第 57 卷 第 4 期 2008 年 4 月
1000-3290/2008/57(04)/1998-08

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.57, No.4, April, 2008
©2008 Chin. Phys. Soc.

三类非完整变分下的约束运动微分方程*

赵　[1)]　郭永新[2)†]　刘　畅[3)]　刘世兴[2)]

1)(沈阳药科大学基础学院,沈阳　110016)

2)(辽宁大学物理学院,沈阳　110036)

3)(北京理工大学理学院,北京　100081)

(2007 年 4 月 4 日收到;2007 年 11 月 23 日收到修改稿)

在分析三类不等价的非完整变分,即 vakonomic 变分、Suslov 变分和 Hölder 变分的基础上,利用 Lagrange 乘子法和稳定作用量原理,讨论非线性非完整约束系统在这三类变分下的运动微分方程,论证了这三类微分方程等价的条件.作为一般约束系统的特例,得到了仿射非完整约束系统的运动微分方程.最后借助两个实例验证了结论的正确性.

关键词:非完整约束,Chetaev 条件,vakonomic 动力学,Lagrange 乘子法

PACC:0320

1. 引　　言

分析力学在物理学、力学乃至工程技术领域有着极其广泛的应用[1—5].在处理约束系统问题时,包括外界对系统的约束和系统内部各单元之间的作用,分析力学发挥着最有效的作用.然而,经典分析力学在处理非完整约束系统时却遇到了前所未有的困难[6—12],非完整约束是一类不可积微分约束,所以这类系统一般不能像完整约束系统那样约化为低阶的无约束系统.这类系统的自由度数低于系统的位形坐标数,这就给经典分析力学的应用带来了困难,如何深入研究非完整约束系统自然地成为现代分析力学的研究重点之一.非完整系统依据什么基本原理,采用何种研究方法最为有效都是非完整系统的分析力学即非完整力学所关注的基本问题.对非完整约束系统的研究不仅促进了这类系统自身的理论体系的构建和应用研究的发展,而且也促进了数学方法(如变分法、几何法)的发展[13—24],甚至于开创了新的数学领域(如非完整流形的几何学[18,25,26]).

非完整约束在 Frobenius 定理意义下的不可积性导致非完整约束的实现方式非唯一性,这又进一步导致非完整系统的动力学模型的非唯一性,最具典型的是两种动力学模型——Chetaev 模型和 Vacco 模型(vakonomic 模型).这两种模型分别基于 d'Alembert-Lagrange 微分变分原理和 Hamilton 积分变分原理,在约束不可积情况下这两种模型一般是不等价的[7,13,14,27].在经典非完整力学中,为了得到这两种动力学模型,除了利用上述两个变分原理之外,还采用 Lagrange 乘子法和变分法,并且对变分运算作了特殊的规定[7,14,15,27].例如,Chetaev 模型要求广义坐标的变分运算 δq^i 满足 Chetaev 条件

$$\frac{\partial f^\alpha}{\partial \dot{q}^i}\delta q^i = 0,$$

其中 $f^\alpha(t, q^i, \dot{q}^i) = 0$ 为系统所受到的非完整约束;而 vakonomic 模型则要求变分运算 δ 和微分运算 d 对易以及 $\delta f^\alpha = 0$.研究表明,非完整约束系统的变分运算一般不能同时满足如下三个条件:$\delta f^\alpha = 0$,$[\mathrm{d}, \delta] = 0$,$\frac{\partial f^\alpha}{\partial \dot{q}^i}\delta q^i = 0$.这三个条件在微分约束是可积的情况下或者非完整约束满足一些特殊条件时,才可能同时得到满足.因此,对于非完整约束存在三个不等价的非自由变分,即非完整变分:Hölder 变分 δ_H、Suslov 变分 δ_S、vakonomic 变分 δ_v[14].这三个变分在数学意义上的地位是平等的,而通常在建立 vakonomic 动力学模型时,沿用了完整约束系统的习惯,仅从其中选择了 vakonomic 变分.本文将从数学

* 国家自然科学基金(批准号:10472040)、辽宁省优秀青年科研人才培养基金(批准号:3040005)、教育部留学回国人员科研启动基金(批准号:2004527)、教育部春晖计划(批准号:Z2005-1-21006)和辽宁省教育厅基础研究计划(批准号:05L155)资助的课题.

† 通讯联系人.E-mail:guoyongxin@lnu.edu.cn

角度，探讨在采用积分变分原理和 Lagrange 乘子法过程中，分别运用 Suslov 变分 δ_S 和 Hölder 变分 δ_H 作为变分算子对复合作用量 $\int_{t_1}^{t_2}(L(t,q^i,\dot{q}^i)+\lambda_\alpha f^\alpha)\mathrm{d}t$ 进行变分所得到的结果.为了方便，文中采用爱因斯坦求和约定，并对指标取值范围作如下规定：$s,r=1,2,\cdots,n$；$i,j,k=0,1,\cdots,n$；$\mu,\nu,\sigma,\kappa=1,2,\cdots,m<n$；$\rho,\lambda=0,1,\cdots,m$；$\alpha,\beta=m+1,m+2,\cdots,n$.

