第 57 卷 第 4 期 2008 年 4 月
1000-3290/2008/57(04)/2021-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.57,No.4,April,2008


# 一类广义强阻尼 Sine-Gordon 方程的整体解*

张建文[1)†] 王旦霞[1)] 吴润衡[2)]

1)(太原理工大学理学院,太原 030024)

2)(北方工业大学理学院,北京 100041)

(2006 年 11 月 23 日收到;2007 年 9 月 3 日收到修改稿)

同时考虑黏性效应及外阻尼作用研究了一类广义强阻尼 Sine-Gordon 方程.利用 Galerkin 方法,首先证明了该方程在初值 $u(x,0)\in H_0^1(\Omega)$,$u_t(x,0)\in L^2(\Omega)$的条件下初边值问题存在整体弱解 $u(x,t)$,并证明了整体弱解关于初始条件具有连续的依赖性及唯一性.其次,证明了该方程在初值 $u(x,0)\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$,$u_t(x,0)\in H_0^1(\Omega)$的条件下初边值问题存在整体强解 $u(x,t)$.

**关键词**:Sine-Gordon 型方程,强阻尼,Galerkin 方法,整体解

**PACC**:0365G,0290

## 1.引 言

Sine-Gordon 方程是物理学中很有用的模型.1962 年,Josephson[1] 首次将 Sine-Gordon 型方程用于超导体中的 Josephson 结,其方程形式为

$$u_{tt}-u_{xx}+\sin u=0,$$

其中 $u_{tt}$为$u$ 关于自变量$t$ 的二阶偏导数,$u_{xx}$为$u$ 关于自变量$x$ 的二阶偏导数.近年来,关于 Sine-Gordon 方程解的研究主要集中在两个方面.一是利用各种代数分析法求各种方程的精确解,如 Zheng 等[2] 利用变形映射法给出了非线性 Sine-Gordon 方程的精确解.He 等[3] 利用推广的 F 展开法求出了某类 Sine-Gordon 方程的精确解等.另一方面是定性研究解的性态问题,如 Lu 等[4] 和 Zhang 等[5] 求解更一般的 Sine-Gordon 方程,给出了一个完整的波函数和能量方程.Temam[6] 证明了较一般的 Sine-Gordon 方程整体吸引子的存在性,并给出了吸引子的维数估计.Zhu[7] 研究了方程

$$u_{tt}+\alpha u_t-u_{xx}+\lambda g(\sin u)=f(x,t)$$

整体解的存在性及唯一性.可是,我们至今未见到关于强阻尼作用下的广义 Sine-Gordon 方程解的存在性结果.本文考虑强阻尼的作用,研究一类广义强阻尼 Sine-Gordon 方程

$$u_{tt}+\alpha u_t-u_{xx}+g(\sin u)=\beta u_{txx}+f(x,t),\qquad(1)$$

具有初始条件

$$u(x,0)=u_0,\quad u_t(x,0)=u_1\qquad(2)$$

及边界条件

$$u(0,t)=0,\quad u(l,t)=0\qquad(3)$$

的初边值问题整体强解的存在性.

## 2.基本假设

对于方程(1),我们有如下假设:设 $\Omega=(0,l)$,$(l>0)$,记 $Q=\Omega\times[0,T]$($T$ 为充分大的正数),$\alpha>0$ 为耗散系数,$\beta>0$ 为常数,$f(x,t)$为外力扰动项.为书写方便,以下讨论中某二元函数 $h(x,t)$ 关于 $x$ 的偏导数记为 $h_x(x,t)$,$h_{xx}(x,t)$等;关于 $t$ 的偏导数记为 $h_t(x,t)$,$h_{tt}(x,t)$等.设 $f(x,t)$ 关于 $x,t$ 的偏导数存在,且关于 $x$ 的偏导数在 $L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;H)$中;关于 $t$ 的偏导数也在 $L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;H)$中,且满足

$$f(0,t)=f(l,t)=0,\qquad(4)$$

$$f(x,t)\in L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;H).\qquad(5)$$

对于非线性函数 $g(\cdot)$,满足

* 山西省自然科学基金(批准号:2006011005)和国家自然科学基金(批准号:10772131)资助的课题.

