

# 气泡群的动态物理特性研究<sup>\*</sup>

张阿漫<sup>†</sup> 姚熊亮 李 佳

(哈尔滨工程大学船舶工程学院, 哈尔滨 150001)

(2007 年 10 月 31 日收到 2007 年 12 月 3 日收到修改稿)

假设气泡周围流场为无黏、无旋、不可压缩的理想流体, 建立气泡群相互作用的三维数值模型, 将多极快速傅里叶变换方法(FFTM)与高阶边界元法(HOBEM)相结合求解气泡群的运动, 在达到同样计算精度时显著加快了边界积分方程的求解速度, 可以在合理的时间内模拟气泡群的动态物理特性. 同时为维持气泡群模拟过程中的数值稳定性, 引入了弹性网格技术(EMT), 并用算例验证了数值模型及算法的有效性. 基于建立的数值模型, 研究了不同组合的气泡群之间的相互作用, 模拟和解释了各类气泡运动的物理现象, 讨论了影响气泡群膨胀、坍塌、迁移及射流形成的因素, 旨在为相关多气泡的复杂物理特性研究提供参考.

关键词: 气泡群, FFTM, 射流, 三维

PACC: 4000, 4700, 4710, 4785

## 1. 引 言

研究气泡群之间的相互作用对许多工程应用都有着重要的意义<sup>[1-9]</sup>. 例如, 在电子元件或医学设备的超声波清洗中, 多个气泡伴随着射流产生, 射流指向固体刚性表面以去除异物. 气泡产生以及分布状态的最优或接近最优的状态还有待研究. 类似地, 在冲击波碎石疗法(去除肾结石)的生物医学应用中, 主要作用机理是由壁面附近的坍塌气泡引起的射流产生压力来破碎肾结石. 另外, 水下爆炸气泡射流及其对水中结构的毁伤也是近年来的研究热点. 因此, 研究气泡群的动态特性加深人们对这些领域中相关物理现象的理解. 数值模拟已经证明了边界元法(BEM)是研究多气泡相互作用的复杂现象的一种有效方法, 相应的文献可参考 Blake 和 Gibson<sup>[1]</sup>, Wang 等人<sup>[3,4]</sup>, Zhang 等人<sup>[10]</sup>, Rungsiyaphornrat 等人<sup>[11]</sup>以及其他的文献. 边界元法具有将问题减少一维的显著特征, 也就是说仅需离散气泡与流场域的边界, 这将大大简化了前、后处理以及计算量. 然而传统的边界元法生成满秩的大系数矩阵<sup>[12,13]</sup>, 在迭代过程中需要大小为  $O(N^2)$  的内存. 这就提出了新的挑战同时也促使人们寻找更有效的方法来解决大规模的数值模拟问题, 如  $N$  通常

超过几千的多气泡动力学特性问题.

近几十年发展了大量的快速算法, 包括分级树算法<sup>[14,15]</sup>, 快速多极子方法(FMM)<sup>[16-18]</sup>, 以及以快速傅里叶变换为基础的各种方法, 例如粒子-粒子-粒子-网格(PPPM)法<sup>[19]</sup>, 前修正快速傅里叶变换法<sup>[20]</sup>及最近出现的多极快速傅里叶变换方法(FFTM)<sup>[21,22]</sup>. 之前的这些方法的效率均源于应用多极展开理论和高效分层结构, 正如以快速傅里叶变换为基础的方法, 速度的提升来源于应用快速傅里叶变换算法<sup>[23]</sup>计算离散的卷积. 其他的快速算法还包括应用奇异值分解(SVD)<sup>[24]</sup>、小波变换<sup>[25]</sup>以及快速求解积分方程的多级算法<sup>[26]</sup>等来简化满秩的大矩阵系统.

目前该领域内多数采用快速多极子方法(FMM)或多极快速傅里叶变换方法(FFTM)来提升传统边界元法(BEM)的计算效率. 关于 FMM 与 BEM 相结合公开发表的文献较多<sup>[16-18,27]</sup>. 但是 FMM 与 FFTM 相比, 达到相同数量级的计算精度时, FMM 需要更高阶的展开<sup>[22]</sup>, 需更大的存储空间和更长的计算时间. 而且本文模拟气泡群相互作用的动态过程, 需大量的时间步, 同时为了保证计算过程中的数值稳定性, 对每一步的计算精度要求非常严格. 为此, 本文在求解边界积分方程时, 引入多极快速傅里叶变换法(FFTM), 在保证计算精度时, 显著加快了边界积

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号 50779007) 哈尔滨工程大学校基金(批准号 HEUFT07069)和高等学校博士科学点专项科研基金(批准号: 20070217074)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: amanzhang@gmail.com

分方程的计算速度,可以在合理的时间内模拟气泡群的动态物理特性.进一步,引入弹性网格技术(EMT)<sup>[27]</sup>,维持了气泡群模拟过程中的数值稳定性,同时,为了提高计算精度,采用高阶曲面单元离散气泡边界.由文献[6]可知,使用高阶边界元法(HOBEM)模拟气泡的动态特性有多方面的优越性.在此基础上,本文模拟和解释了各类气泡群相互作用的复杂物理现象.

## 2. 气泡动力学数值模型

### 2.1. 势流模型

假设气泡群处于不可压缩的流场中,进一步假设流体是无旋的,且忽略黏性的影响.因此,引入速度势 $\phi$ ,即流场中任意点的速度向量遵从方程 $\mathbf{u} = \nabla\phi$ .将该方程与连续性方程 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ 联立可得到流体域 $\Omega$ 内满足的拉普拉斯方程

$$\nabla^2\phi = 0. \quad (1)$$

根据 Green 公式,流场 $\Omega$ 内任意点的速度势可以用边界 $S$ 上的速度势和其法向导数表示,利用无穷远处边界条件,边界积分方程可以写成

$$\lambda\phi(\mathbf{x}) = \iint_S \left( \frac{\partial\phi(\mathbf{y})}{\partial n} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \phi(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial n} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right) dS, \quad (2)$$

式中 $S$ 为包括气泡表面在内的边界面, $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 分别是边界上的场点和源点, $\mathbf{n}$ 指向流场域外的法向量, $\lambda$ 为在 $\mathbf{x}$ 点观察流场的立体角, $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{-1}$ 为简单格林函数.

假设气泡内为理想气体,且遵循气体等熵关系,认为气体的压力仅和气泡的初始状态及其体积有关,即气泡内的压力 $P$ 与气泡体积 $V$ 的关系

$$P = P_c + P_0 \left( \frac{V_0}{V} \right)^\gamma, \quad (3)$$

式中, $P_c$ 为可冷凝气体的饱和蒸汽压, $P_0$ 和 $V_0$ 为气泡形成时的初始压力和体积, $\gamma$ 为气体的比热和气体的成分有关,对于 TNT 炸药爆炸产生的水下爆炸气泡<sup>[21]</sup>, $\gamma$ 取 1.25;对于理想气体<sup>[11]</sup>, $\gamma$ 取 1.4.

