

随机多孔介质逾渗模型渗透率的临界标度性质^{*}

刘志峰¹⁾ 赖远庭²⁾ 赵刚^{3)†} 张有为¹⁾ 刘正锋¹⁾ 王晓宏¹⁾

1) 中国科学技术大学热科学和能源工程系, 合肥 230027)

2) 中国科学院等离子体物理研究所, 合肥 230031)

3) 中国科学技术大学力学和机械工程系, 合肥 230027)

(2007 年 3 月 12 日收到, 2007 年 9 月 11 日收到修改稿)

研究了一类非零键渗透率满足均匀分布的随机多孔介质逾渗模型. 数值计算了该模型系统渗透率在临界点处的标度指数. 结果表明该指数并不能看作是普适常数, 而与均匀分布的参数有关. 这意味着即使非零键渗透率值的概率密度函数满足负一阶矩存在条件, 系统渗透率在逾渗临界点处的标度指数仍然依赖于分布函数的具体参数, 并不是常数. 这一数值结果与 Sahimi 对此问题的结论不同.

关键词: 逾渗, 随机多孔介质, 标度指数, 渗透率

PACC: 0340G, 0570J

1. 引言

流体在多孔介质中的渗流是自然界中普遍存在的现象. 1856 年, 法国水利工程师 Darcy 在实验基础上总结出的唯象 Darcy 定律可以描述微观上无序、宏观上统计均匀的多孔介质中单相低速流动, 具体形式为

$$V = -\frac{k}{\mu} \frac{\Delta P}{l}, \quad (1)$$

式中 V 是渗流的平均速度, k 是渗透率, μ 是流体黏性系数, ΔP 是流程长度 l 上的压降. 一般认为 k 只与多孔介质本身的结构特性有关^[1], 但多孔介质的空间结构很复杂, 常会出现并非宏观上统计均匀的分形结构^[2-4]. 深入研究多孔介质中的渗流问题具有重要意义.

Broadbent^[5]于 1957 年提出的逾渗(percolation)模型, 在数学上表述很简单但内涵和性质却非常丰富, 它可以成功地用来描述临界相变现象. 近几十年来, 从统计物理学的角度出发, 利用逾渗模型研究多孔介质中的流动问题已取得了一定的进展^[6-9]. 通过直接求解 Navier-Stokes 方程, 可以计算出系统渗透率在逾渗模型临界点及其附近的随机特性和标度

律, 并得到在低雷诺数下系统渗透率和电导-绝缘体逾渗模型中系统电导率具有类似的性质, 与计算精度无关^[10-12]. 在较高雷诺数下, 宏观渗流在一定范围内可以用 Forchheimer 方程描述, 并确立了该方程中非达西渗流因子 β 在逾渗临界点附近的标度律性质^[13].

多孔介质是由孔隙和固体骨架随机组合构成的, 若不考虑多孔介质空间结构的长程相关性及固体骨架的弹性变化, 这本身就构成一个简单逾渗问题. 如图 1 所示, 具有独立宏观性质的一小块多孔介质可以映射成逾渗模型中的一个“键”, 用“键值”来表征相应的小块多孔介质的渗透率, 也称为键渗透率, 从而把多孔介质中的渗流问题等价为一个逾渗电导问题. 对逾渗电导问题已有了相对较为完整的研究^[14-17]. 对宏观性质不随空间变化的均匀多孔介质而言, 通过这种映射得到每个键上的渗透率值是相同的. 但对实际多孔介质而言, 由于成岩作用等复杂因素的影响, 其宏观渗透率往往随空间位置的变化而变化, 这时通过上述映射关系得到的逾渗模型中, 每个键上的渗透率值是不同的, 是与空间位置有关的变量, 这一类逾渗模型称为随机多孔介质逾渗模型. 本文将研究该模型的系统渗透率在逾渗临界点附近的标度性质.

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 10547139, 50506029)资助的课题.