2. 非线性微分约束系统的非完整变分

设力学系统的位形流形是一个 n 维光滑流形 Q，$\{q^s\}$ 是其局部坐标，相应的广义速度表示为 $\{v^s\}$. 该系统的增广位形空间可以用流形 M 或 $R\times Q$ 来表示，而相应的状态空间则可以用 1-射丛 J_1M 或接触流形 $R\times TQ$ 来表示.

设 c_q 和 $\bar{c}_q$ 为连接 M 上两个固定点 q_1^s 和 q_2^s 的光滑曲线，考虑一个双参数函数 $q^s(t,\alpha)\in C^2$，它满足

$$q^s(t,0)=q^s(t),$$
$$q^s(t,1)=\bar{q}^s(t),$$
$$q^s(t_1,\alpha)=q_1^s,$$
$$q^s(t_2,\alpha)=q_2^s.$$

我们用 $\mathrm{d}q^s$ 和 δq^s 来分别表示沿任意路径的微分和路径的变分，δq^s 满足固定端点条件

$$\delta q^i\big|_{t_{1,2}}=0. \tag{1}$$

假设系统受到 $n-m$ 个独立的一阶非完整约束

$$f^\alpha(t,q^s,\dot{q}^s)=0, \tag{2}$$

则该系统的自由度为 m.容易验证变分算符 δ 满足如下变分恒等式：

$$\delta f^\alpha+\frac{\partial f^\alpha}{\partial\dot{q}^s}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q^s)-\delta\dot{q}^s\right]-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial\dot{q}^s}\delta q^s\right)=[f^\alpha]_s\delta q^s, \tag{3}$$

其中

$$[f^\alpha]_s=\frac{\partial f^\alpha}{\partial q^s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial\dot{q}^s}\right),$$

并且要求

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{d}\alpha)=0.$$

当约束可积时，下述三个条件可以同时满足：

$$\delta f^\alpha=0, \tag{4a}$$

$$\delta\dot{q}^s-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q^s)=0, \tag{4b}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial\dot{q}^s}\delta q^s\right)=0. \tag{4c}$$

此时的变分是自由变分.条件(4a)式表明约束方程沿着变分向量场不变，说明轨道的变轨也满足约束条件；条件(4b)式表示的微分运算与变分运算对易关系定义了对速度的变分，说明在流形 M 上向量场 v 和 w 的积分曲线可形成闭合的坐标网；条件(4c)式表示约束对流形 J_1M 的直和分解关系[14]沿着运动轨道保持不变，这也是约束对变分的限制条件——Chetaev条件沿着轨道保持不变的关系.

除特殊情况外，一般的非完整约束系统不能同时满足(4a)，(4b)，(4c)式.为此，可以定义下述三类非自由变分运算.

对于 vakonomic 变分，取

$$\begin{aligned}&\delta_v f^\alpha=0,\\&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta_v q^s)-\delta_v\dot{q}^s=0,\end{aligned} \tag{5}$$

则变分恒等式变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial\dot{q}^s}\delta_v q^s\right)=-[f^\alpha]_s\delta_v q^s. \tag{6}$$

对于 Hölder 变分，取

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta_H q^s)-\delta_H\dot{q}^s=0,\\&\frac{\partial f^\alpha}{\partial\dot{q}^s}\delta_H q^s=0,\end{aligned} \tag{7}$$

则变分恒等式变为

$$\delta_H f^\alpha=[f^\alpha]_s\delta_H q^s. \tag{8}$$

对于 Suslov 变分，取

$$\begin{aligned}&\delta_S f^\alpha=0,\\&\frac{\partial f^\alpha}{\partial\dot{q}^s}\delta_S q^s=0,\end{aligned} \tag{9}$$

则变分恒等式变为

$$\frac{\partial f^\alpha}{\partial\dot{q}^s}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta_S q^s)-\delta_S\dot{q}^s\right]=[f^\alpha]_s\delta_S q^s. \tag{10}$$

我们称上述三类非自由变分为非完整变分.由此可见，三种非完整变分等价的充分必要条件是

$$[f^\alpha]_s\delta q^s=0. \tag{11}$$

由于 δq^s 不独立，该条件不等价于 $[f^\alpha]_s=0$.尽管对于某些可积约束系统，$[f^\alpha]_s=0$ 成立，但是 $[f^\alpha]_s=0$ 既不是约束可积的充分条件，也不是约束可积的必要条件.关于约束的可积性与非完整变分之间关系见文献[27].

