限或某两象限的小区域, 由此说明在此参数范围内囚禁离子作规则运动. 图 2(a) 为单 δ 脉冲作用离子共振情形的轨道相图, 其中参数 $K = 0.140$, $\omega = 2\pi$, $\tau = 0$, 初始条件取 $p_0 = 135$, x_0 分别取 $40.0, 41.0, \dots, 48.0$, 从左至右每条直线对应一个初始状态下的轨道相图, 随着脉冲作用次数增加(时间增加), 离子的位置保持不变, 动量和动能一直在增加, 而随着能量和动量振幅

增加, 离子必将失去其稳定性. 图 2(b) 为选取参数 $K = 0.280$, $\omega = 2\pi$, $\tau = 0.05$ 初始条件 $p_0 = 135.0$, x_0 分别取 $40.0, 41.0, \dots, 48.0$ 的轨道相图, 即与图 2(a) 强度相同的 2δ 脉冲作用的轨道相图, 所得图像均是封闭曲线, 表明离子处于规则状态, 且轨道限制在相平面的小区域, 其中最右图对应初始条件 $x_0 = 48.0$. 图 2(b) 显示, 在 $K \leq 0.83$ 时, 在实验允许的范围内, 无论怎样选取其他参数和初始条件均不会出现混沌运动. 但对于同样的 $\omega = 2N\pi$ 情形, 随着参

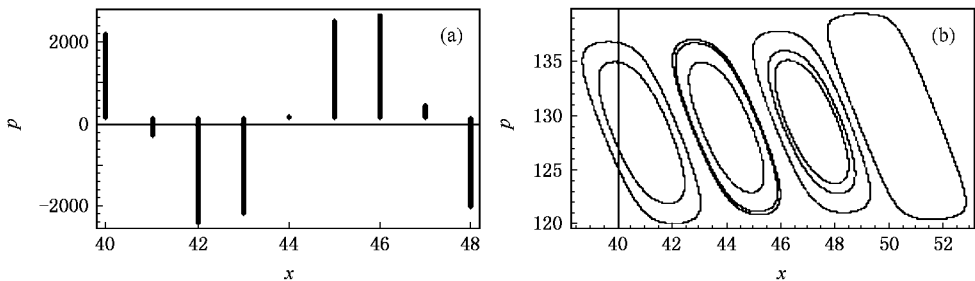


图 2 (a) 选取参数 $K = 0.140$, $\omega = 2\pi$, $\tau = 0$, 即单 δ 脉冲作用离子出现共振时, 初始条件取 $p_0 = 135.0$, x_0 分别取 $40.0, 41.0, \dots, 48.0$ 的轨道相图, 从左至右每条直线对应一个初始状态轨道相图, 离子逐渐失稳; (b) 选取参数 $K = 0.280$, $\omega = 2\pi$, $\tau = 0.05$, 初始条件分别取 $p_0 = 135.0$, x_0 分别取 $40.0, 41.0, \dots, 48.0$ 的轨道相图, 即强度相同的 2δ 脉冲作用离子运动相图, 离子处于稳定的规则运动状态, 且轨道限制在相平面的小区域, 其中最右图对应 $x_0 = 48.0$

数 K 增加, 囚禁离子也将出现混沌运动. 当 $K > 0.83$, 适当选取其他参数, 离子将逐渐失去规则运动而进入混沌运动, 并且随着 K 增大, 混沌程度加深, 如图 3 所示. 这里, 参数取为 $K = 3.45$, $\omega = 4\pi$ 和 $\tau = 0.05$, 初始条件 $x_0 = 43.92$ 和 $p_0 = 135.0$, 图像点完全扩散开来, 表明此时囚禁离子进入混沌状态.