† E-mail:jianwenz@public.ty.sx.cn

$$
\begin{aligned}
&g(0)=0,\\
&g(s)\in C^2(R),\\
&|g(s)|\leqslant c(1+|s|^3),\\
&\left|\frac{\mathrm{d}g(s)}{\mathrm{d}s}\right|\leqslant c(1+|s|^2).
\end{aligned}\tag{6}
$$

其中 $c>0$. 我们定义如下 Sobolev 空间：

$$
\begin{aligned}
&S_1=H_0^1(\Omega),\\
&S_2=H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),\\
&H=L^2(\Omega).
\end{aligned}
$$

## 3. 主要结果及证明

**定理 1**　设 $f(x,t)$, $g(s)$ 满足上述假设和条件(4)—(6)式，$u_0\in S_1$, $u_1\in H$，则初边值问题(1)—(3)式存在整体弱解，且

$$
\begin{aligned}
&u\in L^2(0,T;S_1)\cap L^\infty(0,T;S_1),\\
&u_t\in L^2(0,T;H)\cap L^\infty(0,T;H).
\end{aligned}
$$

**证明**　首先，讨论近似解. 记 $A$ 为 Laplace 算子 $\Delta$ 的负值，则 $A$ 特征值与特征向量满足

$$
\begin{aligned}
&A\omega_j=\lambda_j\omega_j=-\omega_{jxx},\\
&0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_j\leqslant\cdots,\\
&\lambda_j\to\infty\ (j\to\infty),
\end{aligned}\tag{7}
$$

且特征向量 $\{\omega_j(x)\}$ 构成 $S_1$ 的一组完备正交基. 注意到边界条件(3)式，所以 $\omega_j(0)=\omega_j(l)=0$，对一切的 $m\in N$，令

$$
W^m=\mathrm{span}\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m\}.
$$

寻求一个函数

$$
u^m(x,t)=\sum_{j=1}^m a_j^m(t)\omega_j(x),
$$

其中 $a_j^m(t)$ 为未知函数，使得对于任意的 $\omega_i\in W^m$ 满足逼近方程

$$
\begin{aligned}
&(u_{tt}^m,\omega_i)+\alpha(u_t^m,\omega_i)+(u_x^m,\omega_{ix})+(g(\sin u),\omega_i)\\
&+\beta(u_{tx}^m,\omega_{ix})=(f(x,t),\omega_i).
\end{aligned}\tag{8}
$$

若取

$$
u^m(x,0)=u_0^m=\sum_{i=1}^m\alpha_i^m\omega_i\to u_0\quad(\text{在 } S_1 \text{ 中强收敛}),\tag{9}
$$

$$
u_t^m(x,0)=u_1^m=\sum_{i=1}^m\beta_i^m\omega_i\to u_1\quad(\text{在 } H \text{ 中强收敛}),\tag{10}
$$

则(8)—(10)式等价于一个常微分方程组的柯西问题，由 Peano 定理知，存在 $t_m>0$，使得在 $[0,t_m]$ 中存在唯一的解 $u^m(x,t)$.

以下讨论中，用 $C$ 表示与 $m$, $T$ 均无关的常数，且它们在不同的表达式中可能有不同的值.

其次，作先验估计. 在(8)式中两边同乘以 $a_{tt}^m(t)+\varepsilon a_i^m(t)$，再对 $i$ 从 1 到 $m$ 求和，令

$$
v^m=u_t^m+\varepsilon u^m,
$$

得

$$
\begin{aligned}
&\frac12\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\|v^m\|^2+\|u_x^m\|^2+\beta\varepsilon\|u_x^m\|^2]\\
&+(\alpha-\varepsilon)\|v^m\|^2-(\alpha-\varepsilon)\varepsilon(u^m,v^m)\\
&+\varepsilon\|u_x^m\|^2+\beta\|u_{tx}^m\|^2\\
=&(f(x,t)-g(\sin u^m),v^m).
\end{aligned}\tag{11}
$$

设

$$
\begin{aligned}
&0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0,\\
&\varepsilon_0=\min\left(\frac{\alpha}{4},\frac{\lambda_1}{2\alpha}\right),\\
&\alpha_1=\frac{\varepsilon}{2},
\end{aligned}
$$

注意到

$$
\begin{aligned}
&(\alpha-\varepsilon)\|v^m\|^2-(\alpha-\varepsilon)\varepsilon\|u^m\|\,\|v^m\|\\
&+\varepsilon\|u_x^m\|^2+\beta\|u_{tx}^m\|^2\\
>&\frac{\alpha_1}{1+\beta\varepsilon}[\|v^m\|^2+(1+\beta\varepsilon)\|u_x^m\|^2].
\end{aligned}\tag{12}
$$