[†] E-mail: zhaog@ustc.edu.cn

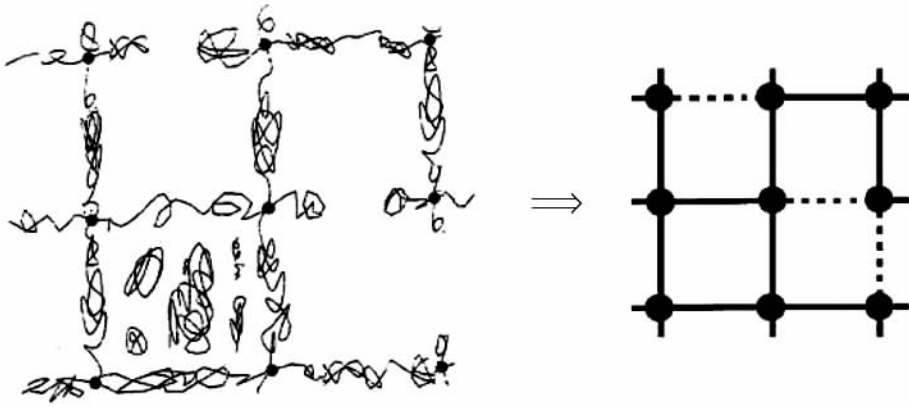


图1 实际多孔介质到逾渗模型的映射

2. “不变性”假说

忽略多孔介质渗透率在空间上的相关性,可以假定逾渗多孔介质模型中各键上的渗透率是独立的随机变量,其概率密度函数为 $g(k)$. 由于实际多孔介质中不同区域的渗透率差异往往很大,某些区域的渗透率极小或为零;另一方面,如果渗透率相对很大的区域能互相连通,形成跨越集团,那么其他区域的渗透率也可以看作是零. 由此概率密度函数 $g(k)$ 可以写成如下的一般形式:

$$g(k) = (1-p)\delta(k) + ph(k) \quad (0 \leq p \leq 1), \quad (2)$$

式中 $\delta(k)$ 为 Dirac 函数, $h(k)$ 为概率密度函数,且 $k > 0$. (2) 式实际上对应一个键逾渗过程,其含义是渗透率不为零的键所占比例为逾渗概率 p ,且这部分键上的渗透率所满足的概率密度函数为 $h(k)$. 其他的键上渗透率值都为零,这部分键所占比例为 $(1-p)$. 对无穷大网络而言,如果逾渗概率 p 小于临界值 p_c ,则系统总的渗透率 $k_t = 0$. 对非零键渗透率值为某常数(概率密度函数 $h(k)$ 为 Dirac 函数 $\delta(k - k_0)$)的一般逾渗问题,在逾渗临界点 p_c 处,系统总渗透率 k_t 满足标度关系 $k_t \sim L^{-\mu}$, L 为逾渗网络跨越尺度. 在临界点 p_c 附近,系统总渗透率 k_t 满足临界关系 $k_t \sim (p - p_c)^\alpha$, 并且临界指数 α 和标度指数 μ 之间存在关系

$$\alpha = -\mu\nu,$$

其中 ν 是关联长度的临界指数. 在二维情况下 $\mu = 0.9745$, $\nu = -4/3$, $\alpha \approx 1.33$.

在实际应用中,常会遇到非零键渗透率不为常数,而是随机变量的情形. 此时标度指数 μ 和概率

密度函数 $h(k)$ 之间的关系,既是应用中需要明确的问题,同时也具有非常重要的理论意义. 近几十年来,对非零键渗透率满足幂函数分布的情况一直受到关注,其概率密度函数 $h(k)$ 的具体形式为

$$h(k) = \begin{cases} (1-\omega)k^{-\omega} & (0 < k \leq 1), \\ 0 & (k > 1 \cup k \leq 0), \end{cases} \quad (3)$$

式中 ω 为幂函数指数,它决定了函数 $h(k)$ 的性质,是一个十分重要的参量.