为使研究工作更具有普遍意义,取一组特征量将所有变量无量纲化,即分别以 $R_m, \Delta P, R_m(\rho/\Delta P)^{1/2}, R_m(\Delta P/\rho)^{1/2}$ 以及 $(\rho g R_m/\Delta P)^{1/2}$ 作为长度、压力、时间、速度势以及浮力的特征量将相应的变量无量纲化,其中 $R_m$ 为在压力为 $P_\infty$ 的无限域流场中气

泡的最大半径, $\rho$ 为流体的密度,压力差为 $\Delta P = P_\infty - P_c$ .本文研究无界流中气泡群的动态特性,这里忽略重力和表面张力的影响,气泡运动的动力学边界条件和运动学边界条件以无量纲形式给出如下:

$$\frac{d\phi}{dt} = 1 + \frac{1}{2} |\nabla\phi|^2 - \epsilon \left( \frac{V_0}{V} \right)^\gamma, \quad (4)$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \nabla\phi, \quad (5)$$

其中 $\epsilon = P_0/\Delta P$ 为无量纲的气泡内初始压力, $\mathbf{x}$ 表示在气泡表面质点的空间位置矢量.方程(1)(4)和(5)构成封闭方程组描述气泡边界的运动.求解方程(1)的基于高阶单元的传统边界元法参见文献[9].方程(4)为非稳态的伯努利方程用于更新气泡运动过程的速度势,方程(5)用于更新气泡的位置.维持计算过程的稳定,必须严格控制每一时间步长<sup>[34]</sup>,以约束每一步气泡边界速度势的改变量,在本文中,选择 $\Delta t$ :

$$\Delta t = \frac{\Delta\phi}{\max \left| 1 + \frac{1}{2} |\nabla\phi|^2 - \epsilon \left( \frac{V_0}{V} \right)^\gamma \right|}, \quad (6)$$

其中 $\Delta\phi$ 为某一常数(6)式中保证气泡表面每个节点的速度势 $\phi$ 在每一时间步的改变量均在 $\Delta\phi$ 以下,本文中 $\Delta\phi$ 的改变量选择在 0.003 左右,通过计算发现用此时间步时求解过程是稳定的.

### 2.2. 多极近似展开与边界积分方程

多极展开基于 Greengard 和 Rokhlin<sup>[16,17]</sup>在应用快速多极子法时推导的多极变换理论,是计算由源引起的远场势的一种近似方法.下面将简短描述多极近似技术在本文中的应用,关于多极子展开理论的详细内容可参见文献[17,28].

#### 2.2.1. 多极展开理论

假设将 $O$ 点附近,半径为 $a$ 的球面 $S_a$ 离散成一系列边界单元 $n_e$ ,在每个边界单元上分布源和偶极,分别对应于方程(1)中的第一项积分与第二项积分.另有 $O^*$ 点附近且半径为 $b$ 的离散球面 $S_b$ 上存在场点 $\mathbf{x}$ ,那么 $S_a$ 上的系列边界单元 $n_e$ 对点 $\mathbf{x}$ 的单层势和双层势可分别采用方程(7)和方程(8)计算得到.

$$\Phi_{\text{exact}}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n_e} \int_{\hat{I}_j} \frac{\partial\phi(\mathbf{y})}{\partial n} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} dI(\mathbf{y}), \quad (7)$$

$$\Phi_{\text{exact}}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n_e} \int_{\hat{I}_j} \phi(\mathbf{y}) \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} dI(\mathbf{y}), \quad (8)$$

式中  $\hat{\Gamma}_j$  表示离散的边界元. 接下来, 将进一步描述如何应用多极展开来近似求解方程 (7) 和 (8) 中的积分. 现假定  $O$  和  $O^*$  之间的相对距离远大于  $(a + b)$ , 那么方程 (7) 和 (8) 中的速度势可由局部展开近似为

$$\Phi_{\text{multipole}}(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{p_{\text{exp}}} \sum_{k=-j}^j L_j^k Y_j^{-k}(\theta^*, \varphi^*) r^{*j}, \quad (9)$$

式中  $p_{\text{exp}}$  是级数展开截止时的阶数  $(r^*, \theta^*, \varphi^*)$  是  $\mathbf{x}$  相对于  $O^*$  点的位置坐标,  $Y_n^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}} P_n^{|m|}(\cos\theta) e^{im\varphi}$  是  $n$  次  $m$  阶的球面谐调函数, 其中  $P_n^{|m|}(\cos\theta)$  是与第一类 Legendre 函数相一致的. 局部展开系数  $L_j^k$ , 由定义在  $O$  点的多极矩  $M_n^m$  源在点  $O^*$  产生的势梯度, 可由下式求得:

$$L_j^k = \sum_{n=0}^{p_{\text{exp}}} \sum_{m=-n}^n i^{|k-m|-|k|+|m|} \frac{A_n^m A_j^k Y_{j+n}^{m-k}(\alpha, \beta)}{(-1)^{j+n} A_{j+n}^{m-k} \rho^{j+n+1}} M_n^m, \quad (10)$$

式中  $(\rho, \alpha, \beta)$  表示向量  $(O^* - O)$  的球面坐标,  $i = \sqrt{-1}$  且  $A_n^m = \frac{(-1)^n}{\sqrt{(n-m)!(m+n)!}}$ , 多极矩  $M_n^m$  定义如下:

$$M_n^m = \sum_{j=1}^{n_c} \int_{\hat{\Gamma}_j} \frac{\partial \Phi}{\partial n}(\mathbf{y}) Y_n^{-m}(\theta, \varphi) r^n d\Gamma(\mathbf{y}), \quad (11)$$

$$M_n^m = \sum_{j=1}^{n_c} \int_{\hat{\Gamma}_j} \Phi(\mathbf{y}) \nabla(Y_n^{-m}(\theta, \varphi) r^n) \cdot \mathbf{n} d\Gamma(\mathbf{y}), \quad (12)$$

式中  $(r, \theta, \varphi)$  是向量  $\mathbf{y}$  相对  $O$  点的球坐标. 方程 (11) 和 (12) 是将一系列连续的面源转换为定义在球面  $S_u$  中心的离散的点源. 联立方程 (9)–(12) 可实现多极快速傅里叶变换法 (FFTM).

