

一种低经典通信消耗的量子远程态制备方案^{*}

陶 原[†] 潘 炜 罗 斌

(西南交通大学信息科学与技术学院, 成都 610031)

(2007 年 7 月 6 日收到, 2007 年 11 月 19 日收到修改稿)

设计了一组新的量子远程态制备步骤, 在发送方对手中的粒子完成测量后, 接收方采用该步骤可以有效降低远程态制备的经典通信消耗. 给出一种利用部分纠缠的三粒子 Greenberger-Horne-Zeilinger(GHZ)态和部分纠缠的二粒子态作信道, 远程制备一个三粒子 GHZ 态的方案, 以此方案为例具体说明上述方法的运用步骤并给出了该方法的适用范围. 结果表明, 运用该方法后只需消耗 1 bit 经典信息即可远程制备一个三粒子 GHZ 态.

关键词: 远程态制备, 经典通信消耗, 三粒子 Greenberger-Horne-Zeilinger 态, 量子信道

PACC: 0365

1. 引 言

1993 年, Bennett 等^[1]提出了量子隐形传态的概念. 利用局域操作及经典通信, 发送方(Alice)可以将一个未知量子态经量子信道传送给接收方(Bob). 在该方案中隐形传输 1 bit 量子信息需要消耗 2 bit 经典信息. 文献 2—4 提出了远程态制备的概念, 它与隐形传态有着相同的目的, 所不同的是在远程态制备中被传送的量子态对发送方是已知的. 远程制备 1 bit 某些限制范围内的量子信息只需消耗 1 bit 经典信息, 其经典通信消耗是隐形传态方案的一半. 近年来人们提出了许多远程态制备的方案, 其中包括利用两个 Einstein-Podolsky-Rosen(EPR)纠缠对或一个三粒子 Greenberger-Horne-Zeilinger(GHZ)态作信道远程制备二粒子纠缠态的方案^[5,6]、利用三个 EPR 纠缠对作信道远程制备三粒子纠缠态的方案^[7]、利用两个三粒子 GHZ 态作信道远程制备四粒子纠缠态的方案^[8]以及利用一个二粒子纠缠态作信道远程制备 GHZ 态的方案^[9]. 而在文献 10 的方案中 W 态被作为信道来实现远程态制备; Yu 等^[11]提出的方案则可以一次性帮助两个接收方同时制备量子态; Chen 等^[12]分析了噪声对远程态制备迹距的影响. 此

外, 远程态制备在实验上也获得了成功, 已有利用核磁共振技术实现量子态远程制备的实验报道^[13].

那么是否可以在完成相同远程态制备任务的同时降低经典通信消耗呢? 本文将尝试采用一种不同的制备步骤以获得更低的经典通信消耗. 首先给出一种三粒子 GHZ 态远程制备方案, 其信道仅由五个粒子组成. 同时, 将该方案作为例子, 对本文设计的远程态制备步骤作具体介绍. 文献 5, 8 中要求 Bob 对 Alice 的四种不同测量结果实施不同的操作, 这使得 Alice 必须通过经典信道通知 Bob 自己的具体测量结果. 与此不同, 在新的制备步骤中 Alice 只需发送 1 bit 经典信息, Bob 在接收到该信息后引入一个辅助粒子, 接着实施一组控制-非操作, 最后对该辅助粒子进行一次单粒子 Von-Neumann 测量即可单独地区分出 Alice 的部分测量结果. 通过上述步骤可以有效减少远程态制备过程中的经典通信消耗, 且该制备步骤可以推广至某些其他量子态的远程制备方案中, 并能取得明显的效果.

2. 三粒子 GHZ 态的远程制备

下面以三粒子 GHZ 态的远程制备为具体实例介绍一种低经典通信消耗的远程态制备步骤.

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 10174057, 90201011), 教育部科学技术研究重点项目(批准号: 105148)和高等学校博士学科点专项科研基金(批准号: 20030613007)资助的课题.