Kogut 等^[18]通过平均场理论的分析,首先得到幂指数 ω 在 $0 \leq \omega < 1$ 会对系统渗透率 k_t 的临界指数 α 产生影响. 该发现具有重要意义,因为在此之前人们普遍认为临界指数 α 只和系统维数有关,是个普适量. Straley^[19]得到,临界指数 α 的值近似为 $(d-2)\nu + 1(1-\omega)$, 其中 d 是空间维数. 文献 [20] 指出,幂指数 ω 存在一个临界值 $\omega_c \approx 0.24$, 对于 $\omega < \omega_c$, 临界指数 α 约等于一般逾渗模型中的临界指数;而对于 $\omega > \omega_c$, 临界指数 α 不等于一般逾渗模型中的临界指数,而是幂指数 ω 的函数,即 $\alpha = \alpha(\omega)$.

Sahimi 等^[21]推导了临界指数 α 作为普适量的条件. 他们利用“有效介质近似”(effective medium approximation)方法研究了具有随机键值的逾渗模型,认为只要键值非常小的那些键在系统中所占比例很小,那么临界指数 α 就是常数. 具体而言,只要非零键值的概率密度函数 $h(k)$ 的负一阶矩存在,即

$$h_{-1} = \int_0^\infty k^{-1} h(k) dk < \infty,$$

那么临界指数 α 就是普适的,与函数 $h(k)$ 的参量及具体形式无关. 文献 [21] 的结论尚缺乏数值模拟结果的支持.

本文将利用数值方法研究非零键渗透率 k 满足区间 (a, b) 上均匀分布(显然此时函数 $h(k)$ 满足

负一阶矩存在条件)时临界指数 α 及标度指数 μ 的普适性.

3. 结果和分析

由于 Darcy 定律在每个键上成立,因此每个键

$$P_{i,j} = \frac{k_{i-1/2,j}P_{i-1,j} + k_{i+1/2,j}P_{i+1,j} + k_{i,j-1/2}P_{i,j-1} + k_{i,j+1/2}P_{i,j+1}}{k_{i-1/2,j} + k_{i+1/2,j} + k_{i,j-1/2} + k_{i,j+1/2}} \quad (5)$$

方程(4)结合相应的边界条件(上边界取压力值 $P = 1$,下边界取压力值 $P = 0$,左右边界取周期性边界条件)可以用数值方法解出,在数值求得键结合部的压力值后,利用 Darcy 定律得到系统入口边界或出口边界上各键的流速,进而求得系统渗透率 k_t .

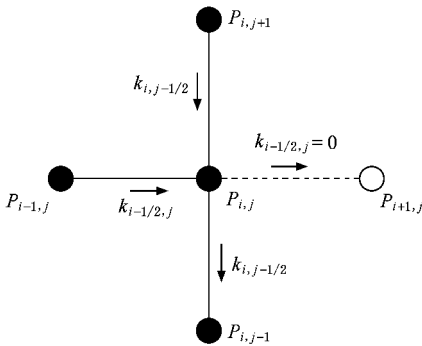


图2 逾渗网络模型中数值求解压力场的节点示意图

文献[22]中计算标度指数所采用的网格尺度为 $10^9 \times L$.本文采用类似的做法,取计算网格尺度为 $10^6 \times L$.通过数值计算以确定键渗透率满足均匀分布时随机多孔介质逾渗模型在临界点处的标度指数 μ ,并利用关系 $\alpha = -\mu\nu$ 确定临界指数 α .

对于随机多孔介质的逾渗模型,首先要确立的是其系统渗透率与跨越尺度在临界点处的幂函数关系.本质上,在临界点 p_c 处,系统渗透率与跨越尺度间的幂函数关系 $k_t \sim L^{-\mu}$ 取决于逾渗结构的几何特性.通过直接求解 Stokes 方程得到的逾渗模型渗透率的临界标度性质也证实了这一点^[10].因而这种幂函数关系反映的是逾渗结构在临界点 p_c 处的结构分形性质,即自相似性质.对逾渗临界点处的分形多孔介质而言,只要键渗透率不具有空间相关性,则此时的渗流输运仍具有自相似性,相应的标度性质应能得以保持.