3. 三类变分下的非线性非完整系统的运动微分方程

利用上述三类非完整等时变分算子,分别作用在如下的复合作用量上:

$$\mathscr{A}=\int_{t_1}^{t_2}[L(t,q,\dot{q})+\lambda_\alpha f^\alpha(t,q,\dot{q})]\mathrm{d}t,\quad(12)$$

其中 λ_α 是 Lagrange 乘子,f^α 是约束函数,L 是正规 Lagrange 函数. 假定复合作用量在这三类变分的作用下稳定,即要求这个作用量在三类等时非完整变分下为零. 因此,我们的任务就是从稳定作用量原理出发,研究三类变分所得到的结果. 一个任意的变分算子 δ 作用到上述作用量 $\mathscr{A}$ 上,再利用分部积分法和端点条件(1)式,得到

$$\delta\mathscr{A}=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\left([L]_s+\lambda_\alpha[f^\alpha]_s-\dot{\lambda}_\alpha\frac{\partial f^\alpha}{\partial\dot{q}^s}\right)\delta q^s+\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^s}+\lambda_\alpha\frac{\partial f^\alpha}{\partial\dot{q}^s}\right)\left[\delta\dot{q}^s-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q^s)\right]\right\}\mathrm{d}t,\quad(13)$$

式中

$$[L]_s=\frac{\partial L}{\partial q^s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^s}\right),$$

$$[f^\alpha]_s=\frac{\partial f^\alpha}{\partial q^s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial\dot{q}^s}\right).$$

3.1. 在 vakonomic 变分下的运动微分方程

采用 vakonomic 变分,(13)式可表示为

$$\delta\mathscr{A}=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\left([L]_s+\lambda_\alpha[f^\alpha]_s-\dot{\lambda}_\alpha\frac{\partial f^\alpha}{\partial\dot{q}^s}\right)\delta_{\mathrm{v}}q^s+\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^s}+\lambda_\alpha\frac{\partial f^\alpha}{\partial\dot{q}^s}\right)\left[\delta_{\mathrm{v}}\dot{q}^s-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta_{\mathrm{v}}q^s)\right]\right\}\mathrm{d}t.\quad(14)$$

由于

$$\delta_{\mathrm{v}}\dot{q}^s-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta_{\mathrm{v}}q^s)=0,$$

考虑 $\delta_{\mathrm{v}}q^s$ 的独立性,由(14)式得到 vakonomic 方程

$$[L]_s+\lambda_\alpha[f^\alpha]_s-\dot{\lambda}_\alpha\frac{\partial f^\alpha}{\partial\dot{q}^s}=0.\quad(15)$$

应当注意的是,这里不能在(13)式中运用关系式(6),否则就得到无约束系统的运动方程.

如果采用微分约束显式

$$f^\alpha=v^\alpha-\varphi^\alpha(t,q^s,\dot{q}^\mu)=0,$$

则

$$[f^\alpha]_\beta=-\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial q^\beta},$$

$$\frac{\partial f^\alpha}{\partial\dot{q}^\beta}=\delta^\alpha_\beta,\quad(16)$$

$$[f^\alpha]_\mu=-[\varphi^\alpha]_\mu.$$

此时,vakonomic 方程变为

$$[L]_\beta-\lambda_\alpha\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial q^\beta}-\dot{\lambda}_\beta=0,\quad(17\mathrm{a})$$

$$[L]_\mu-\lambda_\alpha[\varphi^\alpha]_\mu+\dot{\lambda}_\alpha\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial\dot{q}^\mu}=0.\quad(17\mathrm{b})$$

这组方程显然等价于

$$[L]_\beta-\lambda_\alpha\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial q^\beta}-\dot{\lambda}_\beta=0,\quad(18\mathrm{a})$$

$$[L]_\mu+\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial\dot{q}^\mu}[L]_\alpha+\lambda_\alpha T^\alpha_\mu=0,\quad(18\mathrm{b})$$

其中

$$T^\alpha_\mu=-[\varphi^\alpha]_\mu-\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial q^\beta}\frac{\partial\varphi^\beta}{\partial\dot{q}^\mu}.$$

对于嵌入约束的 Lagrange 函数

$$\tilde{L}(t,q^s,\dot{q}^\mu)=L(t,q^s,\dot{q}^\mu,\varphi^\beta(t,q^\gamma,\dot{q}^\nu)),$$

不难验证如下关系:

$$[L]_\mu+\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial\dot{q}^\mu}[L]_\alpha=[\tilde{L}]_\mu+\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial\dot{q}^\mu}\frac{\partial\tilde{L}}{\partial q^\alpha}+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^\alpha}T^\alpha_\mu.\quad(19)$$