[†] E-mail: luiguyi@yahoo.com.cn

假设 Alice 想帮助 Bob 远程制备一个三粒子 GHZ 态

$$|\phi\rangle = \alpha|000\rangle + \beta|111\rangle, \quad (1)$$

其中 α 为实数而 β 为复数, 满足 $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. 我们假设 α 和 β 均是 Alice 所知道的, 而 Bob 均不知道. 同时假设 Alice 和 Bob 共享的量子信道由一个部分纠缠的三粒子 GHZ 态和一个部分纠缠的二粒子态组成, 分别表示如下:

$$|\psi_{123}\rangle = (a|000\rangle + b|111\rangle)_{123}, \quad (2)$$

$$|\psi_{45}\rangle = (c|01\rangle + d|10\rangle)_{45}, \quad (3)$$

其中实系数 a, b 满足关系式 $|a|^2 + |b|^2 = 1$, 且 $|b| \leq |a|$; 实系数 c, d 满足关系式 $|c|^2 + |d|^2 = 1$, 且 $|d| \leq |c|$. 粒子 1 和粒子 4 属于 Alice, 粒子 2、粒子 3 和粒子 5 属于 Bob. 为帮助 Bob 远程制备一个 (1) 式中的三粒子 GHZ 态, Alice 必须对粒子 1 和粒子 4 进行一次二粒子投影测量. 本方案中 Alice 将在一组相互正交的基矢量 $\{|\varphi\rangle, |\varphi_{\perp}\rangle, |\psi\rangle, |\psi_{\perp}\rangle\}$ 下对手中粒子进行测量, 这组基与矢量 $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ 具有相关性, 具体关系如下:

$$|\varphi\rangle_{14} = (\alpha|00\rangle + \beta|11\rangle)_{14}, \quad (4)$$

$$|\varphi_{\perp}\rangle_{14} = (\beta^*|00\rangle - \alpha|11\rangle)_{14}, \quad (5)$$

$$|\psi\rangle_{14} = (\alpha|01\rangle + \beta|10\rangle)_{14}, \quad (6)$$

$$|\psi_{\perp}\rangle_{14} = (\beta^*|01\rangle - \alpha|10\rangle)_{14}. \quad (7)$$

将五个组成信道的粒子所处状态在这组基下展开为

$$\begin{aligned} & |\psi_{123}\rangle \otimes |\psi_{45}\rangle \\ &= |\varphi\rangle_{14} (aca|001\rangle + bd\beta^*|110\rangle)_{235} \\ &+ |\varphi_{\perp}\rangle_{14} (ac\beta|001\rangle - bd\alpha|110\rangle)_{235} \\ &+ |\psi\rangle_{14} (ada|000\rangle + bc\beta^*|111\rangle)_{235} \\ &+ |\psi_{\perp}\rangle_{14} (ad\beta|000\rangle - bc\alpha|111\rangle)_{235}. \quad (8) \end{aligned}$$

在 (8) 式中, 如果 Alice 对粒子 1 和粒子 4 的测量结果为 $|\varphi_{\perp}\rangle_{14}$, 属于 Bob 的粒子 2、粒子 3 和粒子 5 将处于状态

$$|\psi_{1235}\rangle = (ac\beta|001\rangle - bd\alpha|110\rangle)_{235}. \quad (9)$$

如果 Alice 的测量结果为 $|\psi_{\perp}\rangle_{14}$, 属于 Bob 的粒子将处于状态

$$|\psi_{235}\rangle = (ad\beta|000\rangle - bc\alpha|111\rangle)_{235}. \quad (10)$$

Bob 此时可以对 (9) 式作用幺正变换 U_1 , 对 (10) 式作用幺正变换 U_2 . U_1, U_2 分别为

$$U_1 = (|10\rangle - |01\rangle)_2$$

$$\otimes (|10\rangle + |01\rangle)_3 \otimes I_5, \quad (11)$$

$$U_2 = (|10\rangle - |01\rangle)_2 \otimes (|10\rangle + |01\rangle)_3 \otimes (|10\rangle + |01\rangle)_5. \quad (12)$$

