

# 变频率光场与二能级原子的 相互作用:双光子过程\*

李征鸿<sup>†</sup> 于明章 羊亚平

(同济大学物理系,上海 200092)

(2007 年 5 月 13 日收到,2007 年 6 月 19 日收到修改稿)

研究了二能级原子与单模电磁场相互作用时的双光子过程,主要考虑了在相干态初始条件下场频率发生变化时的情况,讨论了场频率随时间作正弦缓慢变化对原子布居数反转、光场压缩与原子压缩等特性的影响.结果显示,场频率的改变将使得原子布居数反转的崩塌回复周期增大,回复值减小,而光场及原子压缩效应减弱.

关键词:布居数反转,光场压缩,原子压缩,双光子过程

PACC:4250,3280

## 1. 引 言

Jaynes-Cummings(J-C)模型描述了二能级原子与单模电磁场的相互作用<sup>[1]</sup>.一方面,J-C模型的数学形式较为简单,可以严格求解,在讨论场的统计性质方面具有良好的可靠性<sup>[2]</sup>;另一方面,在实验上,人们可以利用高  $Q$  因子腔体和里德伯原子来实现这种理想模型<sup>[3]</sup>.因此,在探讨光与物质相互作用等问题中,J-C模型无论是在实验上还是在理论方面均受到广泛地关注<sup>[4-8]</sup>,并揭示了许多量子现象,如拉比振荡<sup>[5]</sup>,原子布居数反转的崩塌和回复<sup>[6]</sup>,光子反聚束效应<sup>[7]</sup>,腔体中场的压缩效应<sup>[8]</sup>等.其中,像拉比振荡,原子布居数反转的崩塌和回复现象也相继在其他量子系统中得到发现和研究<sup>[9]</sup>.随着研究的发展,J-C模型也得到不断地推广.如三能级原子与一个双压缩真空场的相互作用<sup>[10]</sup>,光子腔中的 J-C 模型<sup>[11]</sup>,Kerr 介质中的 J-C 模型<sup>[12]</sup>,外加驱动场控制下的 J-C 模型<sup>[13]</sup>,受驱动的双光子 J-C 模型的非线性动力学演化<sup>[14]</sup>,广义 J-C 模型中的耗散<sup>[15]</sup>等.

本文从双光子 J-C 模型出发,即二能级原子通过双光子跃迁与一单模辐射场的相互作用.同时考虑到场频率发生变化时将会影响原子与场的相互作用以及原子的动力学性质<sup>[16-20]</sup>,探讨了相干态初始

条件下场频率成正弦变化时一个二能级原子与一个单模光场的双光子相互作用,并集中分析了光场的压缩性质和原子压缩性质的变化.

## 2. 模型与运动学方程

考虑二能级原子与单模电磁场的相互作用系统.在双光子过程中,旋波近似下的哈密顿量可以表示为

$$H = \hbar\nu a^\dagger a + \hbar\omega_0 S_3 + \hbar\epsilon(S_+ a^2 + a^{+2} S_-) \quad (1)$$

其中  $a^\dagger, a$  分别是电磁场的产生和湮没算符.原子算符  $S_\pm, S_3$  满足对易关系  $[S_+, S_-] = S_3, [S_3, S_\pm] = \pm S_\pm$ .  $\epsilon$  是原子与电磁场相互作用的耦合系数,  $\omega_0$  为原子的共振跃迁频率,  $\nu$  为电磁场频率.考虑电磁场频率随时间变化,即  $\nu = \nu_0 + f(t)$ ,  $f(t)$  是随时间变化的小量.则耦合系数可以写成  $\epsilon = \epsilon_0 \left(1 + \frac{f(t)}{\nu_0}\right)$ , 也随时间变化.  $\epsilon_0$  为场频率恒定时的耦合常数.任意时刻系统的态矢量  $|\psi(t)\rangle$  为

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n [C_{2,n}(t)|2,n\rangle + C_{1,n}(t)|1,n\rangle], \quad (2)$$

式中  $|2,n\rangle (|1,n\rangle)$  表示原子处于激发态  $|2\rangle$  (基态  $|1\rangle$ ) 光场中有  $n$  个光子.在以下的讨论中,考虑