### 2.2.2. 多极展开式和边界积分方程的关系

在这一部分, 将建立多极展开与边界积分方程 (1) 之间的联系, 必须指出的是二者之间的联系只有在采用迭代算法<sup>[12,13]</sup>时才能建立起来. 本文采用 GMRES 迭代方法, 在此方法中, 每步迭代过程中均需计算跨越求解空间的 Krylov 子空间矢量  $\mathbf{v}$ , 其形式为  $\mathbf{v} = [A] \bar{\mathbf{u}}$ , 式中  $[A]$  来自边界积分方程 (1) 的满秩系数矩阵,  $\bar{\mathbf{u}}$  是计算过程的初始估计值. 显然这个满秩矩阵矢量的乘法是一个  $O(N^2)$  的操作, 在求解大规模问题时其计算是相当困难的. 现在, 多极展开恰是用来加速求解的一种近似方法. 即在用方程 (1) 计算所有节点  $\mathbf{x}$  的势场时, 采用多极展开近似

计算距  $\mathbf{x}$  足够远的单元对远场势能的贡献, 而对于那些距  $\mathbf{x}$  较近的单元的贡献则可用传统边界元法进行处理. 换言之, 即用多极展开方法计算较远单元对势的贡献可以节省大量时间.

现存在两种方法用来计算边界积分方程 (1) 的多极近似快速算法即为快速多极子方法 (FMM)<sup>[16–18]</sup> 与近期的多极快速傅里叶变换法 (FFTM)<sup>[21,22]</sup>. 快速多极法 (FMM) 采用了一种反复应用多极和局部展开的系统化分层程序, 而多极快速傅里叶变换法 (FFTM) 则应用快速傅里叶变换将复杂的多极到局部的转换操作化作为一系列离散卷积来计算. 但是, 如引言中所述, FMM 与 FFTM 相比, 达到相同数量级的计算精度时, FMM 需要更高阶的展开<sup>[22]</sup>, 需要大得多的存储空间和计算时间. 为此, 本文在求解边界积分方程时, 引入多极快速傅里叶变换法 (FFTM), 在保证计算精度时, 显著加快了边界积分方程的计算速度.

### 2.2.3. 迭代算法中的初始估计值

模拟气泡动力学问题需要大量的时间步, 通常依据方程 (6) 选择的时间步长是相当小的, 以避免可能出现的数值不稳定性. 既然时间步通常很小, 则连续时间步长间气泡的几何形状和它们表面速度的变化也是很小的. 因此前一时间步长的结果可以为下一时间步长  $t_1$  提供良好的初始估计值  $\mathbf{v}$ , 如 (13) 式. 式中  $t_{-1}$  和  $t_0$  分别为上一时间和当前时间的的时间步长.

$$\mathbf{v}(t_1)_{\text{guess}} = \frac{t_1 - t_0}{t_{-1} - t_0} \mathbf{v}(t_{-1}) + \frac{t_1 - t_{-1}}{t_{-1} - t_0} \mathbf{v}(t_0). \quad (13)$$

## 3. 结果与讨论

### 3.1. 单个气泡

传统边界元法模拟气泡动态特性的有效性已经被广泛验证<sup>[6–11]</sup>. 为考核多极快速傅里叶变换方法 (FFTM) 与高阶边界元法 (HOBEM) 相结合求解气泡运动的精度, 将此算法应用于模拟无界流中单个气泡的运动, 这种情况气泡的运动亦可以用 Rayleigh-Plesset 方程 (一个简单的常微分方程) 来描述, 方程如 (14) 式, 此常微分方程可用四阶 Runge-Kutta 法精确求解, 气泡沿径向膨胀和收缩, 气泡膨胀的最大无量纲半径为 1.

$$\ddot{R}R + \frac{3}{2} \dot{R}^2 = \epsilon \left( \frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} - 1. \quad (14)$$

假设气泡的初始无量纲半径为  $R_0 = 0.1651$ ,  $\epsilon = 100$ , 取气体的比热  $\gamma = 1.4$ . 初始气泡表面离散为 320 个 6 节点的曲面三角形单元, 分别采用传统的高阶边界元法 (HOBEM) 以及 FFTM 与 HOBEM 联合求解气泡的运动. 时间步设为 0.003, 同时在惠普工作站上 (CPU 频率为 3.2 Hz, 内存为 4G) 计算气泡两个周期的运动, 传统的高阶边界元法需用 CPU 时间为 2720 s, 而采用 FFTM 与 HOBEM 联合求解的时间仅为 533 s, 计算效率提高了 5.1 倍. 气泡运动的半径、径向速度随时间的变化曲线分别如图 1 和图 2 所示.

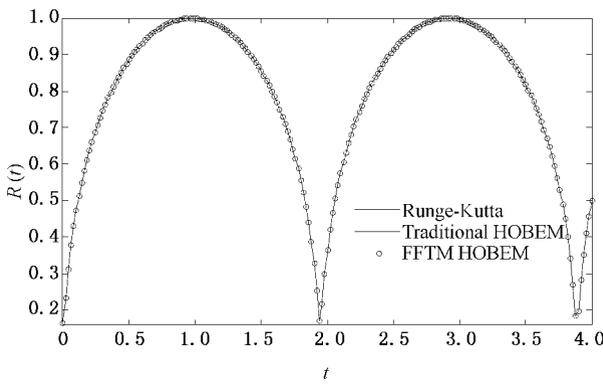


图 1 气泡半径随时间变化的曲线

图 1 和图 2 给出了三种方法计算气泡的运动过程, 从图 1 和图 2 中可以看出, 传统高阶边界元法 (HOBEM) 以及 FFTM 与 HOBEM 联合求解的气泡半径时历曲线与 Runge-Kutta 法求解的精确重合, 最大误差均在 0.5% 以内, 且 FFTM HOBEM 与 HOBEM 之间的最大数值误差在 0.3% 以内. 上述结果表明将

多极快速傅里叶变换方法 (FFTM) 与高阶边界元法 (HOBEM) 相结合求解气泡的运动, 不失计算精度, 但明显加快了边界积分方程的求解速度.

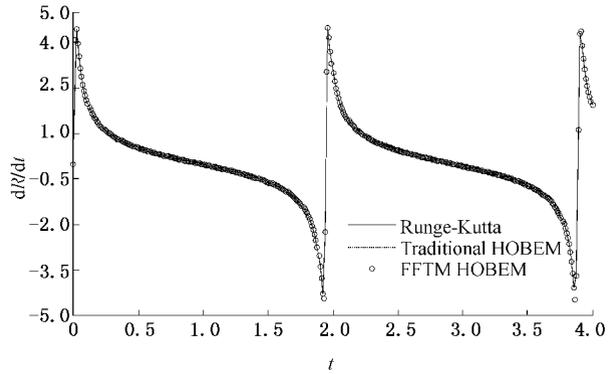


图 2 气泡径向速度随时间变化的曲线

### 3.2. FFTM 计算多个气泡的效率

前一节中已验证了 FFTM 在模拟单个气泡的计算精度和计算效率, 联用 FFTM 的计算速度是传统的高阶边界元法的 5.1 倍. 下面研究用 FFTM 与 HOBEM 联合模拟多个气泡时的精度和效率, 且为维持多个气泡模拟过程中的数值稳定性, 本文引入了弹性网格技术 (EMT)<sup>[27]</sup>, 关于弹性网格技术的详细推导和描述可参考文献 [9, 27]. 这里列举 7 种多气泡工况, 包括 3 个气泡、5 个气泡、7 个气泡、9 个气泡、11 个气泡、13 个气泡以及 15 个气泡. 这些气泡的初始无量纲参数均为  $R_0 = 0.1651$ ,  $\epsilon = 100$ ; 气体的比热为  $\gamma = 1.4$ , 七种实例的气泡中心位置如表 1 所示.