图3给出了逾渗临界点 p_c (采用二维键逾渗模

上的流速正比于 $k_{x,y} \Delta P$, ΔP 为跨键的压力差,下标 x, y 对应相应的键.根据键结合部流量守恒,节点处(图2)控制方程为

$$\sum k_{x,y} \Delta P = 0, \quad (4)$$

即

型 $p_c = 0.5$)处,当非零键渗透率 k 满足 (a, b) 上均匀分布时系统渗透率 k_t 与跨越尺度 L 的标度关系.在计算过程中,取非零键渗透率的均值 $(a + b)/2 = 1$,定义参数 $\lambda = b/a$.

参数 λ 的值反映了键渗透率 k 的空间差异,参数 λ 越大,则 k 的空间差异也越大.从图3可以看出,对非零键渗透率满足均匀分布的情形,其系统总渗透率和系统尺度在逾渗临界点处仍满足幂函数关系 $k_t \sim L^{-\mu}$,标度指数 μ 的值取决于参数 λ ,即 $\mu = \mu(\lambda)$.

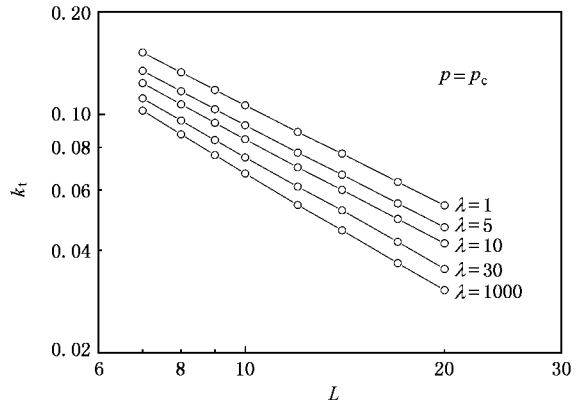


图3 逾渗临界点 p_c 处系统渗透率 k_t 与跨越尺度 L 的标度关系

经过简单的分析可知,在上述情形下系统渗透率 k_t 在逾渗临界点 p_c 处可以写成

$$k_t = \frac{a + b}{2} f_0(\lambda) L^{-\mu(\lambda)}. \quad (6)$$

图4给出了临界标度指数 μ 与参数 λ 的关系.根据图4,临界标度指数 μ 和参数 $\ln \lambda$ 之间可以用高斯函数近似拟合,具体形式为

$$\mu(\lambda) = -0.1772 \exp(-0.0662 \ln^2 \lambda) + 1.158. \quad (7)$$

通过考察中间参量 $f_0(\lambda) \times L^{-\mu(\lambda)}$ 与参数 λ 的关系,可以推测

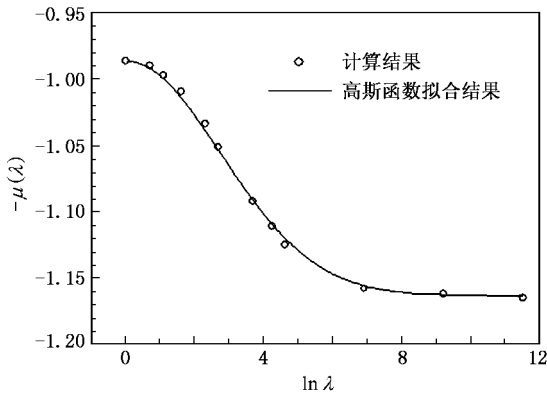


图 4 非零键值在 (a, b) 上均匀分布时临界标度指数 μ 与参数 λ 的关系

$$f_0(\lambda) = c_1 [\exp(-c_2 \ln^2 \lambda) + c_3] \times \exp[-c_4 \exp(-0.0662 \ln^2 \lambda)],$$

其中 c_1, c_2, c_3, c_4 为待定参数. 拟合 c_1, c_2, c_3, c_4 可以得到

$$f_0(\lambda) = 0.3576 [\exp(-0.2040 \ln^2 \lambda) + 2.6932] \times \exp[-0.2604 \exp(-0.0662 \ln^2 \lambda)]. \quad (8)$$

图 5 给出了利用(8)式对计算数据的拟合结果.