将(19)式代入(18b)式,得到嵌入约束的 vakonomic 方程

$$[L]_\beta-\lambda_\alpha\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial q^\beta}-\dot{\lambda}_\beta=0,\quad(20\mathrm{a})$$

$$[\tilde{L}]_\mu+\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial\dot{q}^\mu}\frac{\partial\tilde{L}}{\partial q^\alpha}+\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^\alpha}+\lambda_\alpha\right)T^\alpha_\mu=0.\quad(20\mathrm{b})$$

3.2. 采用 Hölder 变分得到的约束运动方程

采用 Hölder 变分,(13)式可表示为

$$\delta\mathscr{A}=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\left([L]_s+\lambda_\alpha[f^\alpha]_s-\dot{\lambda}_\alpha\frac{\partial f^\alpha}{\partial\dot{q}^s}\right)\delta_{\mathrm{H}}q^s+\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^s}+\lambda_\alpha\frac{\partial f^\alpha}{\partial\dot{q}^s}\right)\left[\delta_{\mathrm{H}}\dot{q}^s-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta_{\mathrm{H}}q^s)\right]\right\}\mathrm{d}t.\quad(21)$$

考虑

$$\delta_{\mathrm{H}}\dot{q}^s-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta_{\mathrm{H}}q^s)=0$$

以及 $\delta_{\mathrm{H}}q^s$ 的独立性,得到 vakonomic 方程

$$[L]_s + \lambda_\alpha [f^\alpha]_s - \dot{\lambda}_\alpha \frac{\partial f^\alpha}{\partial \dot{q}^s} = 0. \tag{22}$$

值得指出的是，这里同样只利用了 d-δ 对易关系，而没有采用关系式(7)中的 Chetaev 条件

$$\frac{\partial f^\alpha}{\partial \dot{q}^s}\delta_{\rm H} q^s = 0,$$

并利用了 $\delta_{\rm H} q^s$ 的独立性．这一点与非完整力学中运用 d'Alember-Lagrange 微分变分原理(或者 Hölder 积分变分原理)和 Lagrange 乘子法推导 Routh 方程的基本假设一致．这样，在 Hölder 变分下，嵌入约束的运动方程也是(20a)和(20b)式．

3.3. 采用 Suslov 变分得到的约束运动方程

采用 Suslov 变分，(13)式可表示为

$$\delta\mathscr{A} = \int_{t_1}^{t_2}\left\{\left([L]_s + \lambda_\alpha [f^\alpha]_s - \dot{\lambda}_\alpha \frac{\partial f^\alpha}{\partial \dot{q}^s}\right)\delta_{\rm S} q^s + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^s} + \lambda_\alpha \frac{\partial f^\alpha}{\partial \dot{q}^s}\right)\left[\delta_{\rm S}\dot{q}^s - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta_{\rm S} q^s)\right]\right\}\mathrm{d}t. \tag{23}$$

运用对易关系式(10)，(23)式变为

$$\delta\mathscr{A} = \int_{t_1}^{t_2}\left\{\left([L]_s - \dot{\lambda}_\alpha \frac{\partial f^\alpha}{\partial \dot{q}^s}\right)\delta_{\rm S} q^s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^s}\left[\delta_{\rm S}\dot{q}^s - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta_{\rm S} q^s)\right]\right\}\mathrm{d}t. \tag{24}$$

为了得到运动方程，我们需要 d-δ 对易关系的显式．为此，假设约束方程可以表示为

$$f^\alpha = v^\alpha - \varphi^\alpha(t, q^s, \dot{q}^\mu) = 0.$$

利用关系式(16)，则对易关系(10)式变为

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta_{\rm S} q^\alpha) - \delta_{\rm S}\dot{q}^\alpha\right] - \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial \dot{q}^\mu}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta_{\rm S} q^\mu) - \delta_{\rm S}\dot{q}^\mu\right] = -\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial q^\beta}\delta_{\rm S} q^\beta - [\varphi^\alpha]_\mu \delta_{\rm S} q^\mu. \tag{25}$$

不失一般性，可假设

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta_{\rm S} q^\mu) - \delta_{\rm S}\dot{q}^\mu = 0, \tag{26}$$

则上述对易关系简化为

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta_{\rm S} q^\alpha) - \delta_{\rm S}\dot{q}^\alpha\right] = -\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial q^\beta}\delta_{\rm S} q^\beta - [\varphi^\alpha]_\mu \delta_{\rm S} q^\mu. \tag{27}$$