\* 国家自然科学基金(批准号:10674103)及新世纪人才基金(批准号:NCEF060384)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail:lcaweiniiao@yahoo.com.cn

场频率随时间作正弦变化,即  $f(t) = c \sin \beta t$ ,  $c$  是场频率变化的幅度,  $\beta$  是变化的角频率. 假定原子初始时处于激发态,  $C_{2,m}(0) = C_n(0)$ ,  $C_{1,m}(0) = 0$ , 初始光场处于相干态, 其光子数分布服从泊松分布, 即  $|C_n(0)|^2 = n^n e^{-n} / n!$ . 取平均光子数  $n = 15$ ,  $\omega_0 = 2\nu_0 = 2000\varepsilon_0$ . 将(1)和(2)式代入薛定谔方程, 并令  $C_{2,m}(t) = e^{-i\nu_0 t} e^{-in \int_0^t f(t) dt} e^{-\frac{i}{2}\omega_0 t} M_{2,m}(t)$ ,  $C_{1,m+2}(t) = e^{-i(n+2)\nu_0 t} e^{-i(n+2) \int_0^t f(t) dt} e^{-\frac{i}{2}\omega_0 t} M_{1,m+2}(t)$ , 可得关于  $M_{2,m}(t)$ ,  $M_{1,m+2}(t)$  的运动方程.

$$\begin{aligned} iM_{2,m} &= \varepsilon \sqrt{(n+2)(n+1)} e^{2i\int \cos(\beta t) dt} e^{-i\int \beta t} M_{1,m+2}, \\ iM_{1,m+2} &= \varepsilon \sqrt{(n+2)(n+1)} e^{-2i\int \cos(\beta t) dt} e^{-i\int \beta t} M_{2,m}, \end{aligned} \quad (3)$$

方程组(3)可以用数值方法可以求解. 对于  $c = 0$  时的标准双光子 J-C 模型, 数值解的结果与解析解完全符合.

### 3. 布居数反转、场与原子的压缩性质

#### 3.1. 原子布居数反转

原子布居数反转  $W(t)$  表示原子处于激发态和基态间的概率差, 其表达式为

$$\begin{aligned} W(t) &= \sum_n [ |C_{2,m}(t)|^2 - |C_{1,m}(t)|^2 ] \\ &= \sum_n [ |M_{2,m}(t)|^2 - |M_{1,m}(t)|^2 ]. \end{aligned} \quad (4)$$

图 1 描述了光场频率没有变化时双光子过程中原子布居数反转  $W(t)$  随时间的演化情况. 可以看出  $W(t)$  呈现出周期性的崩塌与回复现象, 其中回复的时间远大于崩塌的时间, 而在衰减区域内呈现拉比振荡. 图 2 至图 4 展示了光场频率作正弦变化时  $W(t)$  随时间的演化性质. 图中可见, 随着时间演化,  $W(t)$  依然出现崩塌回复现象. 对于选取同一参数时, 尽管崩塌回复的整个时间没有变化, 但随着时间的演化, 其中崩塌的时间逐渐增大, 而回复的时间减小. 但随着频率变化幅值  $c$  的增加, 崩塌过程将逐渐增长, 整个崩塌回复的周期增大, 而回复的振幅逐渐减小(比较图 1, 2, 3). 随着时间的推移, 最终导致崩塌不能使原子布居数反转变为零, 便又开始了新的回复过程, 以至于在一段时间后原子布居数反转的振荡不再显示周期性和崩塌回复效应, 而变成了快速的小幅震荡(见图 3, 4). 而正弦变化频率  $\beta$  的改变会造成  $W(t)$  崩塌回复的延迟, 以及减少崩塌的幅度, 减缓崩塌的速率等,  $\beta$  越大, 崩塌的幅度变得

越小, 崩塌的速率越慢(比较图 3, 4).