表 1 各个实例气泡的中心位置

(1)	3 个气泡	(0 0 0)(2.5 0 0)(5 0 0).
(2)	5 个气泡	(0 0 0)(2.5 0 0)(5 0 0)(7.5 0 0)(0 2.5 0).
(3)	7 个气泡	(0 0 0)(2.5 0 0)(5 0 0)(7.5 0 0)(0 2.5 0)(0 5 0)(0 7.5 0).
(4)	9 个气泡	(0 0 0)(2.5 0 0)(5 0 0)(7.5 0 0)(0 2.5 0)(0 5 0)(0 7.5 0)(2.5 2.5 0)(2.5 5 0).
(5)	11 个气泡	(0 0 0)(2.5 0 0)(5 0 0)(7.5 0 0)(0 2.5 0)(0 5 0)(0 7.5 0)(2.5 2.5 0)(2.5 5 0)(2.5 7.5 0)(5, 2.5 0).
(6)	13 个气泡	(0 0 0)(2.5 0 0)(5 0 0)(7.5 0 0)(0 2.5 0)(0 5 0)(0 7.5 0)(2.5 2.5 0)(2.5 5 0)(2.5 7.5 0)(5, 2.5 0)(5 5 0)(5 7.5 0).
(7)	15 个气泡	(0 0 0)(2.5 0 0)(5 0 0)(7.5 0 0)(0 2.5 0)(0 5 0)(0 7.5 0)(2.5 2.5 0)(2.5 5 0)(2.5 7.5 0)(5, 2.5 0)(5 5 0)(5 7.5 0)(7.5 2.5 0)(7.5 5 0).

同样, 初始气泡表面均被离散为 320 个 6 节点的曲面三角形单元, 分别采用传统的高阶边界元法

(HOBEM) 以及 FFTM 与 HOBEM 联合求解多气泡的运动. 时间步设为 0.003, 同时在惠普工作站上 (CPU

频率为 3.2Hz, 内存为 4G) 计算. 为了方便分析, 取上述工况的前 100 个分析步, 下面给出这两种方法的前 100 个分析步的计算速度对比曲线, 如图 3 所示.

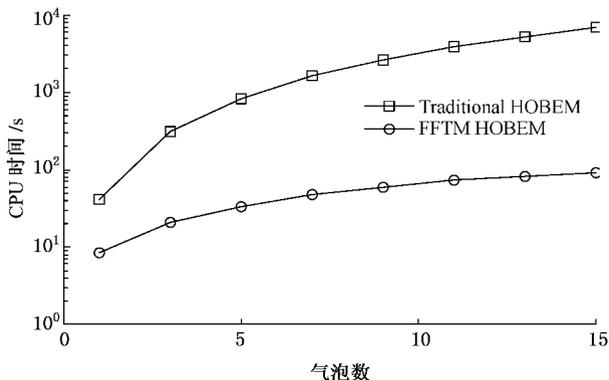


图 3 不同求解方法计算速度对比曲线

图 3 中横坐标为求解的规模, 即气泡的个数, 纵坐标为计算速度, 为对数坐标. 从图 3 中可以看出, 随着问题规模的增大, 多极快速傅里叶变换方法 (FFTM) 的优势越明显. 上述工况的前 100 个步分析中, FFTM 与 HOBEM 联合求解与传统的 HOBEM 之间的最大误差浮动在 0.15% 到 0.32% 之间, FFTM 相对于传统的 HOBEM 计算效率和精度对比如表 2 所示.

从表 2 中可以看出, FFTM 与 HOBEM 相结合求解气泡动力学问题有很高的计算效率和计算精度, 如当气泡数量增至 15 个时, FFTM 的求解速度是传统 HOBEM 的 76.7 倍, 最大误差为 0.27%. 下面基于本文建立的数值模型和方法模拟气泡群相互作用的动态物理特性.

表 2 FFTM HOBEM 相对于传统 HOBEM 的计算效率和精度

气泡的数量	节点数	计算速度提高的倍数	最大误差/%
3	1962	15.3	0.21
5	3210	25.5	0.16
7	4494	35.7	0.23
9	5778	45.5	0.32
11	7062	56.1	0.18
13	8346	66.2	0.15
15	9630	76.7	0.27

### 3.3 气泡群的相互作用

在自然界中可以看到许多存在于流体中的气泡的例子. 这些自然现象可能导致严重的破坏性. 例

如, 气泡可以处于相当剧烈的状态, 且气泡射流是引起船舶螺旋桨破坏的主要原因; 又如水下爆炸产生的大尺度气泡, 在一定的条件下, 水下爆炸气泡射流及坍塌时辐射的压力波对水中结构造成严重的毁伤. 然而, 气泡具有相当破坏性的同时, 同样的现象也可以被有益的利用. 例如, 气泡帷幕可用于减阻降噪, 气泡还可以应用于工程中以增加钻井速度. 因此, 研究多气泡的特性加深人们对这些领域中相关的物理现象的理解. 为研究气泡的动态特性, 下面将给出采用多极快速傅里叶变换方法 (FFTM) 与高阶边界元法 (HOBEM) 相结合模拟多个工况, 这里的模拟计算都是完全三维的, 并且每一个气泡都是用 642 个节点、320 个曲面三角形单元来表示. 为了便于观察, 以下的多数图形均以剖面的形式给出.

**实例 1** 在第一个例子中, 研究在同一时间产生的 3 个气泡, 这些气泡的中心初始都在  $x$  轴上, 无量纲位置为  $(0, 0, 0)$ ,  $(2.5, 0, 0)$ ,  $(5, 0, 0)$ . 每一个气泡的初始值均为  $R_0 = 0.1651$ ,  $\epsilon = 100$ . 三个同相气泡的相互作用如图 4 所示.

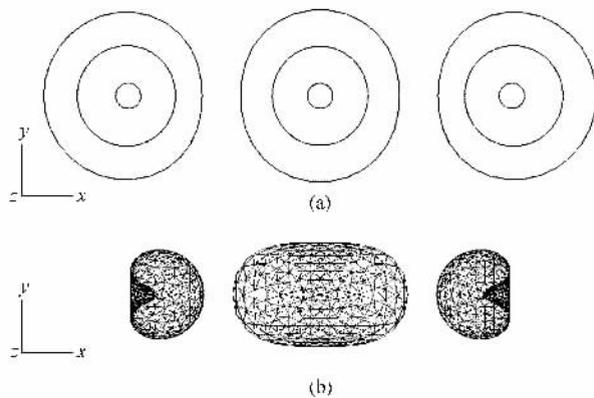


图 4 3 个相同气泡的相互作用 (a) 膨胀阶段的气泡形状 (无量纲时间分别为  $t = 0, t = 0.21, t = 1.24$ ) (b) 气泡处于无量纲时间  $t = 2.52$  时的坍塌阶段

图 4 (a) 显示了膨胀阶段  $z = 0$  剖面上的气泡形状, 无量纲时间为  $t = 0, t = 0.21, t = 1.24$ , 可以看到中间的气泡在  $y$  方向上有轻微的拉长, 外侧的两个气泡被推离中间的气泡. 图 4 (b) 显示坍塌阶段中无量纲时间  $t = 2.52$  时的气泡形状, 这时很明显地看到中间气泡沿  $x$  轴展开, 呈椭球状, 同时外侧的两个气泡被吸引到系统的中心且射流指向系统中心.