Bob 对 (9) 式中的粒子 2、粒子 3 和粒子 5 作用幺正变换 U_1 后得到

$$|\psi_{1235}\rangle = (bd\alpha|000\rangle + ac\beta|111\rangle)_{235}. \quad (13)$$

Bob 对 (10) 式中的粒子 2、粒子 3 和粒子 5 作用幺正变换 U_2 后得到

$$|\psi_{235}\rangle = (bc\alpha|000\rangle + ad\beta|111\rangle)_{235}. \quad (14)$$

如果按照上述步骤操作, 对于 Alice 的不同测量结果, Bob 必须相应地选择不同的幺正变换. 考虑到 Alice 有四种不同的测量结果, 她需要通过经典信道向 Bob 传输 2 bit 经典信息才能使 Bob 正确选择所对应的幺正变换.

本文设计了一组不同的制备步骤. Bob 引入一个初态为 $|0\rangle_A$ 的辅助比特, 如果此时 Alice 的测量结果为 $|\varphi_{\perp}\rangle_{14}$, 则属于 Bob 的粒子处于状态

$$\begin{aligned} & |\psi_{1235}\rangle \otimes |0\rangle_A = (ac\beta|001\rangle \\ & - bd\alpha|110\rangle)_{235} \otimes |0\rangle_A. \quad (15) \end{aligned}$$

如果 Alice 的测量结果为 $|\psi_{\perp}\rangle_{14}$, 属于 Bob 的粒子处于状态

$$\begin{aligned} & |\psi_{235}\rangle \otimes |0\rangle_A = (ad\beta|000\rangle \\ & - bc\alpha|111\rangle)_{235} \otimes |0\rangle_A. \quad (16) \end{aligned}$$

接着 Bob 对属于自己的粒子进行三次控制-非操作, 分别以粒子 5 作控制比特, 辅助粒子 A 作受控比特, 辅助粒子 A 作控制比特, 粒子 5 作受控比特, 粒子 2 作控制比特, 辅助粒子 A 作受控比特. 经过这三次控制-非操作后 (15) 式中的粒子 2、粒子 3、粒子 5 和辅助粒子 A 处于状态

$$\begin{aligned} & |\psi_{1235A}\rangle = (ac\beta|000\rangle \\ & - bd\alpha|110\rangle)_{235} \otimes |1\rangle_A. \quad (17) \end{aligned}$$

(16) 式中的粒子 2、粒子 3、粒子 5 和辅助粒子 A 处于状态

$$\begin{aligned} & |\psi_{235A}\rangle = (ad\beta|000\rangle \\ & - bc\alpha|110\rangle)_{235} \otimes |0\rangle_A. \quad (18) \end{aligned}$$

此时辅助粒子 A 退出纠缠, Bob 只需测量辅助粒子 A 的状态即可区分出 Alice 的不同测量结果 ($|\varphi_{\perp}\rangle_{14}$ 或 $|\psi_{\perp}\rangle_{14}$). 由此可见, 在本文设计的制备步骤中, 当 Alice 的测量结果为 $|\varphi_{\perp}\rangle_{14}$ 或 $|\psi_{\perp}\rangle_{14}$ 时, Bob 对属于自己的粒子采取了完全相同的处理步骤并通过测

量自己手中的辅助粒子成功地区分了这两种情况. 所以, 此时不再需要 Alice 通过传输经典信息来通知 Bob 自己的具体测量结果, 这样就有效地降低了经典通信消耗.

Bob 接着对属于自己的粒子 2、粒子 3 和粒子 5 作用一个么正变换

$$U_3 = (|1\ 0\rangle - |0\ 1\rangle)_2 \otimes (|1\ 0\rangle + |0\ 1\rangle)_3 \otimes I_5. \quad (19)$$

然后再进行一次控制-非操作, 粒子 2 为控制比特, 粒子 5 为受控比特. 经上述操作 (17) 式中粒子 2、粒子 3 和粒子 5 的状态将与 (13) 式相同 (18) 式中这三个粒子的状态将与 (14) 式相同. 这样, 按照新的制备步骤, Bob 获得了与普通远程态制备方案相同的结果, 但只消耗了 1 bit 经典信息.