取

$$
\alpha_2=\frac{\alpha_1}{1+\beta\varepsilon}>0,
$$

记

$$
y(t)=(\|v^m\|^2+\|u_x^m\|^2+\beta\varepsilon\|u_x^m\|^2),
$$

由柯西-许瓦兹不等式及 Gronwall 不等式，有

$$
\begin{aligned}
&\|v^m\|^2+\|u_x^m\|^2+\beta\varepsilon\|u_x^m\|^2\\
<&y(0)\exp(-\alpha_2t)+C\int_0^t\|f\|^2\mathrm{d}\tau\\
&+\frac{C}{\alpha_2}(1-\exp(-\alpha_2t)).
\end{aligned}\tag{13}
$$

因为 $u_1\in H$, $u_0\in S_1$，故

$$
\begin{aligned}
y(0)=&\|v^m(x,0)\|^2+\|u_x^m(x,0)\|^2\\
&+\beta\varepsilon\|u_x^m(x,0)\|^2
\end{aligned}
$$

为有界数列. 又由于

$$
f(x,t)\in L^\infty(0,T;H),
$$

故

$$
\int_0^t\|f\|^2\mathrm{d}\tau<C,
$$

所以存在常数 $C>0$，使得

$$
\|u_x^m\|,\ \|v^m\|<C,
$$

从而

$$u_x^m \in L^\infty(0,T;H),$$
$$v^m \in L^\infty(0,T;H).$$

进一步由庞加莱不等式，得

$$u_t^m = v^m - \varepsilon u^m \in L^\infty(0,T;H).$$

最后，讨论收敛性．综上可得

$$\|u_t^m\|,\|u_x^m\|,\|u^m\| < C,$$

故存在子序列 $\{u^\mu\}$ 满足 $u^\mu \to u$ 在 $L^\infty(0,T;S_1)$ 中弱星收敛；$u_t^\mu \to u$ 在 $L^\infty(0,T;H)$ 中弱星收敛．从而 $u_\mu \to u$ 在 $L^2(0,T;S_1)$ 弱星收敛；$u_t^\mu \to u_t$ 在 $L^2(0,T;H)$ 中弱星收敛．由 $S_1 \subset H \subset S'$（$S_1'$ 是 $S_1$ 的共轭空间）及文献[8]，有 $u^\mu \to u$ 在 $L^2(0,T;H)$ 中强收敛；$u_t^\mu \to u_t$ 在 $L^2(0,T;S_1')$ 中强收敛．由 $g(\sin u)$ 的条件，当 $m \to \infty$ 时，对(9)式取弱星极限，则有 $u$ 满足方程(1)，且

$$u \in L^2(0,T;S_1) \cap L^\infty(0,T;S_1),$$
$$u_t \in L^2(0,T;H) \cap L^\infty(0,T;H).$$

证毕．

**定理 2**　在定理 1 的条件下，假设 $u,v$ 是初边值问题(1)—(3)式的两个解，且满足 $u_0,v_0 \in S_1$，$u_1,v_1 \in H$，记 $p = u - v$，则存在常数 $M_1$，有

$$\|p\|^2 + \|p_x(t)\|^2 \leqslant (\|p_t(0)\|^2 + \|p_x(0)\|^2)\exp(M_1 t). \tag{14}$$

**证明**　将 $u,v$ 分别代入(1)式，再将两式相减，与 $\omega = p_t$ 作内积，可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(p_t,p_t)+(p_x,p_x)] \leqslant (g(\sin v) - g(\sin u),p_t).$$

进一步，由中值定理得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(p_t,p_t)+(p_x,p_x)] \leqslant 2C\|p\|\|p_t\|.$$

所以存在常数 $M_1 = \sqrt{2}Cl$，使得(14)式成立．证毕．

**定理 3**　定理 1 中的解是唯一的．

定理 3 是定理 2 的直接推论．

**定理 4**　设 $f(x,t)$，$g(s)$ 满足定理 1 的条件，$u_0 \in S_2$，$u_1 \in S_1$，则初边值问题(1)—(3)式存在整体强解，且

$$u \in L^2(0,T;S_2) \cap L^\infty(0,T;S_2),$$
$$u_t \in L^2(0,T;S_1) \cap L^\infty(0,T;S_1).$$