**实例 2** 在这个例子中, 考虑在同一时间产生的 3 个气泡, 但是初始半径不同, 即中间气泡的初始半径为  $R_0 = 0.1651$ , 外侧的两个气泡的半径为  $R_0 = 0.2477$ . 如果中间气泡是单个的, 那么它将达到最大

半径1.0;同样,如果外侧的气泡是单个的,那么它将达到最大半径1.5.由于它们可能达到的最大半径,这3个气泡放置地离彼此更远以避免气泡的合并<sup>[11]</sup>.它们的中心位置分别为(0,0,0),(3,0,0)和(6,0,0),气泡相互作用的动态过程如图5所示.

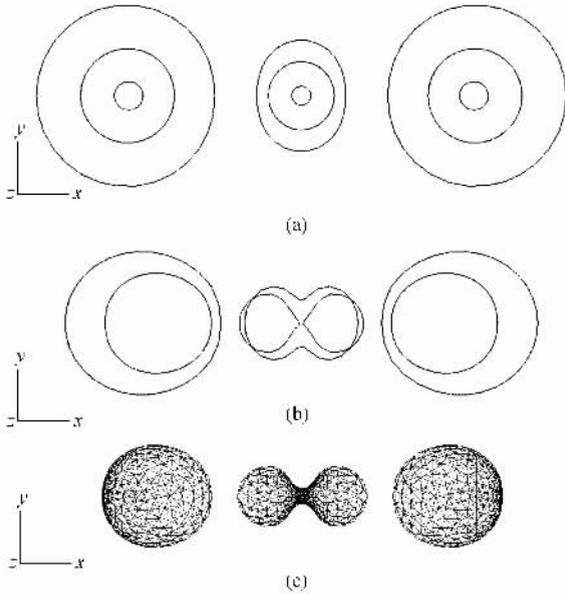


图5 3个异同气泡的相互作用 (a)膨胀阶段的气泡形状(无量纲时间分别为  $t = 0, t = 0.21, t = 1.24$ ) (b)坍塌阶段的气泡形状(无量纲时间分别为  $t = 3.15, t = 3.52$ ) (c)气泡处于  $t = 3.49$  时的坍塌阶段

如图5(a)所示,3个气泡在膨胀阶段以近似球形膨胀,两侧的气泡微小地压缩中间的气泡,反过来又被中间的气泡向外推.由于初始半径不同,在两侧的气泡还处于膨胀阶段时,中间的气泡已开始坍塌,这便产生了与实例1中坍塌阶段完全不同的演变过程.图5(b)显示了外侧气泡处于坍塌的状态,同时处于坍塌阶段的中间气泡在其中部产生了瓶颈现象,瓶颈现象的三维视图如图5(c)所示.从图5(b)中还可以看出在坍塌的最后阶段,中间气泡被撕裂成两个小气泡.此外,与实例1不同,外侧气泡在坍塌阶段的体积变化相对较小,这是由于它们的初始体积较大.

实例3 在这个例子中,布置了在同一时刻初始半径均为  $R_0 = 0.1651$  的四个气泡,气泡中心的无量纲位置分别为(2.5,0,0),(-2.5,0,0),(0,2.5,0)和(0,-2.5,0).注意该实例是后续的两个实例的基础研究,在后续的两个实例中将研究在系统中心另外布置一个气泡产生的效应.

图6(a)显示了气泡完全对称膨胀的阶段,直到它们达到最大半径.然后,气泡开始坍塌,在坍塌阶段,每一个气泡均产生射流,射流指向系统的几何中心,如图6(b)所示.

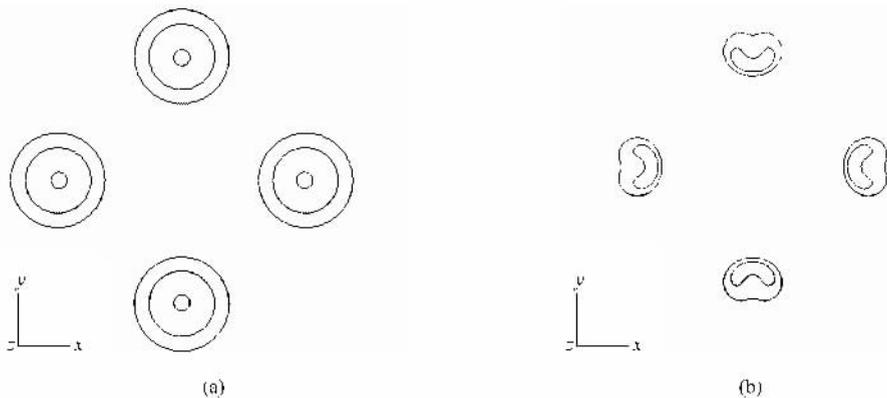


图6 4个气泡的相互作用 (a)膨胀阶段的气泡形状(无量纲时间分别为  $t = 0, t = 0.25, t = 1.01$ ) (b)坍塌阶段的气泡形状(无量纲时间分别为  $t = 2.27, t = 2.36$ )

实例4 此处四个气泡布置与例子3相同,只是同时在系统的几何中心(0,0,0)处布置了第5个气泡.

这5个气泡一直膨胀直到它们到达最大半径,如图7(a)所示.在膨胀阶段,外侧的气泡偏离球形并朝外运动,而中间的气泡几乎还是保持球形.然后外侧的气泡开始坍塌,气泡表面开始变形并产生指

向几何中心的射流,如图7(b)所示.外侧的气泡继续向系统的几何中心运动.通常,4个外侧气泡的动态特性与实例3中的类似.然而,中间气泡的存在减缓了射流的形成以及演化,对比图6(b)  $t = 2.36$  时和图7(b)  $t = 2.64$  时的气泡外形.更有趣的现象是外侧的气泡阻止中间的气泡在坍塌阶段缩小.中间的气泡在  $x-y$  平面呈现菱形而在  $x-z$  平面呈现椭圆形

(见图 7(d)). 远离气泡的环境压力(无量纲值为 1.0)比气泡内的压力(由于过度膨胀,该值远小于 1.0)大得多,这是因为外侧气泡伴随着射流而收缩,另一方面,中间的气泡因四个外侧气泡的存在而被周围的压力遮蔽住,因此要在较长时间后才会坍塌. Chahine<sup>[29]</sup>已经进行过相似的模拟,也显示中间气泡

的改变相比外侧的 4 个气泡是很微小的,外侧 4 个气泡的射流指向几何中心.此外,图 7(c)还显示了气泡在无量纲时间  $t = 2.64$  时形成射流的三维视图,从图 7(c)可以看出,气泡表面网格比较光滑和均匀,这是由于在数值计算过程中引入了弹性网格技术(EMT)<sup>[27]</sup>.