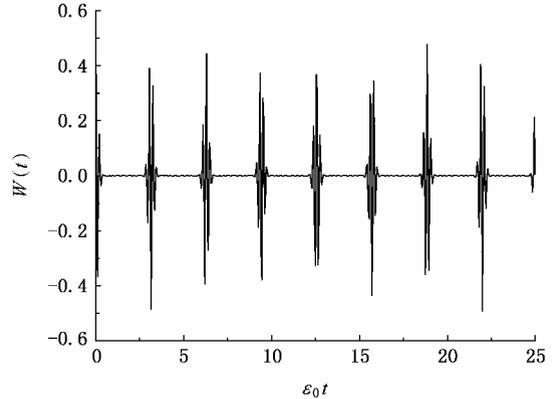


图 1  $n = 15, \Delta = 0, f(t) = 0$  时  $W(t)$  随时间的演化

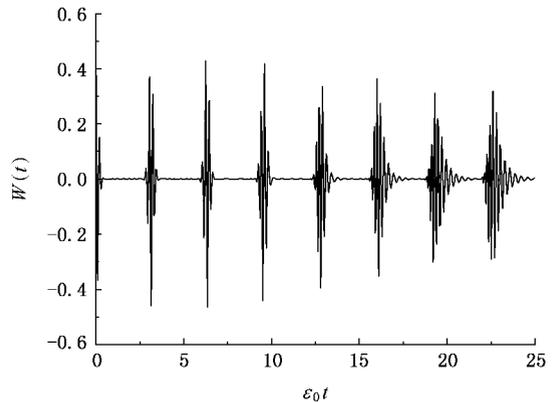


图 2  $c = 0.005\nu_0, \beta = 0.1\varepsilon_0$  时  $W(t)$  随时间的演化

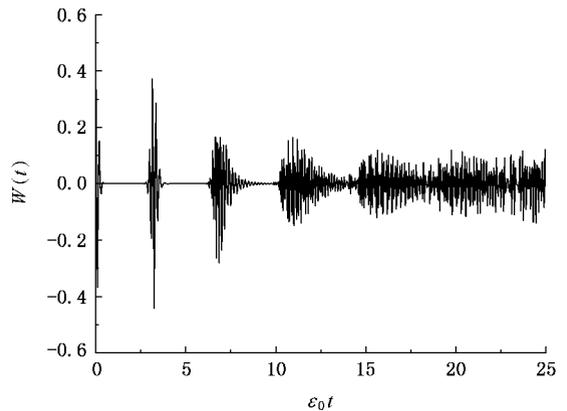


图 3  $c = 0.02\nu_0, \beta = 0.1\varepsilon_0$  时  $W(t)$  随时间的演化

#### 3.2. 光场压缩

光场压缩量  $S_i$  表示为

$$S_i = (\Delta X_i)^2 - 1/4, \quad (5)$$

其中  $X_i$  分别是电场算符  $\hat{E}(t)$  中两个相互正交分量

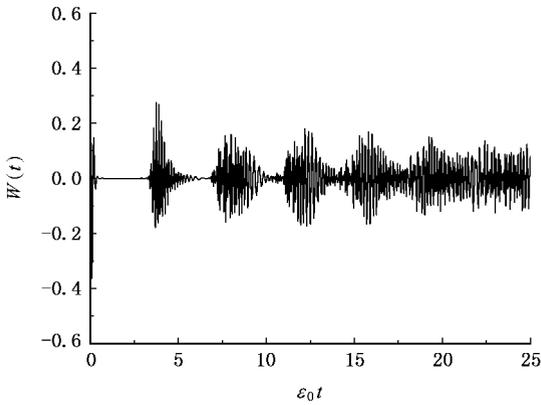


图4  $c = 0.02v_0, \beta = \epsilon_0$ 时  $u(t)$  随时间的演化

算符,  $X_1 = \frac{1}{2} (ae^{i\int_0^t v dt} + a^\dagger e^{-i\int_0^t v dt})$ ,  $X_2 = \frac{1}{2i} (ae^{i\int_0^t v dt} - a^\dagger e^{-i\int_0^t v dt})$ .  $(\Delta X_i)^2$  描述的是光场振幅的量子涨落.  $S_i < 0$  则意味着该光场分量压缩效应的出现. 经计算

$$S_1(t) = \frac{1}{2} \sum_n \{ \text{Re} \{ M_{1,n}^* M_{1,n} + M_{2,n}^* M_{2,n} \} + \sqrt{(n+1)(n+2)} \text{Re} \{ M_{2,n}^* M_{2,n+2} + M_{1,n}^* M_{1,n+2} \} - (\sum_n \{ \sqrt{n+1} \text{Re} \{ M_{2,n}^* M_{2,n+1} + M_{1,n}^* M_{1,n+1} \} \}) \}, \quad (6a)$$