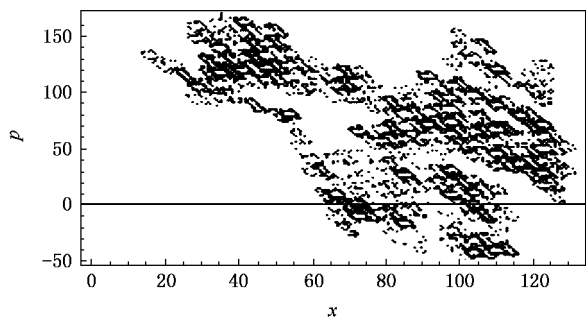


图 3 参数选取 $K = 3.45$, $\omega = 4\pi$ 和 $\tau = 0.05$, 初始条件 $x_0 = 43.92$ 和 $p_0 = 135.0$. 图像点完全扩散开来, 表明此时囚禁离子进入混沌状态

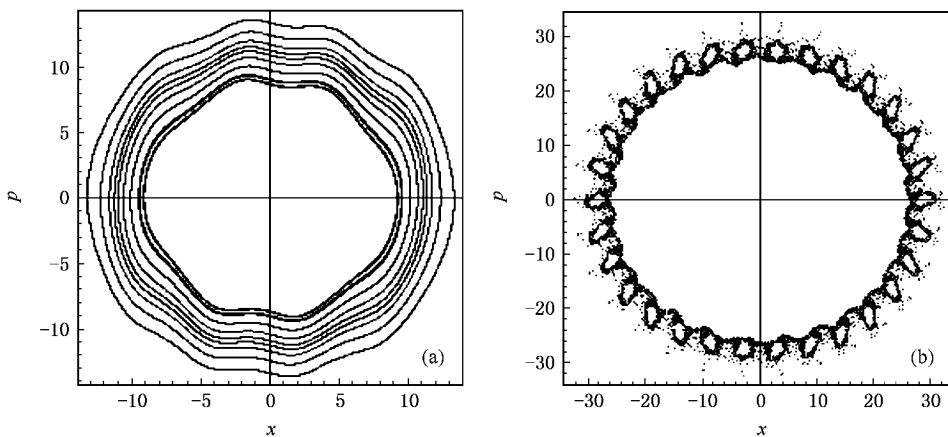


图 4 (a) 从里至外是初始条件取 $p_0 = 9.00$ 和 x_0 分别取 $0, 1, \dots, 9, 10$ 时的 11 个轨道相图, 各轨道互不交叉, 形成闭合曲线, 表明囚禁离子处于规则运动状态. (b) 初始条件取 $p_0 = 9.00$ 和 $x_0 = 24.5$ 的轨道相图, 图像点扩散开来, 表明离子逐渐由周期运动过渡到了混沌运动

4. 囚禁离子的平均能量与共振失稳的控制

在文献 [22] 中, 作者通过比较分析受高斯型单 δ 激光脉冲作用后, 在调节不同无量纲参数时囚禁离子的量子力学平均能量随时间演化与无量纲平均能量 $x^2 + p^2$ 经典演化之间的不同, 发现了离子在一定的参数范围内经典混沌和量子混沌的一些性

我们也研究了 2δ 脉冲作用时, 囚禁离子的运动状态随初始能量的变化情况. 选取参数 $K = 0.280$, $\omega = 0.212$ 和 $\tau = 0.01$, 随机画出一系列的轨道相图, 从相图分析得出, 当初始条件满足无量纲的能量 $\frac{1}{2}x_0^2 + \frac{1}{2}p_0^2 \leq 13.30^2$ 时, 囚禁离子的轨道是封闭曲线, 此时表明囚禁离子处于规则运动状态. 随着初始能量增加, 离子轨道相图逐渐扩散开来, 中间没有突变点, 当 $\frac{1}{2}x_0^2 + \frac{1}{2}p_0^2 \geq 26.0^2$, 轨道完全扩散开来, 表明此时囚禁离子处于混沌状态. 图 4(a) 从里至外是初始条件取 $p_0 = 9.00$ 和 x_0 分别取 $0, 1, \dots, 9, 10$ 时的 11 个轨道相图, 各轨道互不交叉, 分别形成闭合曲线, 表明囚禁离子均处于规则运动状态; 图 4(b) 为初始条件取 $p_0 = 9.00$ 和 $x_0 = 24.5$ 的轨道相图, 初始能量较大, 相应图像点扩散开来, 表明离子逐渐由周期运动过渡到了混沌运动.