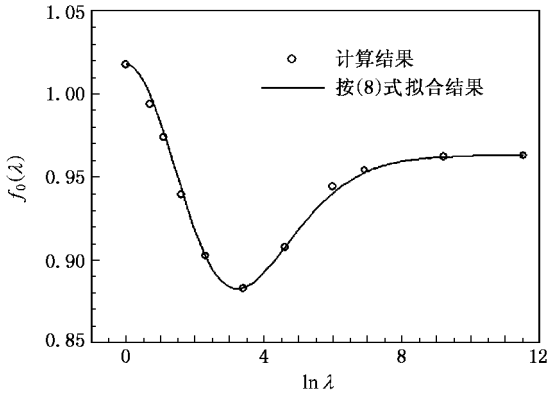


图 5 非零键值在 (a, b) 上均匀分布时函数 $f_0(\lambda)$ 与参数 λ 之间的关系

至此, 对非零键渗透率满足均匀分布时, 随机多孔介质逾渗模型的系统渗透率 k_t 在临界点处的标度关系可以写成

$$k_t = \frac{1}{2}(a + b)f_0(\lambda)L^{-\mu(\lambda)},$$

其中函数 $f_0(\lambda)$ 和 $\mu(\lambda)$ 分别由(7)和(8)式给出. 图 4 的结果表明了均匀分布参数 λ 对临界标度指数 μ

的影响. 参数 λ 越大, 相应的临界标度指数 μ 也越大, 即逾渗键渗透率的空间差异越大, 其系统渗透率的临界标度指数也越大. 根据(7)式, 其取值范围约为 $[0.98, 1.16]$.

对非零键渗透率满足均匀分布的情况, 尽管此时概率密度函数 $h(k)$ 的负一阶矩存在, 但在有限尺度 L 下, 指数 μ 仍不能看作常数. 根据标度律理论, 系统渗透率的临界指数 $\alpha = -\mu\nu$ 也不是常数, 指数 μ 和 α 仍与均匀分布的参量 $\lambda (\lambda = b/a)$ 有关. 这一数值结果和 Sahimi 关于此问题的结论不一致, 相关问题仍有待进一步深入研究.

值得注意的是, $f_0(\lambda)$ 并不是单调的, 这与均匀多孔介质中的情形不同. 换言之, 分形逾渗介质对系统宏观性质的影响不仅体现在标度律项 $L^{-\mu(\lambda)}$ 上, 也对系数项 $f_0(\lambda)$ 产生影响.

4. 结 论

本文研究了一类随机多孔介质逾渗模型的系统渗透率在临界点处的标度指数. 对逾渗模型中的非零键渗透率不再是常数, 而满足 (a, b) 间均匀分布的情形, 在逾渗临界点处对不同的系统尺度做了相应的计算, 进而得到临界标度指数. 计算结果表明: 此时的临界标度指数 μ 和逾渗键值为常数时不同, 而是均匀分布参数 $\lambda (\lambda = b/a)$ 的函数. 且临界标度指数 μ 的值随参数 λ 的增大而增大, 但随着参数 λ 趋于无穷大, 标度指数 μ 的值仍有限. 标度指数 μ 和参数 $\ln \lambda$ 之间关系可以近似用高斯函数描述, 其取值范围约为 $(0.98, 1.16)$.

Sahimi 认为, 只要非零键值所满足的概率密度函数 $h(k)$ 具有“良好”性质, 即其负一阶矩存在, 那么系统临界指数 α 就是普适的, 与函数 $h(k)$ 的参量和具体形式无关^[21]. 本文所采用的概率函数 $h(k)$ 描述的是均匀分布, 该函数 $h(k)$ 就具有“良好”性质, 但计算结果却与 Sahimi 的观点相悖. 相关问题仍有待进一步深入研究.

此外, 分形介质键值的随机分布对系统宏观渗透率的影响不仅体现在标度指数 μ 上, 也同样反映在系数项 $f_0(\lambda)$ 上. $f_0(\lambda)$ 为非单调的, 应该源于键值的随机分布与分形系统的相互作用.



