第 57 卷 第 4 期 2008 年 4 月
1000-3290/2008/57(04)/2006-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.57,No.4,April,2008


# 非完整系统 Nielsen 方程的 Mei 对称性与 Mei 守恒量*

贾利群[1)†]　罗绍凯[2)]　张耀宇[3)]

1)(江南大学理学院,无锡　214122)

2)(浙江理工大学数学力学与数学物理研究所,杭州　310018)

3)(平顶山学院电气信息工程学院,平顶山　467002)

(2007 年 8 月 6 日收到;2007 年 11 月 16 日收到修改稿)

研究了 Chetaev 型非完整非保守系统带乘子的 Nielsen 方程的 Mei 对称性和 Mei 守恒量.对 Chetaev 型非完整非保守系统带乘子的 Nielsen 方程的运动微分方程、Mei 对称性的定义和判据、Mei 对称性直接导致的 Mei 守恒量的条件以及守恒量的形式进行了具体的研究.举例说明结果的应用.

关键词:非完整系统,Nielsen 方程,Mei 对称性,Mei 守恒量

PACC:0320

## 1. 引　　言

对称性与守恒量理论是数学、物理学,尤其是近代分析力学理论的一个重要研究领域.对称性主要有 Noether 对称性[1—6]、Lie 对称性[5—13]和 Mei 对称性[5,6,14—19].守恒量主要有 Noether 守恒量[7,8]、Hojman 守恒量[11,19]和 Mei 守恒量[20—22].文献[23]给出了 Lagrange 系统的统一对称性,并由此导出了以上三种主要守恒量.

本文采用沿系统运动轨道曲线求函数对时间全导数的方法,给出 Chetaev 型非完整非保守系统带乘子的 Nielsen 方程的 Mei 对称性定义和判据.此外,通过对 Mei 对称性的研究,还得到了 Mei 对称性直接导致的 Chetaev 型非完整非保守系统带乘子的 Nielsen 方程 Mei 守恒量的条件和 Mei 守恒量的表达式.最后,举例说明结果的应用,并对所得结果进行讨论.

## 2. 系统的运动微分方程

假设力学系统的位形由 $n$ 个广义坐标 $q_s$($s=1,\cdots,n$)来确定,它的运动受有 $g$ 个双面理想 Chetaev 型非完整约束方程

$$f_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=0\qquad(\beta=1,\cdots,g)\tag{1}$$

的限制,并设约束间彼此相容且独立.约束方程(1)加在虚位移 $\delta q_s$ 上的 Chetaev 条件为

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot q_s}\delta q_s=0\qquad(\beta=1,\cdots,g).\tag{2}$$

系统的运动微分方程为

$$\frac{\partial}{\partial\dot q_s}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}-2\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s+\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot q_s}\qquad(s=1,\cdots,n).\tag{3}$$

方程(3)中,

$$L=L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$$

为系统的 Lagrange 函数,

$$Q_s=Q_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$$

为系统所受非势广义力,$\lambda_\beta$ 为 Lagrange 乘子.方程(3)称为 Chetaev 型非完整非保守系统带乘子的 Nielsen 方程.引进 Mei 算子

$$N_s=\frac{\partial}{\partial\dot q_s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-2\frac{\partial}{\partial q_s}\qquad(s=1,\cdots,n),\tag{4}$$

则方程(3)可表示为

---

* 国家自然科学基金(批准号:10572021)资助的课题.

† E-mail:jlq0000@163.com

$$N_s(L) = Q_s + \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \quad (s = 1,\cdots,n). \tag{5}$$

设系统非奇异，则由方程(1)和(5)可求出所有的 $\lambda_\beta = \lambda_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$. 文献[24]给出 $\lambda_\beta$ 所满足的代数方程. 方程(5)还可写为

$$N_s(L) = Q_s + \Lambda_s \quad (s = 1,\cdots,n). \tag{6}$$

方程(6)中

$$\Lambda_s = \Lambda_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \quad (s = 1,\cdots,n) \tag{7}$$

称为广义非完整约束反力. 方程(6)为与 Chetaev 型非完整非保守系统方程(1)和(3)相应的完整非保守系统的方程. Chetaev 型非完整非保守系统的运动可在完整非保守系统方程(6)的解中找到，只要运动的初始条件满足 Chetaev 型非完整约束方程(1)，则完整非保守系统方程(6)的解就给出非完整非保守系统方程(1)和(3)的运动. 由方程(6)可反解出所有的广义加速度

$$\ddot{q}_s = \alpha_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \quad (s = 1,\cdots,n). \tag{8}$$

## 3. Mei 对称性的定义

引入时间和广义坐标的群的无限小变换方程

$$t^* = t + \Delta t,\quad q_s^*(t^*) = q_s(t) + \Delta q_s \quad (s = 1,\cdots,n), \tag{9}$$

方程(9)可展开为

$$t^* = t + \varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),\quad q_s^*(t^*) = q_s(t) + \varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \quad (s = 1,\cdots,n). \tag{10}$$

方程(10)中 $\varepsilon$ 为无限小参数，$\xi_0$ 和 $\xi_s$ 为无限小变换生成元.