此时的量子信道处于非最大纠缠状态, 被制备的量子态发生畸变, 畸变态中含有未知的信道参数 a, b, c, d . 文献 [14] 提出了概率隐形传态的概念, 通过引入辅助比特并构造么正变换矩阵, 使得畸变的量子态得到恢复. 将该方法推广到量子态的远程制备方案中, 通过以下步骤可以使量子态得到恢复. 由于 Bob 已成功区分了 Alice 的两种测量结果, 他可以对这两种情况分别处理. 当 Alice 测量结果为 $|\varphi_{\perp 14}\rangle$ 时, Bob 引入一个初态为 $|0_B\rangle$ 的辅助比特, 并对粒子 5 和辅助粒子 B 作用一个以 $\{|00_{5B}\rangle, |10_{5B}\rangle, |01_{5B}\rangle, |11_{5B}\rangle\}$ 为基的么正变换矩阵 U_4 , 即

$$U_5 = \begin{pmatrix} \frac{d}{c} & 0 & \sqrt{1 - \left(\frac{d}{c}\right)^2} & 0 \\ 0 & \frac{b}{a} & 0 & \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \\ \sqrt{1 - \left(\frac{d}{c}\right)^2} & 0 & -\frac{d}{c} & 0 \\ 0 & \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} & 0 & -\frac{b}{a} \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Bob 对 (23) 式中的粒子 2、粒子 3、粒子 5 和辅助粒子 B 作么正变换矩阵 U_5 , 可得到

$$\begin{aligned} |\psi_{2\ 235B}\rangle = & (bd\alpha|000\rangle + \beta|111\rangle)_{235} \otimes |0_B\rangle \\ & + (\sqrt{(bc)^2 - (bd)^2}\alpha|000\rangle_{235} \\ & + \sqrt{(ad)^2 - (bd)^2}\beta|111\rangle_{235}) \\ & \otimes |1_B\rangle. \end{aligned} \quad (25)$$

$$U_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{bd}{ac} & 0 & \sqrt{1 - \left(\frac{bd}{ac}\right)^2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1 - \left(\frac{bd}{ac}\right)^2} & 0 & -\frac{bd}{ac} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

引入一个初态为 $|0_B\rangle$ 的辅助比特后, 属于 Bob 的粒子 2、粒子 3、粒子 5 和辅助粒子 B 处于状态

$$|\psi_{1\ 235} \otimes |0_B\rangle = (bd\alpha|000\rangle + ac\beta|111\rangle)_{235} \otimes |0_B\rangle. \quad (21)$$

Bob 对 (21) 式中的粒子 2、粒子 3、粒子 5 和辅助粒子 B 作么正变换矩阵 U_4 , 可得到

$$\begin{aligned} |\psi_{1\ 235B}\rangle = & (bd\alpha|000\rangle + \beta|111\rangle)_{235} \otimes |0_B\rangle \\ & + (\sqrt{(ac)^2 - (bd)^2}\beta|111\rangle_{235} \otimes |1_B\rangle). \end{aligned} \quad (22)$$

最后, Bob 对辅助粒子 B 进行测量, 若测量结果为 $|1_B\rangle$, 则远程态制备失败; 若测量结果为 $|0_B\rangle$, 则远程制备三粒子 GHZ 态成功, 成功概率为 $(bd)^2$.