质. 在文献 [26] 中, 作者通过研究非囚禁粒子平均能量来比较 2δ -KR 与 δ -KR 之间迥然不同的扩散关系.

与文献 [22, 26] 不同, 本文中囚禁离子受正弦形式的 2δ 激光脉冲作用, 但同样可以用无量纲能量在不同初始条件下的平均^[21] $x^2 + p^2$ 随时间演化来分析囚禁离子的经典动力学性质. 我们选取参数 $K = 0.280$, $\omega = 0.212$, 考虑在 $p_0 = 135.0$, $40.0 \leq x_0 \leq 48.0$ 区域 10 000 个不同初始条件的囚禁单离子, 在选取不同参数 τ 时, 无量纲平均能量随时间的演

化. 图 5(a) 中曲线 1(上)、曲线 2(中)和曲线 3(下)分别是 $\tau = 0.01$, $\tau = 0.05$ 和单 δ 激光脉冲作用时无量纲平均能量随时间演化图. 与图 1 比较发现, 囚禁离子在作混沌运动时, 曲线 1 表明平均能量是随时间逐渐扩散的, 并且随着混沌程度的加深, 扩散也越快. 而在作周期运动时, 图 5(a) 中间的曲线 2 表明, 在两次激光脉冲作用时间间隔较大时, 系统虽然受激光脉冲作用, 能量有所改变, 但从长期的演化来看, 改变幅度不大, 围绕初始能量上下波动. 我们在图 2 中展示了单 δ 脉冲作用于离子出现共振, 而 2δ 脉冲作用于离子却出现规则运动情形的相空间轨道. 现在我们从平均能量演化的角度来解释这一现象. 我们选取单 δ 脉冲作用时的共振频率 $\omega = 2\pi$, 而

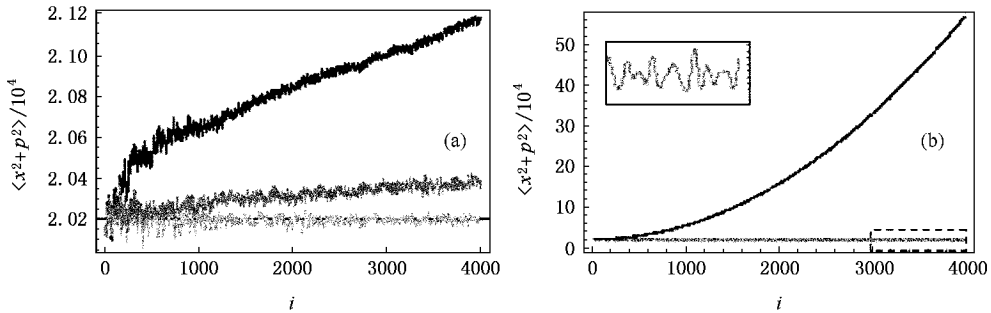


图 5 (a) 参数取 $K = 0.280$, $\omega = 0.212$, 黑色曲线、灰色曲线(中间)和浅灰曲线(最下)分别对应于 $\tau = 0.01$, $\tau = 0.05$ 和单 δ 激光脉冲作用时无量纲平均能量随受击时间 i 的演化. (b) 参数取 $K = 0.280$, $\omega = 2\pi$, 黑色曲线和灰色曲线分别对应 $\tau = 0.05$ 和单 δ 激光脉冲作用时无量纲平均能量随受击时间 i 的演化. 左上角方框内小图是虚框内平均能量大小放大 2000 倍后的变化图

在前面我们讨论了囚禁离子在满足 $\omega = 2N\pi$ 和 $\omega\tau \neq 2M\pi$, N, M 均为整数时, 出现了规则运动, 但是如果是满足 $\omega = 2N\pi$, $\omega\tau = 2M\pi$ 时, 离子的运动状态又将如何? 由 (10) 和 (13) 式可以得到