利用上述两个对易关系以及(16)式，则作用量的变分(24)式变为

$$\begin{aligned}\delta\mathscr{A} &= \int_{t_1}^{t_2}\left\{\left([L]_\mu + \dot{\lambda}_\alpha \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial \dot{q}^\mu}\right)\delta_{\rm S} q^\mu + ([L]_\beta - \dot{\lambda}_\beta)\delta_{\rm S} q^\beta + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\left(\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial q^\beta}\delta_{\rm S} q^\beta + [\varphi^\alpha]_\mu \delta_{\rm S} q^\mu\right)\right\}\mathrm{d}t \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\left\{\left([L]_\mu + \dot{\lambda}_\alpha \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial \dot{q}^\mu} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}[\varphi^\alpha]_\mu\right)\delta_{\rm S} q^\mu + \left([L]_\beta - \dot{\lambda}_\beta + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial q^\beta}\right)\delta_{\rm S} q^\beta\right\}\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{28}$$

考虑 $\delta_{\rm S} q^\mu$，$\delta_{\rm S} q^\beta$ 的独立性，由(28)式得到如下方程：

$$[L]_\beta - \dot{\lambda}_\beta + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial q^\beta} = 0, \tag{29a}$$

$$[L]_\mu + \dot{\lambda}_\alpha \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial \dot{q}^\mu} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}[\varphi^\alpha]_\mu = 0. \tag{29b}$$

将(29a)式代入(29b)式，可得

$$[L]_\beta - \dot{\lambda}_\beta + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial q^\beta} = 0, \tag{30a}$$

$$[L]_\mu + [L]_\alpha \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial \dot{q}^\mu} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}T^\alpha_\mu = 0, \tag{30b}$$

其中

$$T^\alpha_\mu = -[\varphi^\alpha]_\mu - \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial q^\beta}\frac{\partial \varphi^\beta}{\partial \dot{q}^\mu}.$$

考虑嵌入约束的 Lagrange 函数

$$\tilde{L}(t, q^s, \dot{q}^\mu) = L(t, q^s, \dot{q}^\mu, \varphi^\beta(t, q^\gamma, \dot{q}^\nu))$$

以及关系式(19)，(30a)，(30b)式最后可变换为

$$[L]_\beta - \dot{\lambda}_\beta + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial q^\beta} = 0, \tag{31a}$$

$$[\tilde{L}]_\mu + \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial \dot{q}^\mu}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^\alpha} = 0. \tag{31b}$$

在上述方程的推导过程中，我们没有利用显式表达的 Chetaev 条件

$$\delta_{\rm S} q^\alpha = \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial \dot{q}^\beta}\delta_{\rm S} q^\beta,$$

从而保持了 $\delta_{\rm S} q^\mu$，$\delta_{\rm S} q^\beta$ 的独立性．

3.4. 三种约束运动方程之间的关系

需要强调的是，在运用三类变分和稳定作用量原理推演约束系统运动微分方程的过程中，只利用了 d-δ 对易关系，而没有利用其他任何条件，如 Chetaev 条件和 Chetaev 关系，所以没有要求理想约束假定．利用 d-δ 对易关系，是为了表示对广义速度的变分，这样的作法可以要求全部广义坐标的变分 δq^s 的独立性，这不仅保持了推演三类方程过程的

一致性，而且也与非完整力学中的一贯作法一致.在这种一致的条件下，vakonomic 变分和 Hölder 变分对复合作用量的变分结果自然就一致了，由稳定作用量原理所得到的运动微分方程也就自然一致，即都是 vakonomic 方程.而 Suslov 变分下的运动微分方程所不同的是 d-δ 对易关系的不同，所以上述三类方程的比较实质上是两类方程(20a)，(20b)和(31a)，(31b)的对应比较.简单比较后可得两类方程具有共同解的充分必要条件

$$\lambda_\alpha = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}. \tag{32}$$

容易验证，Chaplygin 非完整系统满足这个条件.另外，当 $T_\alpha^\mu = 0$ 时，两组方程形式等价.

4. 仿射微分约束系统的三类约束微分方程

作为一个特例，下面将讨论仿射微分约束的情况，即系统受到的非完整约束为一般的线性微分约束

$$\begin{aligned} f^\alpha &= \dot{q}^\alpha - B_\mu^\alpha(t, q^s)\dot{q}^\mu - B_0^\alpha(t, q^s) \\ &= \dot{q}^\alpha - B_\rho^\alpha(q^i)\dot{q}^\rho = 0. \end{aligned} \tag{33}$$

这个表示方式是一种显式表示的约束方程，即

$$\begin{aligned} \dot{q}^\alpha &= \varphi^\alpha(t, q^s, \dot{q}^\mu) \\ &= B_\mu^\alpha(t, q^s)\dot{q}^\mu + B_0^\alpha(t, q^s) \\ &= B_\rho^\alpha(q^i)\dot{q}^\rho. \end{aligned} \tag{34}$$

为了得到仿射微分约束系统在三类变分下的不同表达式，我们可以像以上所述那样由稳定作用量原理推演出来，也可以从上述所推演出来的结果中，用仿射微分约束方程(33)或(34)代入，即可获得相应的微分方程.