$$S_2(t) = \frac{1}{2} \sum_n \{ \text{Re} \{ M_{1,n}^* M_{1,n} + M_{2,n}^* M_{2,n} \} - \sqrt{(n+1)(n+2)} \text{Re} \{ M_{2,n}^* M_{2,n+2} + M_{1,n}^* M_{1,n+2} \} - (\sum_n \{ \sqrt{n+1} \text{Im} \{ M_{2,n}^* M_{2,n+1} + M_{1,n}^* M_{1,n+1} \} \}) \}. \quad (6b)$$

图5至图8给出了不同参数下,光场压缩量随时间的变化.光场频率没有变化时,  $S_1$  与  $S_2$  随时间作周期性变化,压缩效应不断重复出现(如图5所示).当光场频率发生变化时,  $S_1$  随着时间振荡上升,而  $S_2$  振荡幅值减小,最终二者逐渐趋于一个稳定值.随着频率变化幅值  $c$  的增加,  $S_1$  不再周期性的出现压缩效应,而仅在相互作用的前期出现几次压缩效应.  $c$  越大,压缩效应出现的次数越少(比较图6与图7).而  $\beta$  的增大也使得光场出现压缩的次数减少,如图8所示,此时只能在开始及第一个波谷处观察到  $S_1$  压缩效应.

为了分析外场变化对光场压缩的影响.先来观察标准模型下光场压缩与原子布居数反转之间的关

系(图1与图5).当光子数态与原子相互作用时,原子的布居数反转将出现拉比振荡.  $W(t)$  的崩塌对应着各拉比振荡之间因相位不同而引起相消的一种状态.当  $W(t)$  为零值时,各拉比振荡失去相位关联,致使外界光场也处于无序状态,从而量子涨落比较大.相应  $(\Delta X_i)^2$  较大,  $S_i$  也变大.当  $W(t)$  处于回复最大值时,各拉比振荡的相位相干相长,处于有序状态,因此光场量子涨落较小,相应的  $S_i$  较小,在  $W(t)$  的峰值处,光场压缩处于谷值.随着  $c$  值的增大,  $W(t)$  在一段时间后不能崩塌为零,新的回复过程就开始了,崩塌和回复的轮廓不再清晰,其内部各拉比振荡的总和处于相对稳定的状态.在光场中,其表现为涨落性质也趋于稳定,  $S_1, S_2$  的振荡逐渐改变为趋向于稳定值.

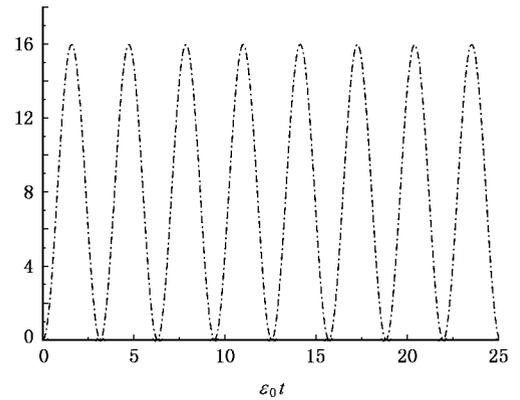


图5  $n = 15, \Delta = 0, f(t) = 0$  时  $S_1, S_2$  随时间的演化(实线为  $S_1$ , 点划线为  $S_2$ )

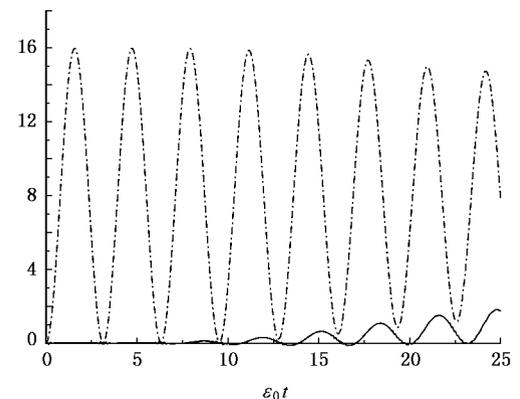


图6  $c = 0.005v_0, \beta = 0.1\epsilon_0$  时  $S_1, S_2$  随时间的演化(图注同图5)