引入下列无限小变换生成元向量 $X^{(0)}$ 和它沿系统运动轨道曲线的一次扩展 $\tilde{X}^{(1)}$：

$$X^{(0)} = \xi_0 \frac{\partial}{\partial t} + \xi_s \frac{\partial}{\partial q_s}, \tag{11}$$

$$\tilde{X}^{(1)} = X^{(0)} + \left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s - \dot{q}_s \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0\right)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}. \tag{12}$$

(12)式中对时间的全导数采用沿系统运动轨道曲线的方式，有

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}_s \frac{\partial}{\partial q_s} + \alpha_s \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}. \tag{13}$$

经方程(10)的变换，函数 $L$，$Q_s$，$\Lambda_s$ 和 $f_\beta$ 分别变为 $L^*$，$Q_s^*$，$\Lambda_s^*$ 和 $f_\beta^*$. 将 $L^*$，$Q_s^*$，$\Lambda_s^*$ 和 $f_\beta^*$ 在 $(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 处沿运动轨道曲线作 Taylor 展开，有

$$\begin{aligned}
L^* &= L\left(t^*,\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right) = L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) + \varepsilon\tilde{X}^{(1)}(L) + O(\varepsilon^2),\\
Q_s^* &= Q_s\left(t^*,\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right) = Q_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) + \varepsilon\tilde{X}^{(1)}(Q_s) + O(\varepsilon^2) \quad (s = 1,\cdots,n),\\
\Lambda_s^* &= \Lambda_s\left(t^*,\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right) = \Lambda_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) + \varepsilon\tilde{X}^{(1)}(\Lambda_s) + O(\varepsilon^2) \quad (s = 1,\cdots,n),\\
f_\beta^* &= f_\beta\left(t^*,\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right) = f_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) + \varepsilon\tilde{X}^{(1)}(f_\beta) + O(\varepsilon^2) \quad (\beta = 1,\cdots,g).
\end{aligned} \tag{14}$$

**定义 1**　如果用经方程(10)变换后的动力学函数 $L^*$，$Q_s^*$ 和 $\Lambda_s^*$ 分别代替变换前的动力学函数 $L$，$Q_s$ 和 $\Lambda_s$，方程(6)的形式保持不变，即

$$N_s(L^*) = Q_s^* + \Lambda_s^* \quad (s = 1,\cdots,n), \tag{15}$$

则称这种对称性为与 Chetaev 型非完整非保守系统带乘子的 Nielsen 方程(方程(1)，(3))相应的完整非保守系统的 Mei 对称性.

**定义 2**　如果用经方程(10)变换后的动力学函数 $L^*$，$Q_s^*$，$\Lambda_s^*$ 和 $f_\beta^*$ 分别代替变换前的动力学函数 $L$，$Q_s$，$\Lambda_s$ 和 $f_\beta$，方程(1)和(6)的形式都保持不变，即

$$f_\beta^* = f_\beta\left(t^*,\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right) = 0 \quad (\beta = 1,\cdots,g) \tag{16}$$

和方程(15)同时成立，则称这种对称性为 Chetaev 型非完整非保守系统带乘子的 Nielsen 方程(方程(1)，(3))的弱 Mei 对称性.

**定义 3**　如果用经方程(10)变换后的动力学函数 $L^*$，$Q_s^*$，$\Lambda_s^*$ 和 $f_\beta^*$ 分别代替变换前的动力学函数 $L$，$Q_s$，$\Lambda_s$ 和 $f_\beta$，方程(1)和(6)的形式都保持不变，并要求 Chetaev 条件方程(2)对无限小变换生成元 $\xi_0$，$\xi_s$ 的附加限制方程

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) = 0 \quad (\beta = 1,\cdots,g) \tag{17}$$

成立,则称这种对称性为 Chetaev 型非完整非保守系统带乘子的 Nielsen 方程(方程(1),(3))的强 Mei 对称性.