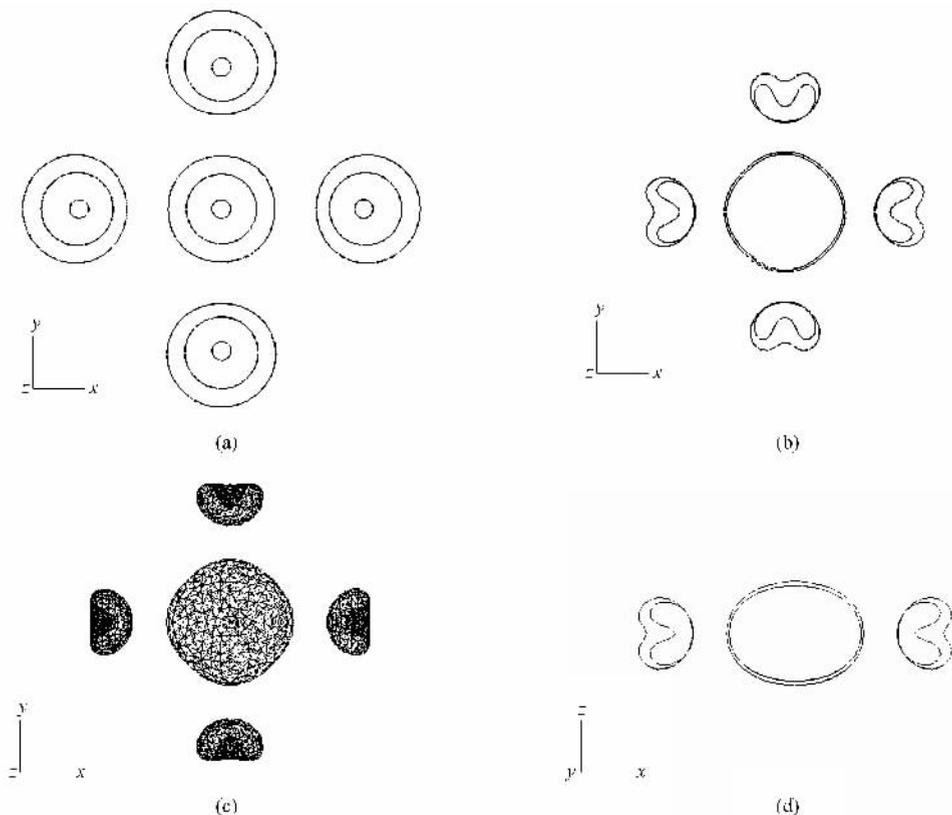


图 7 5 个相同气泡的相互作用 (a) 膨胀阶段的气泡形状(无量纲时间分别为  $t = 0, t = 0.25, t = 1.01$ ) (b) 坍塌阶段的气泡形状(无量纲时间分别为  $t = 2.38, t = 2.64$ ) (c)  $t = 2.64$  时气泡形成射流的三维视图 (d)  $y = 0$  的剖面视图(无量纲时间分别为  $t = 2.38, t = 2.64$ )

**实例 5** 在这个例子中,设置在无量纲时间  $t = 1.0$  时的 5 个气泡,在该时刻外侧的 4 个气泡几乎达到它们的全膨胀状态,如图 8 所示.

图 8(a) 显示无量纲时间  $t = 1.0$  时的气泡形状, 4 个外侧气泡几乎达到它们的最大体积,而第五个气泡仍然处于膨胀阶段的初始阶段.图 8(b) 显示无量纲时间  $t = 1.51$  和  $t = 2.04$  时的气泡形状.很清楚地可以看到中间气泡仍然处于膨胀阶段,虽然气泡形状与早期阶段相比已不再像球形.这是由于存在外侧气泡,而外侧气泡的内部压力很小并对中间气泡的表面有抽吸作用.另一方面,外侧气泡处于坍塌阶段,并随着气泡收缩,液体射流背向系统的中心.这与实例 4 是完全相反的.在实例 4 中,射流指向系统中心.因此,通过这个研究可以看到最内层气

泡的形成时间将决定外侧气泡所产生的射流的方向.

**实例 6** 在接下来的两个例子中,研究 FFM 方法在模拟大尺度问题中的气泡动态特性的适用性.首先,模拟在同一时刻形成的 25 个气泡,每一个气泡都是从初始半径  $R_0 = 0.1651$  开始膨胀,气泡初始参数及气泡中心之间的初始距离与前面的实例类似.气泡群之间相互作用的动态过程如图 9 所示.

图 9(a) 显示了膨胀阶段的气泡形状.除了中间的气泡,所有的气泡都向外侧作微小的运动.在坍塌阶段,位于  $x$  轴和  $y$  轴的最外侧的 4 个气泡迅速变形,形成指向中心的射流.位于对角的 8 个气泡变形速度则小得多,但是仍然在初始阶段有形成射流的趋势.同时,最内侧的 5 个气泡基本上没有变化,如

图 1(b) 所示. 周围相对较高的压力使 12 个外侧气泡的外边界向系统的几何中心运动, 同时内侧的气

泡大致上被这些外侧的气泡遮蔽.

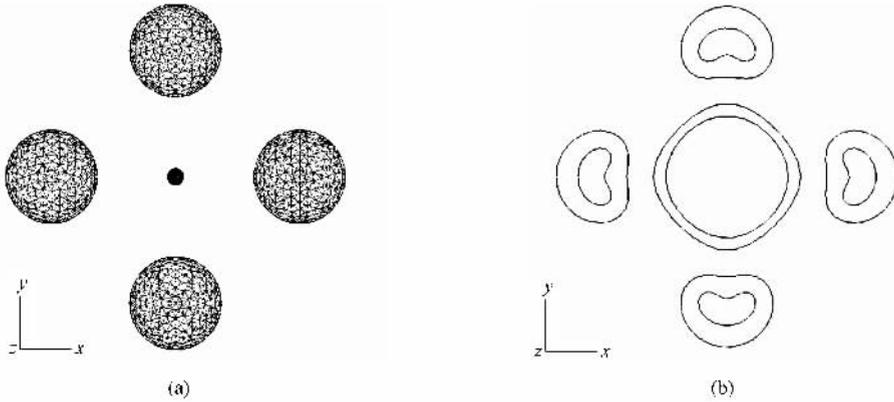


图 8 5 个异同气泡的相互作用 (a) 无量纲时间  $t = 1.0$  时气泡的形状 (b) 处于坍塌阶段气泡形状 (无量纲时间分别为  $t = 1.51, t = 2.04$ )