- [1] Kong X Y 1999 *Advanced Mechanics of Fluids in Porous Media* (Hefei : University of Science and Technology of China Press) p31 (in Chinese) [孔祥言 1999 高等渗流力学 (合肥 : 中国科学技术大学出版社) 第 31 页]
- [2] Stanley H E , Andrade J S , Havlin S , Makse H A , Suki B 1999 *Physica A* **266** 5
- [3] Sahimi M 1995 *Flow and Transport in Porous Media and Fractured Rock* (Boston : VCH)
- [4] Liu B Q , Lü T 1997 *Introduction to the Theory of Percolation* (Beijing : Science Press) (in Chinese) [刘柏谦、吕太 1997 逾渗理论导论 (北京 : 科学出版社)]
- [5] Broadbent S R 1957 *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **53** 629
- [6] Bunde A , Havlin S 1991 *Fractals and Disordered Systems* (Heidelberg : Springer-Verlag)
- [7] Andrade J S , Almeida M P , Filho J M , Havlin S , Suki B , Stanley H E 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 901
- [8] Andrade J S , Almeida M P , Filho J M , Havlin S , Suki B , Stanley H E 1995 *Phys. Rev. E* **51** 5725
- [9] Andrade J S , Costa U M S , Almeida M P , Makse H A , Stanley H E 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 5249
- [10] Wang X H , Liu Z F , Li B , Wu Q S 2002 *Physica A* **311** 320
- [11] Liu Z F , Wang X H 2004 *Int. J. Mod. Phys. B* **18** 2523
- [12] Liu Z F , Wang X H , Mao P , Wu Q S 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 1969
- [13] Wang X H , Liu Z F 2004 *Physica A* **337** 384
- [14] Mou W W , Xu X L 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 2871 (in Chinese) [牟威圩、许小亮 2006 物理学报 **55** 2871]
- [15] Ma Z F , Zhuang Y Q , Du L , Bao J L , Li W H 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2046 (in Chinese) [马仲发、庄奕琪、杜磊、包军林、李伟华 2003 物理学报 **52** 2046]
- [16] Ma Z F , Zhuang Y Q , Du L , Wei S 2005 *Chin. Phys.* **14** 808
- [17] Patankar S V 1980 *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow* (Washington : Hemisphere)
- [18] Kogut P , Straley J P 1979 *J. Phys. C* **12** 2151
- [19] Straley J P 1982 *J. Phys. C* **15** 2343
- [20] Octavio M , Lobb C J 1991 *Phys. Rev. B* **43** 8233
- [21] Sahimi M , Hughes B D , Scriven L E , Davis H T 1983 *J. Chem. Phys.* **78** 6849
- [22] Normand J M , Herrmann H J , Hajjar M 1988 *J. Stat. Phys.* **52** 441

The critical scaling property of random percolation porous media^{*}

Liu Zhi-Feng¹⁾ Lai Yuan-Ting²⁾ Zhao Gang³⁾ Zhang You-Wei¹⁾ Liu Zheng-Feng¹⁾ Wang Xiao-Hong¹⁾

1) Department of Thermal Science and Energy Engineering , University of Science and Technology of China , Hefei 230027 , China)

2) Institute of Plasma Physics , Chinese Academy of Sciences , Hefei 230031 , China)

3) Department of Modern Mechanics , University of Science and Technology of China , Hefei 230027 , China)

(Received 12 March 2007 ; revised manuscript received 11 September 2007)

Abstract

A percolation model of random porous media , with its nonzero bonds obeying the uniform distribution , is researched in this article . The scaling exponents of the permeability are calculated at the percolation critical point . The simulation suggests that the exponents are not universal , but depending on the parameter of the uniform distribution . This indicates that even if the first negative moment of the probability density function of the nonzero bonds exists , the corresponding scaling exponent at the critical point will not be universal . Our simulation result is different from the conclusion reached by Sahimi .

Keywords : percolation , random porous media , scaling exponent , permeability

PACC : 0340G , 0570J

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10547139 , 50506029) .

† E-mail : zhaog@ustc.edu.cn