首先，考虑 vakonomic 变分和 Hölder 变分所对应的 vakonomic 方程.将

$$\begin{aligned} [f^\alpha]_\beta &= -B_{\rho,\beta}^\alpha \dot{q}^\rho, \\ [f^\alpha]_\mu &= (2B_{[\mu,\rho]}^\alpha + B_\rho^\beta B_{\mu,\beta}^\alpha)\dot{q}^\rho \end{aligned} \tag{35}$$

代入非线性约束系统的 vakonomic 方程(15)，相应的方程(18a)，(18b)变为

$$[L]_\beta - \lambda_\alpha B_{\rho,\beta}^\alpha \dot{q}^\rho - \dot{\lambda}_\beta = 0, \tag{36a}$$

$$\begin{aligned} &[L]_\mu + 2\lambda_\alpha(B_{[\mu,\rho]}^\alpha \\ &+ B_{[\rho}^\beta B_{\mu]}^\alpha{}_{,\beta})\dot{q}^\rho + B_\mu^\alpha [L]_\alpha = 0. \end{aligned} \tag{36b}$$

而嵌入约束的 vakonomic 方程(20a)，(20b)则为

$$[L]_\beta - \lambda_\alpha B_{\rho,\beta}^\alpha \dot{q}^\rho - \dot{\lambda}_\beta = 0, \tag{37a}$$

$$\begin{aligned} &[\tilde{L}]_\mu + B_\mu^\alpha \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^\alpha} + 2\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} + \lambda_\alpha\right) \\ &\times (B_{[\mu,\rho]}^\alpha + B_{[\rho}^\beta B_{\mu]}^\alpha{}_{,\beta})\dot{q}^\rho = 0. \end{aligned} \tag{37b}$$

其次，考虑 Suslov 变分下的仿射微分约束系统的运动方程.将约束条件(34)式代入方程(31a)，(31b)，得

$$[L]_\beta - \dot{\lambda}_\beta + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} B_{\rho,\beta}^\alpha \dot{q}^\rho = 0, \tag{38a}$$

$$[\tilde{L}]_\mu + B_\mu^\alpha \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^\alpha} = 0. \tag{38b}$$

显然，当

$$\lambda_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha},$$

方程(37a)，(37b)和(38a)，(38b)等价.当仿射微分约束的可积性条件[27]

$$B_{[\mu,\rho]}^\alpha + B_{[\rho}^\beta B_{\mu]}^\alpha{}_{,\beta} = 0 \tag{39}$$

得到满足时，这两组方程形式上也是等价的.

5. 算 例

例 1 考虑圆盘竖直滚动问题，这是一个典型的 Chaplygin 非完整系统运动问题.选择如下广义坐标：质心坐标(x, y)，确定圆盘位置的方位角 ψ 以及描述内部的转动角 ϕ.为简单起见，设圆盘的质量为 1，则其 Lagrange 量为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}(I_1\dot{\phi}^2 + I_2\dot{\psi}^2),$$

其中 I_1 和 I_2 是转动惯量.圆盘纯滚动时所受到的非完整约束为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (R\cos\psi)\dot{\phi}, \\ \dot{y} &= (R\sin\psi)\dot{\phi}, \end{aligned} \tag{40}$$

其中 R 是圆盘的半径.根据约束条件，可以计算出如下关系：

$$\begin{aligned} B_1^3 &= R\cos\psi, \\ B_1^4 &= R\sin\psi, \\ B_2^3 &= 0, \\ B_2^4 &= 0, \\ B_{[1,2]}^3 &= -\frac{1}{2}(R\sin\psi)\dot{\psi}, \\ B_{[1,2]}^4 &= \frac{1}{2}(R\cos\psi)\dot{\psi}, \\ B_{\rho,\beta}^\alpha &= 0 \quad (\alpha = 3,4; \beta = 3,4; \rho = 0,1,2). \end{aligned}$$

嵌入约束的 Lagrange 函数

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}(R^2 + I_1)\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\psi}^2,$$

显见

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial y} = 0.$$

由此得到 Suslov 变分下的方程(38a),(38b)可具体表示为

$$\lambda_3 = -\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + C_1,\quad \lambda_4 = -\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} + C_2, \tag{41a}$$

$$(R^2 + I_1)\ddot{\phi} = 0,\quad I_2\ddot{\psi} = 0, \tag{41b}$$

其中 C_1 和 C_2 是积分常数. 而 vakonomic 变分下的方程(37a),(37b)则为

$$\lambda_3 = -\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + C_1,\quad \lambda_4 = -\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} + C_2, \tag{42a}$$

$$(R^2 + I_1)\ddot{\phi} - R(C_1\sin\psi - C_2\cos\psi)\dot{\psi} = 0,\quad I_2\ddot{\psi} + R(C_1\sin\psi - C_2\cos\psi)\dot{\phi} = 0. \tag{42b}$$

显然,当取 $C_1 = C_2 = 0$ 时,上述两类方程等价.