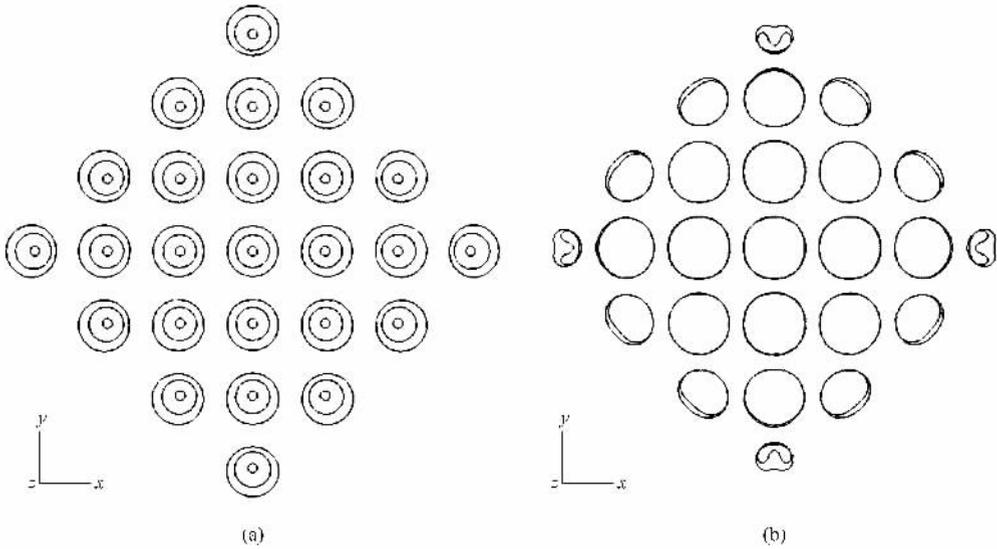


图 9 25 个气泡的相互作用 (a) 膨胀阶段的气泡形状 (无量纲时间分别为  $t = 0, t = 0.29, t = 1.10$ ) (b) 坍塌阶段的气泡形状 (无量纲时间分别为  $t = 2.56, t = 2.77$ )

实例 7 在最后一个例子中, 这里模拟了在同一时间形成的 36 个气泡. 每个气泡都从初始半径  $R_0 = 0.1651$  开始膨胀, 膨胀阶段的 36 个气泡的初始位置和形状在图 10(a) 中显示. 与前面的例子类似, 中间的气泡对称膨胀, 其他气泡稍微向外偏离中心运动且膨胀. 如图 10(b) 在坍塌阶段所示, 外侧的气泡发生变形, 各自产生的射流指向系统的中心. 位于角上的 4 个最外侧的气泡收缩最快, 形成最清晰

向内指向中心的射流. 如图 10(b) 中所示 4 个边上的其余外侧气泡在射流形成时体积收缩, 但是比角上的气泡稍微晚一些. 内侧的气泡体积收缩得更晚. 在无量纲时间  $t = 2.99$ , 内侧气泡仍然相对保持球形. 图 11 放大了在  $(-5, 5, 0)$  附近的 9 个气泡的三维形状. 在例子 6 和 7 中, 可以观察到最内侧气泡的坍塌有很明显的延迟. 如果有更多相互间更接近的气泡同相振动, 这种效应将会更明显.

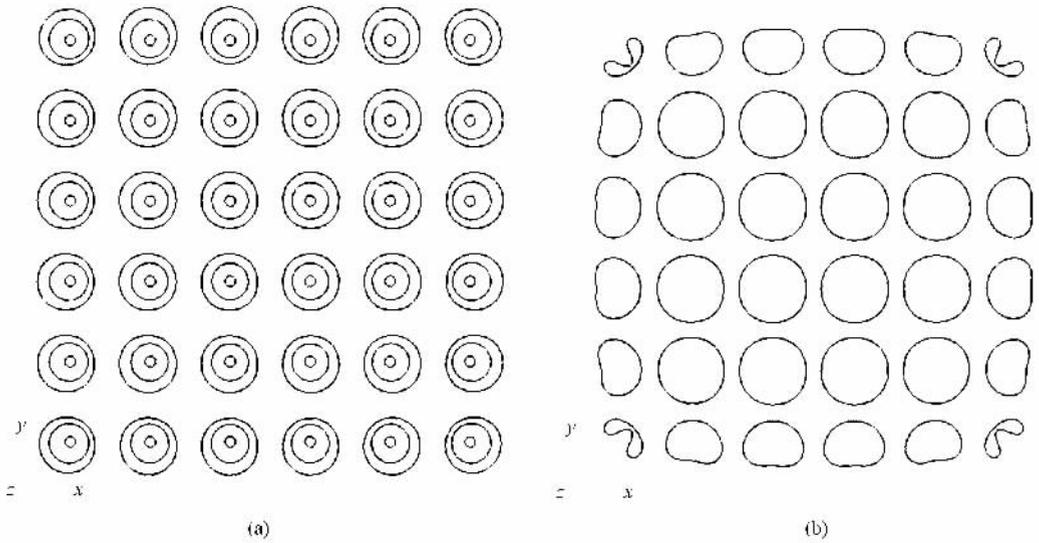


图 10 36 个气泡的相互作用 (a) 膨胀阶段的气泡形状 (无量纲时间分别为  $t=0$ ,  $t=0.29$ ,  $t=1.24$ ) (b) 坍塌阶段的气泡形状 (无量纲时间为  $t=2.99$ )

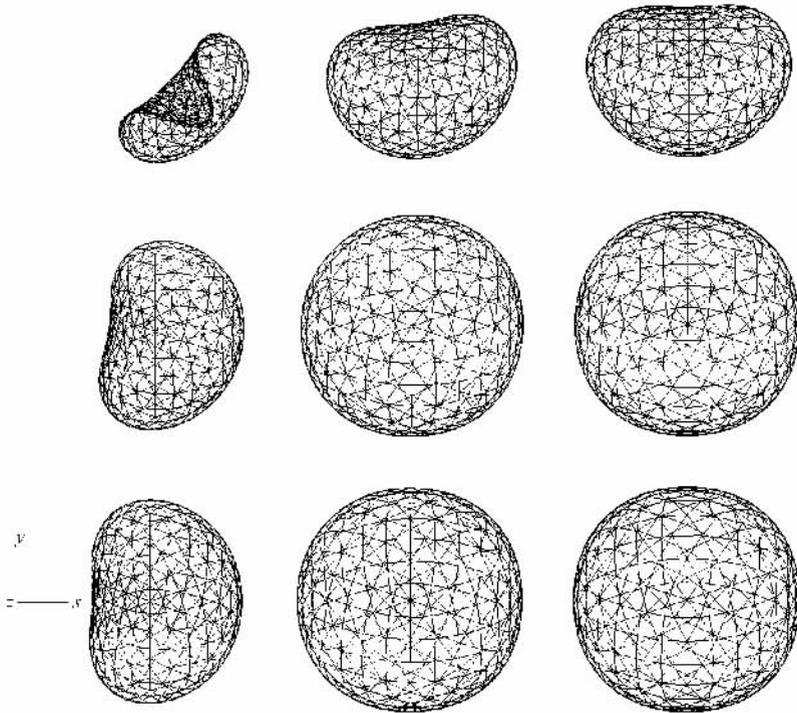


图 11 左上角的 9 个气泡三维视图

## 4. 结 论

本文采用 FFTM 方法与高阶边界元法相结合研究了移动边界问题中的多气泡动态特性,证实了 FFTM 方法在模拟移动边界中的多气泡动力学问题

时是一种准确有效的方法,尤其是当气泡较多时,在以后工作中采用 FFTM 方法研究多气泡问题的复杂物理特性是可行的.