## 4. Mei 对称性的判据

将方程(14)中的前三个方程代入方程(15),忽略 $\varepsilon^2$ 及更高阶小项,并注意到方程(6),可得

$$N_s[\tilde{X}^{(1)}(L)] = \tilde{X}^{(1)}(Q_s) + \tilde{X}^{(1)}(\Lambda_s) \quad (s = 1,\cdots,n).$$

由于该方程在利用 Mei 算子求动力学函数对时间的全导时,是沿系统运动轨道曲线进行的,所以方程中的 Mei 算子可由(4)式换为

$$\tilde{N}_s = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t} - 2\frac{\partial}{\partial q_s} \quad (s = 1,\cdots,n), \tag{18}$$

式中 $\tilde{N}_s$ 称为广义 Mei 算子.因此,有

$$\tilde{N}_s[\tilde{X}^{(1)}(L)] = \tilde{X}^{(1)}(Q_s) + \tilde{X}^{(1)}(\Lambda_s) \quad (s = 1,\cdots,n). \tag{19}$$

将方程(14)中的第四个方程代入方程(16),忽略 $\varepsilon^2$ 及更高阶小项,并注意到方程(1),可得

$$\tilde{X}^{(1)}(f_\beta) = 0 \quad (\beta = 1,\cdots,g). \tag{20}$$

于是,有以下判据.

**判据 1** 对与 Chetaev 型非完整非保守系统带乘子的 Nielsen 方程(方程(1),(3))相应的完整非保守系统方程(6),如果变换方程(10)的无限小变换生成元 $\xi_0$ 和 $\xi_s$ 满足方程(19),则相应的对称性为系统的 Mei 对称性.

方程(19)被称为与 Chetaev 型非完整非保守系统带乘子的 Nielsen 方程(方程(1),(3))相应的完整非保守系统 Mei 对称性的判据方程.

**判据 2** 对 Chetaev 型非完整非保守系统带乘子的 Nielsen 方程(方程(1),(3)),如果变换方程(10)的无限小变换生成元 $\xi_0$ 和 $\xi_s$ 满足方程(19)和(20),则相应的对称性为系统的弱 Mei 对称性.

方程(19)和(20)分别被称为 Chetaev 型非完整非保守系统带乘子的 Nielsen 方程(方程(1),(3)) Mei 对称性的判据方程和限制方程.

**判据 3** 对 Chetaev 型非完整非保守系统带乘子的 Nielsen 方程(方程(1),(3)),如果变换方程(10)的无限小变换生成元 $\xi_0$ 和 $\xi_s$ 同时满足方程(17),(19)和(20),则相应的对称性为系统的强 Mei 对称性.

方程(17)被称为 Chetaev 型非完整非保守系统带乘子的 Nielsen 方程(方程(1),(3)) Mei 对称性的附加限制方程.

## 5. Mei 对称性导致的 Mei 守恒量

非奇异 Chetaev 型非完整非保守系统带乘子的 Nielsen 方程(方程(1),(3))的 Mei 对称性可直接导致 Mei 守恒量,下述命题给出得到 Mei 守恒量的条件和 Mei 守恒量的表达式.

**命题 1** 如果非奇异 Chetaev 型非完整非保守系统带乘子的 Nielsen 方程(方程(1),(3))(弱或强) Mei 对称性的生成元 $\xi_0$,$\xi_s$ 和规范函数 $G_{\mathrm{M}} = G_{\mathrm{M}}(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 满足如下结构方程:

$$\tilde{X}^{(1)}(L)\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0 + \tilde{X}^{(1)}[\tilde{X}^{(1)}(L)] + \tilde{X}^{(1)}(Q_s + \Lambda_s)(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}G_{\mathrm{M}} = 0, \tag{21}$$

则系统的 Mei 对称性导致的 Mei 守恒量为

$$I_{\mathrm{M}} = \tilde{X}^{(1)}(L)\xi_0 + \frac{\partial \tilde{X}^{(1)}(L)}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + G_{\mathrm{M}} = \mathrm{const}. \tag{22}$$