例 2　Appell-Hamel 系统的位形坐标取为

$$q^1 = x,\quad q^2 = y,\quad q^3 = z,$$

Lagrange 函数

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz,$$

系统受到非完整约束为

$$\dot{z} = \frac{b}{a}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

系统嵌入约束的 Lagrange 函数为

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}m\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgz.$$

通过简单计算可得

$$[L]_x = -m\ddot{x},\quad [L]_y = -m\ddot{y},\quad [L]_z = -mg - m\ddot{z},$$

$$[\tilde{L}]_x = -m\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)\ddot{x},\quad [\tilde{L}]_y = -m\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)\ddot{y},$$

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial z} = -mg,\quad \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\frac{b}{a}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2},$$

$$\frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{x}} = \frac{b}{a}\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}},\quad \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{y}} = \frac{b}{a}\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}},\quad \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = 0.$$

将这些结果代入 Suslov 变分下的方程(31a),(31b)和 vakonomic 变分下的方程(20a),(20b),将分别得到

$$\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)\ddot{x} + \frac{bg}{a}\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = 0,\quad \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)\ddot{y} + \frac{bg}{a}\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = 0,\quad mg + m\ddot{z} + \dot{\lambda}_z = 0 \tag{43}$$

和

$$\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)\ddot{x} + \frac{bg}{a}\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} + \left(m\frac{b}{a}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} + \lambda_z\right)\frac{\dot{y}(\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y})}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = 0, \tag{44a}$$

$$\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)\ddot{y} + \frac{bg}{a}\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} + \left(m\frac{b}{a}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} + \lambda_z\right)\frac{\dot{x}(\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y})}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = 0, \tag{44b}$$

$$mg + m\ddot{z} + \dot{\lambda}_z = 0. \tag{44c}$$

由方程(43)和方程组(44)易验证

$$\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y} = 0,$$

即

$$T_1^3 = \frac{b}{a}\frac{\dot{y}(\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y})}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = 0,$$

$$T_2^3 = \frac{b}{a}\frac{\dot{x}(\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y})}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = 0.$$

从而上述两类变分下的方程组等价.

6. 结　论

我们利用 Lagrange 乘子法来构造一个复合作用量,由稳定作用量原理出发,研究在三类等时非完整变分下的微分方程.由于仅利用了三类变分和微分的对易关系,并保持了广义坐标变分的独立性,对约束是否理想并没有硬性要求.这三类变分下的微分方程只有两类是独立的,vakonomic 变分和 Hölder 变分下的方程等价.仅从数学意义上,这两类方程的地位是平等的,尽管它们的物理意义可能不同.vakonomic 方程(36)(或(15))的物理意义和数学意义已经比较清楚,它们具有极值特性.例如,对于 Chaplygin 约束系统,这类方程解的曲线是 Riemann-Cartan 位形流形上的短程线.vakonomic 方程在控制领域中已经得到了广泛应用.而 Suslov 变分下的微分方程也具有极值性质,它们是否具有明确的物理意义还不清楚.但无论怎样,由于非完整约束的不可积性导致约束条件的实现方式不唯一,所以方程(31a),(31b)和(38a),(38b)存在合理解的可能性是不能排除的.

[1] Johns O 2005 *Analytical Mechanics for Relativity and Quantum Mechanics* (Oxford: Oxford University Press)

[2] Papastavridis J G 2002 *Analytical Mechanics: A Comprehensive Treatise on the Dynamics of Constrained Systems; for Engineers, Physicists, and Mathematicians* (Oxford: Oxford University Press)

[3] Wen X S, Qiu J, Tao J Y 2003 *Analytical Dynamics and Its Applications of Electromechanical Systems* (Beijing: Science Press) p1 (in Chinese) [温熙森、邱　静、陶俊勇 2003 电系统分析动力学及其应用 (北京:科学出版社) 第 1 页]

[4] Qiu J J 1992 *Analytical Dynamics of Electromechanical Systems* (Beijing: Science Press) p1 (in Chinese) [邱家俊 1992 机电分析动力学 (北京:科学出版社) 第 1 页]

[5] NNSFC 2007 *Research Reports on Development of Mechanics* (Beijing: Science Press) p45 (in Chinese) [国家自然科学基金委员会 2007 力学学科发展研究报告 (北京:科学出版社) 第 45 页]

[6] Chen B 1991 *Acta Mech. Sin.* **23** 379 (in Chinese) [陈　滨 1991 力学学报 **23** 379]