### 3.3. 原子压缩

原子压缩量表示为

$$F_i = (\Delta D_i)^2 - \frac{1}{2} |S_3| \quad (i = 1 \text{ 或 } 2). \quad (7)$$

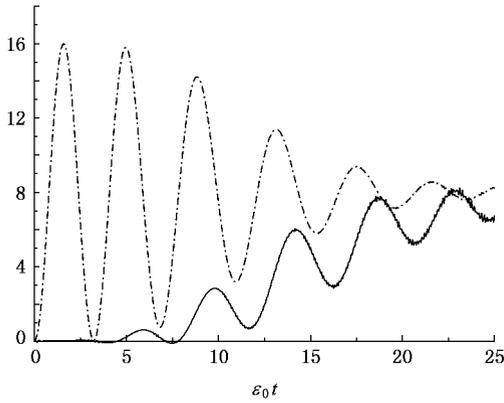


图 7  $c = 0.02v_0, \beta = 0.1\epsilon_0$  时  $S_1, S_2$  随时间的演化(图注同图 5)

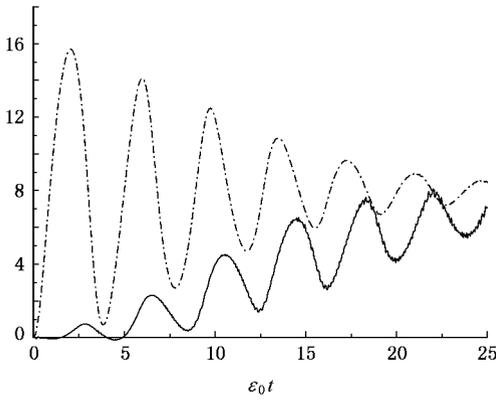


图 8  $c = 0.02v_0, \beta = \epsilon_0$  时  $S_1, S_2$  随时间的演化(图注同图 5)

上式小于零时原子算符的量子涨落被压缩.算符  $D_1$  与  $D_2$  是原子偶极矩的两个正交分量  $D_1 = \frac{1}{2}(S_+ e^{-i\omega_0 t} + S_- e^{i\omega_0 t})$ ,  $D_2 = \frac{1}{2i}(S_+ e^{-i\omega_0 t} - S_- e^{i\omega_0 t})$ .经计算可得

$$F_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left( \sum_n (M_{1,n}^* M_{2,n} + M_{2,n}^* M_{1,n}) \right)^2 - \frac{1}{4} \sum_n (M_{2,n}^* M_{2,n} - M_{1,n}^* M_{1,n}) \quad (8a)$$

$$F_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \left( \sum_n (M_{1,n}^* M_{2,n} - M_{2,n}^* M_{1,n}) \right)^2 - \frac{1}{4} \sum_n (M_{2,n}^* M_{2,n} - M_{1,n}^* M_{1,n}). \quad (8b)$$

原子压缩与原子的布居数反转有着密切的联系.图 9 表示频率没有变化的情况,可以发现  $F_1, F_2$  呈现出周期性.  $F_1$  将不会出现压缩现象,而  $F_2$  周期性地出现压缩现象.压缩出现正对应于布居数反转处于回复最大值处(或者说开始崩塌处).在原子布居数反转崩塌为零的时间域内,各光子数态与原子相

互作用的拉比振荡的不相干,拉比振荡处于无序,原子特性也受到影响,使原子偶极矩的涨落较大.在原子布居数反转的回复部分,而各个拉比振荡处于较强的关联状态,震荡有序,则原子的偶极矩的涨落变小,此时  $F_2$  出现了压缩现象.