$$A_i = A_0 = x_0, \quad (15a)$$

$$B_i = B_0 + 2K \sum_{n=1}^{i-1} 1^n \sin(x_0). \quad (15b)$$

由 (15) 式可以看出, B_i 随着 2δ 脉冲的作用迅速等比递增, 从而使离子运动的振幅越来越大, 囚禁离子出现共振. 随着振幅的不断增加, 必将使离子失去稳定性. 但从 (15) 式也可以看出, 如果无量纲初始位置满足 $x_0 = l\pi$, l 为整数时, $B_i = B_0 = p_0$, 于是得到囚禁离子运动的无量纲振幅为

$$\sqrt{A_i^2 + B_i^2} = \sqrt{x_0^2 + p_0^2}. \quad (16)$$

显然, 此时 2δ 脉冲作用不再增加离子运动的能量, 囚禁离子作简谐运动, 实现了对离子的共振不稳定性控制.

且像图 5(a) 一样取其他参数并在 $p_0 = 135.0$, $40.0 \leq x_0 \leq 48.0$ 区域内选取 10 000 个不同初始条件运算, 所得无量纲平均能量随时间的演化关系如图 5(b) 所示. 这里上方的曲线是单 δ 激光脉冲作用下共振情形的平均能量的时间演化, 下方的曲线为 $\tau = 0.05$ 的 2δ 脉冲作用时平均能量的时间演化. 显然, 囚禁离子出现共振时, 平均能量随受击时间逐渐扩散、单调增加. 而第二个 δ 脉冲的作用抑制了共振, 使囚禁离子的平均能量只随受击时间作小范围的上下波动. 在 $i = 3000-4000$ 区间的能量曲线放大后如图 5(b) 中的插图所示. 可见在单 δ 脉冲引起的共振失稳区, 双 δ 脉冲却能导致稳定运动.

在实际实验中, 初始位置的设置可以通过控制离子运动的实际初始位置和调节激光脉冲的波矢 k 的大小来实现, 但难免存在误差. 我们现在考虑无量纲初始位置 x_0 偏离不稳定性控制的理想位置 $l\pi$ 的误差为 Δx , 即 $\Delta x = x_0 - l\pi$ 时, 在 i 时刻 B_i 相对于初始 B_0 的改变 $\Delta B = B_i - B_0$. 如果 $\Delta x < 0.01$, 显然 $\sin(l\pi + \Delta x) \approx \Delta x$. 由 (15) 式可以得到在 i 时刻的偏离

$$\Delta B = 2K(i-1)\Delta x. \quad (17)$$

由 (17) 式可以得出, ΔB 与脉冲作用次数(即时间 t) 成正比, 将随时间增长而趋于无穷大. 如果要阻止振幅的无限增长, 除非激光脉冲的开关次数有限, 或者 $\Delta x = 0$, 即通过调节隐含在 $x_0 = 2kx_0$ 中的波矢准确地设置无量纲初始位置.

5. 结论与讨论

在 2δ 脉冲和单 δ 脉冲作用两种情形, 囚禁粒子

有许多不同的物理性质.近年来,对 2δ 脉冲与粒子相互作用物理现象的研究逐渐增加.在离子阱中实现 2δ 脉冲与囚禁离子的相互作用,是一个实验可操作的有用的方案.本文考虑的 2δ 脉冲,只需在文献 [27] 的系统中按原来的周期每次开关激光脉冲后迅速再开关一次激光源即可得到.本文研究 2δ 脉冲作用下囚禁单离子的规则与混沌运动性质.为讨论问题的方便,我们对经典运动方程做了无量纲化处理,但参数的选择和初始条件的设置参考了已有文献的数据,因而是符合实验条件的.利用积分方程方法,我们得到系统的经典运动精确解,包括任意时间区间的连续运动态和以 2δ 激光脉冲中第一个激光脉冲打开时刻为时间变量的离散映射关系.利用该精确解和数值方法,我们作出了在不同参数值和不同初始条件下的相空间轨道,计算了不同 2δ 脉冲时间间隔 τ 下平均能量随时间的演化关系.结合