对 Alice 测量结果为 $|\varphi_{\perp 14}\rangle$ 的情况, Bob 同样引入一个初态为 $|0_B\rangle$ 的辅助比特, 属于 Bob 的粒子 2、粒子 3、粒子 5 和辅助粒子 B 处于状态

$$\begin{aligned} |\psi_{2\ 235} \otimes |0_B\rangle = & (bc\alpha|000\rangle + ad\beta|111\rangle)_{235} \otimes |0_B\rangle. \end{aligned} \quad (23)$$

Bob 在粒子 5 和辅助粒子 B 上作用一个以 $\{|00_{5B}\rangle, |10_{5B}\rangle, |01_{5B}\rangle, |11_{5B}\rangle\}$ 为基的么正变换矩阵 U_5 , 即

Bob 对辅助粒子 B 作测量, 当结果为 $|0_B\rangle$ 时, 则远程态制备成功, 成功概率同样为 $(bd)^2$.

当 Alice 对粒子 1 和粒子 4 的投影测量结果为 $|\varphi_{14}\rangle$ 或 $|\psi_{14}\rangle$ 时, 属于 Bob 的粒子分别处于状态 $(ac\alpha|001\rangle + bd\beta^*|110\rangle)_{235}$ 或 $(ad\alpha|000\rangle + bc\beta^*|111\rangle)_{235}$. 由于 Bob 对所要制备的量子态一无

所知,他无法通过以上操作获得要制备的三粒子 GHZ 态 $|\phi\rangle$, 远程态制备失败. 但是当 α, β 均为实数或 $|\phi\rangle = (1/\sqrt{2})(|000\rangle + e^{i\varphi}|111\rangle)$ 时, Bob 依然可以通过与以上类似的方法获得所要制备的量子态. 因此, 在本方案中只需传输 1 bit 经典信息即可实现该三粒子纠缠态的远程制备. 具体方法如下: Alice 向 Bob 发送经典信息“0”或“1”, 其中“0”表示 Alice 的测量结果为 $|\varphi_{\perp 14}\rangle$ 或 $|\psi_{\perp 14}\rangle$, “1”表示 Alice 的测量结果为 $|\varphi_{14}\rangle$ 或 $|\psi_{14}\rangle$, Bob 收到该经典信息后采取相应步骤即可完成量子态的远程制备.

当信道处于最大纠缠, 即 $|a| = |b| = 1/\sqrt{2}$, $|c| = |d| = 1/\sqrt{2}$ 时, 该信道由一个三粒子 GHZ 态和一个 EPR 态组成, 此时远程制备一个三粒子 GHZ 态的成功概率为 $\chi(bd)^2 = 1/2$. 显然, 在这种情况下, Bob 不需要引入辅助粒子 $|0_B\rangle$, 也不需要与粒子 5 和辅助粒子 B 作用幺正变换 U_4 . 收到 Alice 公布的 1 bit 经典信息后, Bob 引入辅助粒子 $|0_A\rangle$ 并进行一组控制-非操作, 对比 (17) 与 (18) 式可以发现, 无论此时 Alice 的测量结果为 $|\varphi_{\perp 14}\rangle$ 还是 $|\psi_{\perp 14}\rangle$, 属于 Bob 的粒子 2、粒子 3 和粒子 5 都将处于相同的状态, 所以他甚至不必对辅助粒子 $|0_A\rangle$ 进行测量即可远程制备该三粒子纠缠态, 这时方案将大为简化.

除本方案外, 某些同样采用二粒子投影测量的方案也可以比较容易地采用本文设计的制备步骤来降低其经典通信消耗. 例如远程制备二粒子纠缠态的文献 [5], 远程制备三粒子纠缠态的文献 [7] 及远程制备四粒子纠缠态的文献 [8], 具体的制备方法将

不再赘述. 但是并非所有的量子远程态制备方案都可以使用该制备步骤, 比如一些使用单粒子 Von-Neumann 测量的方案^[3, 11] 就无法采用该制备步骤来处理.

目前, 人们已提出了许多可行的三粒子 GHZ 态制备方案^[15, 16], 因此本文中所采用的信道组成是切合实际的. 另外, 方案中两次用到的引入辅助粒子并进行一组变换, 最后再测量该粒子的方法在概率隐形传态方案^[14] 中已获得应用并被广泛认可, 所以该远程态制备步骤是合理的.