图 10 至图 12 给出调制光场变化时的原子压缩曲线.  $c$  的增大使  $W(t)$  回复的幅值减小,表明在回复时各拉比振荡的关联减弱,原子算符  $F_2$  压缩也减弱.随着  $W(t)$  的崩塌回复周期的增大,出现压缩效应的时间间隔也增大.同时随着时间的演化,  $W(t)$  回复的幅值减小,  $F_2$  的压缩效应也逐渐失去.在图 11 中可以发现,在后面的演化过程中  $F_2$  的压缩效应仅出现一次.如图 12 所示,随着调制光场的角频率  $\beta$  的进一步增大,原子压缩曲线的振动幅值进一步减小,以至于除开始时出现  $F_2$  的压缩效应外,其他时间不再出现原子的压缩效应.

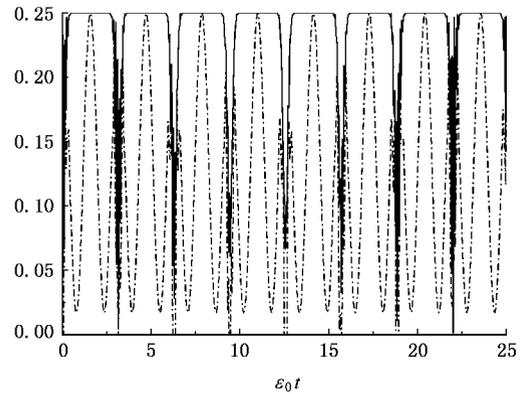


图 9  $n = 15, \Delta = 0, f(t) = 0$  时  $F_1, F_2$  随时间的演化(实线为  $F_1$ , 点划线为  $F_2$ )

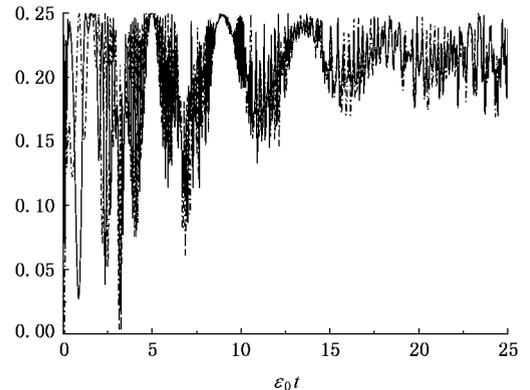


图 10  $c = 0.005v_0, \beta = 0.1\epsilon_0$  时  $F_1, F_2$  随时间的演化(图注同图 9)

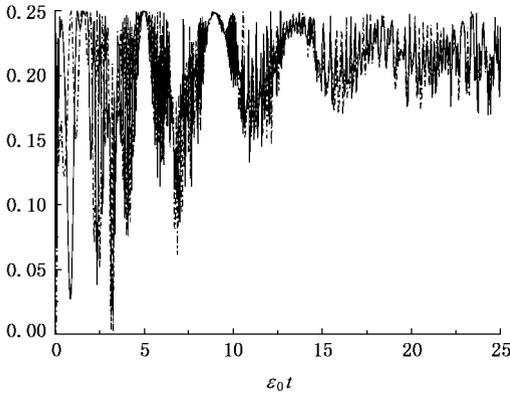


图 11  $c = 0.02v_0, \beta = 0.1\epsilon_0$  时  $F_1, F_2$  随时间的演化(图注同图 9)

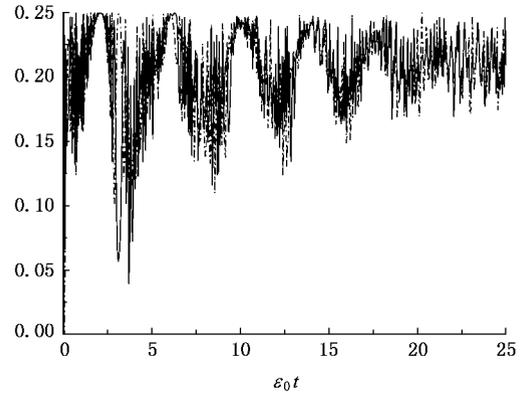


图 12  $c = 0.02v_0, \beta = \epsilon_0$  时  $F_1, F_2$  随时间的演化(图注同图 9)

## 4. 结 论

本工作以双光子 J-C 模型为基础,讨论了作用场的频率作正弦变化时二能级原子与相干态光场的相互作用,主要分析了频率变化对原子布居数反转、场压缩及原子压缩随时间的演化特性的影响。通过