**证明** 将(22)式代入(13)式,并利用方程(21),得

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}I_{\mathrm{M}} = {} & \left[\frac{\partial}{\partial t}\tilde{X}^{(1)}(L) + \dot{q}_s\frac{\partial}{\partial q_s}\tilde{X}^{(1)}(L) + \alpha_s\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\tilde{X}^{(1)}(L)\right]\xi_0 \\
& + \tilde{X}^{(1)}(L)\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0 + \left[\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\tilde{X}^{(1)}(L)\right](\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) \\
& + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\tilde{X}^{(1)}(L)\left[\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s - \alpha_s\xi_0 - \dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0\right] + \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}G_{\mathrm{M}} \\
= {} & \tilde{X}^{(1)}[\tilde{X}^{(1)}(L)] - \xi_s\frac{\partial}{\partial q_s}\tilde{X}^{(1)}(L) + \dot{q}_s\xi_0\frac{\partial}{\partial q_s}\tilde{X}^{(1)}(L)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\tilde{X}^{(1)}(L)\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}G_{\mathrm{M}}+\left[\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\tilde{X}^{(1)}(L)\right](\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)\\
&=\left[\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\tilde{X}^{(1)}(L)-\frac{\partial}{\partial q_s}\tilde{X}^{(1)}(L)-\tilde{X}^{(1)}(Q_s+\Lambda_s)\right](\xi_s-\dot{q}_s\xi_0).
\end{aligned}
\tag{23}
$$

将判据方程(19)代入(23)式，可得

$$
\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}I_{\mathrm{M}}=\left\{\left[\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial}{\partial q_s}\right)-\tilde{N}_s\right]\tilde{X}^{(1)}(L)\right\}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)=0.
$$

证毕.

## 6. 算　　例

非完整系统为

$$
L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2),\tag{24}
$$

$$
f=\dot{q}_1+bt\dot{q}_2-bq_2+t=0,\tag{25}
$$

$$
Q_1=Q_2=0.\tag{26}
$$

(25)式中 $b$ 为常量.试研究 Chetaev 型非完整系统带乘子的 Nielsen 方程的 Mei 对称性直接导致的 Mei 守恒量.

由方程(3)可得

$$
\begin{aligned}
\ddot{q}_1&=\Lambda_1=\lambda,\\
\ddot{q}_2&=\Lambda_2=\lambda bt.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

将(25)和(27)式联立后可解得

$$
\lambda=-\frac{1}{1+b^2t^2}.\tag{28}
$$

注意到方程(8)，将(28)式代入(27)式，可得系统的运动微分方程为

$$
\begin{aligned}
\ddot{q}_1&=\alpha_1=\Lambda_1=-\frac{1}{1+b^2t^2},\\
\ddot{q}_2&=\alpha_2=\Lambda_2=-\frac{bt}{1+b^2t^2}.
\end{aligned}
\tag{29}
$$

取无限小变换生成元

$$
\begin{aligned}
\xi_0&=0,\\
\xi_1&=-bt\dot{q}_1+\dot{q}_2+bq_1+bt,\\
\xi_2&=1,
\end{aligned}
\tag{30}
$$

则可算得

$$
\begin{aligned}
\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_1&=b,\\
\tilde{X}^{(1)}(L)&=b\dot{q}_1,\\
\tilde{X}^{(1)}[\tilde{X}^{(1)}(L)]&=b^2,\\
\tilde{X}^{(1)}(Q_1+\Lambda_1)&=\tilde{X}^{(1)}(Q_2+\Lambda_2)\\
&=\tilde{X}^{(1)}(f)=0,\\
\tilde{N}_1[\tilde{X}^{(1)}(L)]&=\tilde{N}_2[\tilde{X}^{(1)}(L)]=0.
\end{aligned}
\tag{31}
$$

利用(31)式容易验证判据方程(19)和限制方程(20)成立，而附加限制方程(17)不成立.由判据 2 可知，(30)式表述的无限小变换生成元是 Chetaev 型非完整系统带乘子的 Nielsen 方程的弱 Mei 对称性的无限小变换生成元.由结构方程(21)可得

$$
G_{\mathrm{M}}=-b^2t.
$$

利用(22)式可得本题中 Chetaev 型非完整系统带乘子的 Nielsen 方程的 Mei 对称性直接导致的 Mei 守恒量为

$$
\begin{aligned}
I_{\mathrm{M}}&=b(-bt\dot{q}_1+\dot{q}_2+bq_1)\\
&=\mathrm{const}.
\end{aligned}
\tag{32}
$$

## 7. 结　　论

本文采用沿系统运动轨道曲线求函数对时间全导数的方法，给出 Chetaev 型非完整非保守系统带乘子的 Nielsen 方程 Mei 对称性的定义和判据.采用上述方法，从数学上有助于得到更多的 Mei 对称性的无限小变换生成元，但能否由此得到新的非平凡的 Mei 守恒量还尚待研究.本文还研究了 Mei 守恒量，得到了 Chetaev 型非完整非保守系统带乘子的 Nielsen 方程由 Mei 对称性直接导致的 Mei 守恒量的条件以及守恒量的表达式，主要结果是判据 1、判据 2、判据 3 和命题 1.由此可研究非完整系统 Nielsen 方程的 Mei 对称性与 Mei 守恒量.