[7] Liang L F 2000 *Adv. Mech.* **30** 358 (in Chinese) [梁立孚 2000 力学进展 **30** 358]

[8] Lewis A D, Murray R M 1995 *Int. J. Non-Linear Mech.* **30** 793

[9] Cardin F, Favretti M 1996 *J. Geom. Phys.* **18** 295

[10] de León M, Marrero J C, de Diego M D 2002 *J. Geom. Phys.* **35** 126

[11] Favretti M 1998 *J. Dynam. Diff. Equat.* **10** 511

[12] Arnold V I, Kozlov V V, Neishtadt A I 1998 *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics* (Berlin: Springer-Verlag)

[13] Guo Y X, Luo S K, Mei F X 2004 *Adv. Mech.* **34** 477 (in Chinese) [郭永新、罗绍凯、梅凤翔 2004 力学进展 **34** 477]

[14] Guo Y X, Zhao Z, Liu S X, Wang Y, Zhu N, Han X J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3838 (in Chinese) [郭永新、赵　　、刘世兴、王　勇、朱　娜、韩晓静 2006 物理学报 **55** 3838]

[15] Guo Y X, Zhao Z, Liu S X, Liu C 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1301 (in Chinese) [郭永新、赵　　、刘世兴、刘　畅 2008 物理学报 **57** 1301]

[16] Chen L Q 1994 *J. Anshan Institut. I. S. Tech.* **17**(2) 29 (in Chinese) [陈立群 1994 鞍山钢铁学院学报 **17**(2) 29]

[17] Chen L Q 1990 *Chin. Sci. Bull.* **35** 1836 (in Chinese) [陈立群 1990 科学通报 **35** 1836]

[18] Guo Y X, Wang Y, Chee G Y, Mei F X 2005 *J. Math. Phys.* **46** 062902

[19] Guo Y X, Luo S K, Shang M, Mei F X 2001 *Rep. Math. Phys.* **47** 313

[20] Guo Y X, Mei F X 1998 *Acta Mech. Sin.* **14** 85

[21] Mei F X, Liu D, Luo Y 1991 *Advanced Analytical Mechanics* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) p1 (in Chinese) [梅凤翔、刘　端、罗　勇 1991 高等分析动力学 (北京:北京理工大学出版社) 第 1 页]

[22] Neimark J, Fufaev N 1972 *Dynamics of Nonholonomic Systems* (Providence: American Mathematical Society)

[23] Bloch A M, Krishnaprasad P S, Marsden J E, Murray R 1996 *Arch. Rat. Mech. Anal.* **136** 21

[24] Bloch A M, Baillieul J, Crouch P, Marsden J 2003 *Nonholonomic Mechanics and Control* (London: Springer)

[25] Vagner V V 1941 *Trudy Sem. Vektor. Tenzor. Anal.* **5** 173 (Russian)

[26] Etayo F, Santamaría R, Vacaru S I 2005 *J. Math. Phys.* **46** 032901

[27] Guo Y X, Liu S X, Liu C, Luo S K, Wang Y 2007 *J. Math. Phys.* **48** 082901

Differential equations of motion for constrained systems with respect to three kinds of nonholonomic variations*

Zhao Zhe[1)]　Guo Yong-Xin[2)†]　Liu Chang[3)]　Liu Shi-Xing[2)]

1)(*Foundation Institute, Shenyang Pharmaceutical University, Shenyang* 110016, *China*)

2)(*College of Physics, Liaoning University, Shenyang* 110036, *China*)

3)(*School of Science, Beijing Institute of Technology, Beijing* 100081, *China*)

(Received 4 April 2007; revised manuscript received 23 November 2007)

Abstract

Based on an analysis of three kinds of non-equivalent nonholonomic variations, i.e., the Suslov's variation, Hölder's variation and vakonomic variation, the method of Lagrange multipliers and stationary action principle are utilized to discuss the differential equations of motion for nonlinear nonholonomic constrained systems with respect to the three kinds of variations. The condition for the three kinds of equations to be equivalent is investigated. The equations for affine nonholonomic constrained systems are also obtained as special cases of the general nonholonomic systems. Two examples are given to illustrated the validity of the result.

Keywords: nonholonomic constraints, Chetaev's condition, vakonomic dynamics, method of Lagrange multipliers

PACC: 0320

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10472040), the Outstanding Young Talents Training Foundation of Liaoning Province, China (Grant No. 3040005), the Scientific Research Foundation for the Returned Overseas Chinese Scholars from Ministry of Education, China (Grant No. 2004527), the Chunhui Program of Ministry of Education, China (Grant No. Z2005-1-21006) and the Basic Research Program of Education Bureau of Liaoning Province, China (Grant No. 05L155).

† Corresponding author. E-mail: guoyongxin@lnu.edu.cn