分析与数值结果,我们得到囚禁离子在 2δ 脉冲下规则运动和混沌运动的参数区域.我们得到的结果有,在 2δ 脉冲间的时间间隔 $0.01 \leq \tau \leq .01$ 区间,随着 τ 的减小,系统逐渐由规则状态进入混沌状态;在 δ 脉冲作用下的囚禁离子处于共振失稳时, 2δ 脉冲作用下的囚禁离子却可以处于规则运动状态,而且在脉冲强度较大时仍是如此;当初始条件满足无量纲的能量 $\frac{1}{2}x_0^2 + \frac{1}{2}p_0^2 \leq 13.30^2$ 时,囚禁离子处于规则运动状态,囚禁离子平均能量的扩散随着其混沌程度的加深而加剧.此外,我们也得到系统共振失稳时参数所需满足的条件.为实现对共振不稳定性控制,初始位置与激光波矢必须设置合适.我们期待利用现有的离子阱技术,实验观测这些新的动力学现象.

- [1] Neuhauser W ,Hohenstatt M ,Toschek P E , Dehmelt H 1980 *Phys. Rev. A* **22** 1137
- [2] Leibfried D , Blatt R ,Moneroe C , Wineland D 2003 *Rev. Mod. Phys.* **75** 281
- [3] Heinzen D J , Wineland D J 1990 *Phys. Rev. A* **42** 2977
- [4] Wu Y , Yang X X ,1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 3086
de Matos Filho R L , Vogel W 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 608
Wu Y 2001 *Phys. Rev. A* **63** 052303
- [5] Feng M ,Hai W H ,Zhu X W ,Gao K L ,Shi L 2000 *Chin. Phys.* **9** 250
Feng M , Wang X G 2002 *J. Opt. B : Quantum Semi-class. Opt.* **4** 283
Fang X M ,Feng M ,Shi L ,Gao K L , Zhu X W 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 2160 (in Chinese) [方细明、冯 芒、施 磊、高克林、朱熙文 1997 物理学报 **46** 2160]
- [6] Cirac J I ,Blatt R , Parkins A S , Zoller P 1994 *Phys. Rev. A* **49** 1202
- [7] Protzenko E ,Reymond G ,Schlosser N , Grangier P 2002 *Phys. Rev. A* **66** 062306
- [8] Lan H J , Yang Q Y , Wei L F 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1730 (in Chinese) [蓝海江、扬庆怡、韦联福 2002 物理学报 **51** 1730]
- [9] Sasura M , Buzek V 2001 *Phys. Rev. A* **64** 012305
- [10] Steane A , Roos C F ,Stevens D , Mundt A ,Leibfried D ,Schmidt-Kaler F , Blatt R 2000 *Phys. Rev. A* **62** 042305
Nagerl H C , Leibfried D ,Rohde H ,Thalhammer G ,Eschner J , Schmidt-Kaler F , Blatt R 1999 *Phys. Rev. A* **60** 145
- [11] Fang M , Liu X 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2363 (in Chinese) [方卯发、刘 翔 2001 物理学报 **50** 2363]
- [12] Wineland D J ,Bollinger J J ,Itano W M ,Moore F L , Heinzen D J 1992 *Phys. Rev. A* **46** R6797
- [13] Chen Y ,Qi C H , Han F M 2005 *Chem. J. Chinese Universities* **26** 1828 (in Chinese) [陈 勇、祁春华、韩凤梅 2005 高等学校化学学报 **26** 1828]
- [14] Shi L ,Duan Y W ,Feng M , Zhu X W , Fang X M 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 1248 (in Chinese) [施 磊、段宜武、冯 芒、朱熙文、方细明 1998 物理学报 **47** 1248]
- [15] Hai W H ,Huang S , Gao K 2003 *J. Phys. B* **36** 3055
Hai W H ,Feng M ,Zhu X *et al* 2000 *Inter. J. Theor. Phys.* **39** 1405
Wu Y W ,Hai W H ,Cai L H 2006 *Acta Phys Sin.* **55** 583 (in Chinese) [郇云文、海文华、蔡丽华 2006 物理学报 **55** 583]
Wu Y W ,Hai W H 2006 *Acta Phys Sin.* **55** 5721 (in Chinese) [郇云文、海文华 2006 物理学报 **55** 5721]
Cai L H ,Hai W H ,Lu G B 2006 *Chin. Phys.* **15** 2275
- [16] Gao K L , Zhu X W 1997 *Physics* **26** 11 (in Chinese) [高克林、朱熙文 1997 物理 **26** 11]
- [17] Jiang Y R , Feng M , Gao K L , Zhu X W 2001 *Chin. Phys.* **9** 202
Cai L H ,Hai W H ,Wu Y W 2006 *Commun. Theor. Phys.* **45** 1089
- [18] Hai W H ,Duan Y W , Zhu X W *et al* 1997 *Acta Phys Sin.* **46** 2117 (in Chinese) [海文华、段宜武、朱熙文等 1997 物理学报 **46** 2117]
- [19] Hai W H ,Duan Y W , Zhu X W *et al* 1998 *J. Phys. A* **31** 2991
Hai W H , Feng M , Zhu X W , Shi L ,Gao K L , Fang X M 1999 *J. Phys. A* **32** 8265
- [20] Li F , Hai W H 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1309 (in Chinese) [李飞、海文华 2004 物理学报 **53** 1309]
Li F , Hai W H , Chong G , Xie Q T 2004 *Commun. Theor. Phys.* **42** 599