比较发现布居数反转  $W(t)$  的改变特性与光场压缩  $S_1, S_2$  及原子压缩  $F_1, F_2$  变化的特性存在着内在的联系。当场的频率有微小的正弦变化时,场与原子的相互作用使原子的布居数反转发生了改变,进一步引起了场与原子量子涨落的变化,即改变了光场压缩与原子压缩的性质。

- [ 1 ] Jaynes E T, Cummings F W 1963 *Proc. IEEE* **51** 89
- [ 2 ] Joshi A, Ruri R R 1990 *Phys. Rev. A* **42** 4336  
Puri R R, Agarwal A S 1987 *Phys. Rev. A* **35** 3433
- [ 3 ] Yeazell J A, Mallalieu M, Stroud C R Jr 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 2007  
Brune M, Schmidt-Kale F, Maali *et al* 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 1800
- [ 4 ] Kleppner D 1981 *Phys. Rev. Lett.* **47** 233  
Meschede D, Walther H, Muller G 1985 *Phys. Rev. Lett.* **54** 551
- [ 5 ] Eberly J H, Narozhny N B, Sanchez Mondragon J J 1980 *Phys. Rev. Lett.* **44** 1383
- [ 6 ] Knight P L, Radmore P M 1982 *Phys. Lett.* **90** A 342
- [ 7 ] Short R, Mandel L 1983 *Phys. Rev. Lett.* **51** 384
- [ 8 ] Arvinda P K, Guanhuai H 1988 *Physica C* **150** 427
- [ 9 ] Potting S, Cramer M, Zhang W P, Meystre P 2002 *Phys. Rev. A* **65** 63620
- [ 10 ] Lai W K, Buzek V, Knight P L 1991 *Phys. Rev. A* **44** 6043
- [ 11 ] Quang T, Knight P L, Buzek V 1991 *Phys. Rev. A* **44** 6092
- [ 12 ] Joshi A, Puri R R 1992 *Phys. Rev. A* **45** 5056
- [ 13 ] Li F L, Gao S Y 2000 *Phys. Rev. A* **62** 43809
- [ 14 ] Joshi A 2000 *Phys. Rev. A* **62** 43812
- [ 15 ] Budini A A, de Matos Filho R L, Zagury N 2003 *Phys. Rev. A* **67** 33815
- [ 16 ] Janowicz M 1998 *Phys. Rev. A* **57** 4784
- [ 17 ] Yang Y P, Xu J P, Li G X *et al* 2004 *Phys. Rev. A* **69** 053406
- [ 18 ] Xu J P, Yang Y P 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2139 ( in Chinese )  
[ 许静平、羊亚平 2004 物理学报 **53** 2139 ]
- [ 19 ] Jia F, Xie S Y, Yang Y P 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5835 ( in Chinese )  
[ 贾 飞、谢双媛、羊亚平 2006 物理学报 **55** 5835 ]
- [ 20 ] Zhang W J, Wang Z G, Xie S Y, Yang Y P 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 2168 ( in Chinese )  
[ 张婉娟、王治国、谢双媛、羊亚平 2007 物理学报 **56** 2168 ]

# The interactions of a two-level atom with a coherent field of time-varying frequency : the two-photon transition <sup>\*</sup>

Li Zheng-Hong<sup>†</sup> Yu Ming-Zhang Yang Ya-Ping

( *Department of Physics , Tongji University , Shanghai 200092 , China* )

( Received 13 May 2007 ; revised manuscript received 19 June 2007 )

## Abstract

The two-photon transition for a two-level atom interacting with a single-mode electromagnetic field has been investigated. The initial coherent states with time-varying frequency are considered. The effects of the frequency modulation in sinusoidal form on the atomic population inversion and the squeezing properties of the atom and field are studied. The frequency change can lead the collapse-revival period of population inversion to increase , the maximum value of the revival to decrease , and the squeezing effects of the field and atom are weakened.

**Keywords** : atomic population inversion , field squeezing , atomic squeezing , two-photon transition

**PACC** : 4250 , 3280

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China( Grant No. 10674103 ) and Program for New Century Excellent Talents in University ( Grant No. NCEF060384 ).

<sup>†</sup> E-mail :caiweiniaoy@yahoo.com.cn