通过对不同组合的多气泡相互作用的动态特性研究,可以发现处于多气泡中心的气泡运动变化缓慢,相对较稳定,最先形成射流的往往是外侧或边缘

的气泡. 随着气泡数的增多, 这种效应更加明显. 此外, 多气泡的射流方向及运动状态, 可能受到中间位

置气泡运动的影响, 即通过调整多气泡中单个气泡的初始状态, 可以改变周围气泡的运动特征.

- [ 1 ] Blake J R , Gibson D C 1981 *J. Fluid Mech.* **111** 123
- [ 2 ] Cole R H 1948 *Underwater Explosion* ( Princeton University Press ) 80
- [ 3 ] Wang Q X , Yeo K S , Khoo B C , Lam K Y 1996 *Theor. Comput. Fluid Dyna.* **8** 73
- [ 4 ] Wang Q X , Yeo K S , Khoo B C , Lam K Y 1996 *Comput. Fluid* **25** 607
- [ 5 ] Gao B , Zhang H H , Zhang C 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 14 ( in Chinese ) 高波、张寒虹、张弛 2003 物理学报 **52** 14 ]
- [ 6 ] Yao X L , Zhang A M 2006 *J. Theror. App. Mech.* **38** 749 ( in Chinese ) 姚熊亮、张阿漫 2006 力学学报 **38** 749 ]
- [ 7 ] Bui T T , Ong T E , Khoo B C , Klaseboer E , Hung K C 2006 *J. Comput. Phys.* **216** 430
- [ 8 ] Blake J R , Gibson D C 1987 *Ann. Rev. Fluid Mech.* **19** 99
- [ 9 ] Zhang A M 2007 *Ph. D. Thesis* ( Harbin Engineering University ) 28 ( in Chinese ) 张阿漫 2007 博士学位论文( 哈尔滨工程大学 ) 28 ]
- [ 10 ] Zhang Y L , Yeo K S , Khoo B C , Wang C 2001 *J. Comput. Phys.* **166** 336
- [ 11 ] Rungsiyaphornrat S , Klaseboer E , Khoo B C , Yeo K S 2003 *Comput. & Fluids* **32** 104
- [ 12 ] Kelley C T 1995 *SIAM Philadelphia* **11** 30
- [ 13 ] Saad Y 1996 *Iterative Methods for Sparse Linear Systems* ( PWS , Boston ) 102
- [ 14 ] Appel A W 1985 *SIAM J. Sci. Statist. Comput.* **85** 103
- [ 15 ] Barnes J , Hut P 1986 *Nature* **324** 446
- [ 16 ] Greengard L , Rokhlin V 1987 *J. Comput. Phys.* **73** 325
- [ 17 ] Greengard L , Rokhlin V 1997 *Acta Numer.* **6** 229
- [ 18 ] Ning D Z , Teng B , Gou Y 2005 *J. Comput. Mech.* **22** 669 ( in Chinese ) 宁德志、滕斌、勾莹 2005 计算力学学报 **22** 669 ]
- [ 19 ] Luty B A , Gunstersun W F 1996 *J. Chem. Phys.* **100** 2581
- [ 20 ] Phillips J R , White J 1997 *IEEE Trans. Comput. Aided Design* **16** 1059
- [ 21 ] Ong T E , Lim K M , Lee H P 2004 *IEEE Trans. Comput. Aided Design* **23** 1063
- [ 22 ] Ong E T , Lim K M , Lee K H , Lee H P 2003 *J. Comput. Phys.* **192** 244
- [ 23 ] Brigham E O 1998 *Prentice-Hall Englewood Cliffs NJ* **11** 23
- [ 24 ] Kapur S , Long D E 1998 *IEEE Comput. Sci. Eng.* **5** 60
- [ 25 ] Levin P L , Spasojevic M , Schneider R 1998 *IEEE Trans. Dielectric Elect. Insulat.* **5** 469
- [ 26 ] Lei T , Yao Z H , Wang H T , Wang P B 2006 *Acta Mech. Sinic* **22** 225
- [ 27 ] Wang C , Khoo B C , Yeo K S 2003 *Computers and Fluids* **32** 1195
- [ 28 ] Epton M , Dembart B 1995 *SIAM J. Sci. Comput.* **16** 865
- [ 29 ] Chahine G L 1994 *Bubble Dynamics and Interface Phenomena* ( Kluwer Academic Publishers , Netherlands ) **195** 206

# The dynamics of bubbles<sup>\*</sup>

Zhang A-Man<sup>†</sup> Yao Xiong-Liang Li Jia

(*School of Shipbuilding Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China*)

(Received 31 October 2007; revised manuscript received 3 December 2007)

## Abstract

The fluid is assumed to be inviscid and incompressible and the flow irrotational. The three-dimensional numerical model is established to simulate the interaction of multiple bubbles and the fast Fourier transform on multipoles (FFTM) method is combined with the higher order boundary method (BEM) to study the physics of multiple bubble dynamics. FFTM method is employed to speedup the solution of the boundary integral equation while achieving the same order of accuracy, enabling to simulate the dynamics of multiple bubbles in a reasonable time. Elastic mesh technique (EMT), which is a new mesh regulation technique, is applied to maintain the regularity of the triangular element mesh used to discretize the dynamic boundary surface during the evolution of bubbles. All these measures make the present approach viable and robust, which is validated by computations of several bubble dynamics problems. Numerical analysis was carried out for the interaction of multiple bubbles and the bubble dynamics. Some physical behaviors of the multiple bubbles are presented in this work. The factors affecting the expansion, collapse, moving of multiple bubbles and the jet formation are also discussed.

**Keywords:** multiple bubbles, FFTM, jet, three-dimensional

**PACC:** 4000, 4700, 4710, 4785

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 50779007) and the Foundation of Harbin Engineering University (Grant No. HEUFT07069) and the Special Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (Grant No. 20070217074).

<sup>†</sup> E-mail: amanzhang@gmail.com