- [21] Chen W Q , Hai W H , Li H , Ma Z Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1305 (in Chinese) [陈文钦、海文华、李 辉、马志英 2007 物理学报 **56** 1305]
- [22] Scott A G , Holmes C A , Milburn G J 1999 *Phys. Rev. A* **61** 013401
- [23] Chen Q , Hai K , Hai W H 2007 *Chin Phys.* **16** 3662
- [24] Creffield C E , Hur G , Monteiro T S 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 024103
- [25] Jonckheere T , Isherwood M R , Monteiro T S 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 253003
- [26] Jones P H , Stocklin M M , Hur G , Monteiro T S 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 223002
- [27] Duffy G. J. , Parkins S , Müller T , Sadgrove M , Leonhardt R A , Wilson A C 2004 *Phys. Rev. E* **70** 056206
- Daley A J , Parkins A S , Leonhardt R , Tan S M 2002 *Phys. Rev. E* **65** 035201(R)
- Daley A J , Parkins A S 2002 *Phys. Rev. E* **66** 056210
- [28] Gardiner S A , Cirac J I , Zoller P 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 4790
- [29] Hai W H , Feng M , Zhu X W , Shi L , Gao K L , Fang X M 2000 *Phys. Rev. A* **61** 052105
- [30] Hai W H , Zhu X W , Feng M , Shi L , Gao K L , Fang X M 2001 *J. Phys. A* **34** L79

Regular and chaotic motions of a single Paul-trapped ion interacting with double- δ -kicked pulses^{*}

Chen Wen-Qin^{1,2)} Hai Wen-Hua¹⁾ Song Jian-Wen¹⁾

¹⁾ Department of Physics , Hunan Normal University , Changsha 410081 , China)

²⁾ College of Basic Science , South-China University of Tropical Agriculture , Danzhou 571737 , China)

(Received 30 May 2007 ; revised manuscript received 3 July 2007)

Abstract

We investigate the regular and chaotic motions of a single Paul-trapped ion under the pseudopotential approximation , which interacts with a double- δ -kicked periodic potential. We apply the method of integral-equation to construct the exact solution of the classical equation and use the numerical technique to plot the orbits in phase space and the time evolutions of average energies. Combining the analytical results with the numerical ones , we arrived at two interesting conclusions : Firstly , there are regular stable motions of the double δ -kicked system at variance with the resonance case of the corresponding single δ -Kicked system. Secondly , when the time interval between the double δ pulses becomes shorter , the regular motion of the system becomes chaotic , and the speed of classical diffusion of the average energy is related to the degree of chaos. It is shown that the resonance may lead to loss of stability and the instability can be controlled by adjusting the laser wave vector.

Keywords : double- δ -kicked pluses , trapped ion , exact solution , chaos

PACC : 3280 , 0545

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China(Grant No. 10575034) and the National Key Laboratory of Magnetic Resonance and Atomic and Molecular Physics of China(Grant No. T152504).

† Corresponding author. E-mail : whhai2005@yahoo.com.cn