[1] Noether E 1918 *Nachr Akad Wiss Göttingen. Math. Phys.* K **I** 235
[2] Vujanović B 1986 *Acta Mech.* **65** 63
[3] Mei F X, Liu D, Luo Y 1991 *Advanced Analytical Mechanics* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔、刘 端、罗 勇 1991 高等分析力学 (北京 北京理工大学出版社)]
[4] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用 (北京 科学出版社)]
[5] Luo S K 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2941 (in Chinese) [罗绍凯 2003 物理学报 **52** 2941]
[6] Fu J L, Wang X M 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1023 (in Chinese) [傅景礼、王新民 2000 物理学报 **49** 1023]
[7] Zhao Y Y, Mei F X 1999 *Symmetries and Invariants of Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [赵跃宇、梅凤翔 1999 力学系统的对称性与不变量 (北京 科学出版社)]
[8] Lutzky M 1979 *J. Phys. A: Math. Gen.* **12** 973
[9] Zhao Y Y 1994 *Acta Mech. Sin.* **26** 380 (in Chinese) [赵跃宇 1994 力学学报 **26** 380]
[10] Mei F X 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1207 (in Chinese) [梅凤翔 2000 物理学报 **49** 1207]
[11] Hojman S A 1992 *J. Phys. A: Math. Gen.* **25** L291
[12] Zhang Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 461 (in Chinese) [张 毅 2002 物理学报 **51** 461]
[13] Mei F X 2000 *J. Beijing Inst. Technol.* **9** 120
[14] Wang S Y, Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 373
[15] Fang J H, Ding N, Wang P 2007 *Chin. Phys.* **16** 887
[16] Zheng S W, Jia L Q, Yu H S 2006 *Chin. Phys.* **15** 1399
[17] Chen X W, Luo S K, Mei F X 2002 *Appl. Math. Mech* **23** 47 (in Chinese) [陈向炜、罗绍凯、梅凤翔 2002 应用数学和力学 **23** 47]
[18] Zhang Y, Mei F X 2003 *Chin. Phys.* **12** 1058
[19] Mei F X 2003 *J. Jiangxi Norm. Univ.* **27** 193
[20] Jia L Q, Zhang Y Y, Zheng S W 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 649 (in Chinese) [贾利群、张耀宇、郑世旺 2007 物理学报 **56** 649]
[21] Jia L Q, Zheng S W 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3829 (in Chinese) [贾利群、郑世旺 2006 物理学报 **55** 3829]
[22] Mei F X 2004 *Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔 2004 约束力学系统的对称性与守恒量 (北京 北京理工大学出版社)]
[23] Mei F X, Xu X J, Zhang Y F 2004 *Acta Mech. Sin.* **20** 668
[24] Mei F X 1985 *Foundations of Mechanics of Nonholonomic Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔 1985 非完整系统力学基础 (北京 北京工业学院出版社)]

# Mei symmetry and Mei conserved quantity of Nielsen equation for a nonholonomic system*

Jia Li-Qun[1)†] Luo Shao-Kai[2)] Zhang Yao-Yu[3)]
1) (*School of Science, Jiangnan University, Wuxi 214122, China*)
2) (*Institute of Mathematical Mechanics and Mathematical Physics, Zhejiang Science and Technology University, Hangzhou 310018, China*)
3) (*College of Electric and Information Engineering, Pingdingshan University, Pingdingshan 467002, China*)
(Received 6 August 2007; revised manuscript received 16 November 2007)

Abstract

Mei symmetry and Mei conserved quantity of Nielsen equation with multipliers for a nonholonomic, non-conservative system of Chetaev's type are studied. The differential equations of motion of Nielsen equation with multipliers for the system, the definition and criterion of Mei symmetry, and the condition and the form of Mei conserved quantity deduced directly by Mei symmetry for the system are obtained. An example is given to illustrate the application of the results.

**Keywords**: nonholonomic systems, Nielsen equation, Mei symmetry, Mei conserved quantity
**PACC**: 0320

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10572021).
† E-mail: jlq0000@163.com