3. 结 论

在本文提出的三粒子 GHZ 态远程制备方案中, 针对发送方的不同测量结果, 接收方采用了一组新的制备步骤, 使方案的经典通信消耗下降为原来的一半, 只需传输 1 bit 经典信息即可远程制备一个三粒子纠缠态. 由于采用了不同的制备步骤, 与其他远程态制备方案相比, 本方案在降低经典通信消耗方面具有以下明显的优势: 比利用三个 EPR 纠缠对作信道远程制备三粒子纠缠态的方案使用更少的粒子组成信道, 同时具有更小的经典通信消耗. 比利用两个 EPR 纠缠对作信道远程制备二粒子纠缠态的方案制备了更多的粒子, 而经典通信消耗却更小. 这种制备步骤之所以能够降低经典通信消耗, 简言之, 其原理主要是接收方单独区分了手中两个互相正交的量子态, 这是符合量子力学原理的. 所以, 该制备步骤可以合理地运用到某些其他的远程态制备方案中去.

[1] Bennett C H, Brassard G, Crepeau C, Jozsa R, Peres A, Wootters W K 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 1895
 [2] Lo H K 2000 *Phys. Rev. A* **62** 012313
 [3] Pati A K 2001 *Phys. Rev. A* **63** 014302
 [4] Bennett C H, Divincenzo D P, Shor P W, Smolin J A, Terhal B M, Wootters W K 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 077902
 [5] Liu J M, Wang Y Z 2003 *Phys. Lett. A* **316** 159
 [6] Shi B S, Tomita A 2002 *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **4** 380
 [7] Ma Y C, Xu M D 2004 *Acta Sin. Quantum Opt.* **10** 153 (in Chinese) [马蕴超、徐明东 2004 量子光学学报 **10** 153]

[8] Dai H Y, Chen P X, Liang L M, Li C Z 2006 *Phys. Lett. A* **355** 285
 [9] Lin X, Li H C, Lin X M, Li X H, Yang R C 2007 *Chin. Phys.* **16** 1209
 [10] Liu J M, Wang Y Z 2004 *Chin. Phys.* **13** 147
 [11] Yu Y F, Feng J, Zhan M S 2003 *Phys. Lett. A* **310** 329
 [12] Chen A X, Li J H 2005 *Chin. Phys.* **14** 1507
 [13] Peng X H, Zhu X W, Fang X M, Feng M, Liu M L, Gao K L 2003 *Phys. Lett. A* **306** 271
 [14] Li W L, Li C F, Guo G C 2000 *Phys. Rev. A* **61** 034301
 [15] Zheng S B 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 230404
 [16] Guo G P, Li C F, Li J, Guo G C 2002 *Phys. Rev. A* **65** 042102

A scheme for remote state preparation with low classical communication cost^{*}

Tao Yuan[†] Pan Wei Luo Bin

(*School of Information Science and Technology, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China*)

(Received 6 July 2007 ; revised manuscript received 19 November 2007)

Abstract

We propose a new remote state preparation process. After the sender measures her particles, adopting the new process, the receiver can greatly reduce the classical communication cost. With a partial entangled three-particle Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ) state and a partial entangled two-particle state as the quantum channel, we present a scheme for preparing remotely a three-particle GHZ state. Taking this scheme as an example, we show how to use this process in detail and present the application range of this process. Analysis shows: only one classical bit is required for remote preparation of the three-particle GHZ state by using this process.

Keywords : remote state preparation , classical communication cost , three-particle Greenberger-Horne-Zeilinger state , quantum channel

PACC : 0365

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10174057 , 90201011) , the Key Program of Science and Technology Research of Ministry of Education , China (Grant No. 105148) and the Doctoral Program Foundation of Institution of Higher Education of China (Grant No. 20030613007).

[†] E-mail : luiguyi@yahoo.com.cn