**证明**　首先，讨论近似解．类似定理 1 的证明寻求一个函数

$$u^m(x,t) = \sum_{j=1}^m a_j^m(t)\omega_j(x),$$

其中 $a_j^m(t)$ 为未知函数，使得对于任意的 $\omega_i \in W^m$，满足逼近方程

$$\begin{aligned}&(u_{tt}^m,\omega_i) + \alpha(u_t^m,\omega_i) - (u_{xx}^m,\omega_i) + (g(\sin u^m),w_i)\\&= \beta(u_{txx}^m,\omega_i) + (f(x,t),\omega_i).\end{aligned} \tag{15}$$

若取

$$u^m(x,0) = u_0^m = \sum_{i=1}^m \alpha_i^m\omega_i \to u_0 \quad (\text{在 } S_2 \text{ 中强收敛}), \tag{16}$$

$$u_t^m(x,0) = u_1^m = \sum_{i=1}^m \beta_i^m\omega_i \to u_1 \quad (\text{在 } S_1 \text{ 中强收敛}), \tag{17}$$

则(15)—(17)式等价于一个常微分方程组的柯西问题，由 Peano 定理知，存在 $t_m > 0$，使得在 $[0,t_m]$ 中存在唯一的解 $u^m(t)$．

其次，讨论先验估计．在(15)式两边同乘以 $\lambda_i a_{it}^m(t) + \varepsilon a_i^m(t)$，并对 $i$ 从 1 到 $m$ 求和，记

$$v^m = u_t^m + \varepsilon u^m,$$

则

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\|Au^m\|^2 + \|v_x^m\|^2 + \beta\varepsilon\|u_{xx}^m\|^2]\\&+ \varepsilon\|Au^m\|^2 + (\alpha - \varepsilon)\|v_x^m\|^2\\&- \varepsilon(\alpha-\varepsilon)(Au^m,v^m) + \beta\|u_{txx}^m\|^2\\&+ (g(\sin u^m),Av^m) = (f,Av^m).\end{aligned} \tag{18}$$

设

$$0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0,$$
$$\varepsilon_0 = \min\left(\frac{\alpha}{4},\frac{\lambda_1}{2\alpha}\right),$$

同上述讨论，有

$$\varepsilon\|Au^m\|^2 + (\alpha-\varepsilon)\|v_x^m\|^2 - \varepsilon(\alpha-\varepsilon)(Au^m,v^m) + \beta\|u_{txx}^m\|^2 \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\|Au^m\|^2 + \frac{\alpha}{2}\|v_x^m\|^2.$$

记

$$k = \min\left\{\frac{\alpha}{2},\frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{1+\beta\varepsilon}\right\},$$

$$y(t) = \left\|\sqrt{1+\beta\varepsilon}Au^m - \frac{1}{\sqrt{1+\beta\varepsilon}}f\right\|^2 + \|v_x^m\|^2,$$

则

$$y(t) = y(0)\exp(-kt) + C(1-\exp(-kt)),$$

故存在常数 $C > 0$，使得 $\|u_{xx}^m\|$，$\|u_{tx}^m\| < C$，又由于 $u_t^m(0,t) = 0$，故

$$\|u_t^m(x,t)\| \leqslant \frac{l}{\sqrt{2}}\|u_{tx}^m(x,t)\| < C.$$

最后,讨论收敛性.综上可得 $\| u^m \|$,$\| u_t^m \|$,$\| u_x^m \|$,$\| u_{xx}^m \|$,$\| u_{tx}^m \| < C$.由 $\| u^m \|$,$\| u_x^m \|$,$\| u_{xx}^m \|$有界,可得 $u^m$ 在 $L^\infty(0,T;S_2)$中有界,由 $\| u_t^m \|$,$\| u_{tx}^m \|$有界,可得 $u_t^m$ 在 $L^\infty(0,T;S_1)$中有界,故存在子序列 $\{u^\mu\}$满足 $u^\mu \to u$ 在 $L^\infty(0,T;S_2)$中弱星收敛,$u_t^\mu \to u_t$ 在$L^\infty(0,T;S_1)$中弱星收敛;从而 $u^\mu \to u$ 在 $L^2(0,T;S_2)$中弱星收敛,$u_t^\mu \to u_t$ 在 $L^2(0,T;S_1)$中弱星收敛.类似定理 1 的证明,可得 $u(x,t)$满足初边值问题(1)—(3)式,且

$$u \in L^2(0,T;S_2) \cap L^\infty(0,T;S_2),$$

$$u_t \in L^2(0,T;S_1) \cap L^\infty(0,T;S_1).$$

证毕.

## 4.结 论

本文考虑黏性效应及外阻尼同时作用下的一类广义强阻尼 Sine-Gordon 方程,利用 Galerkin 方法以及柯西-许瓦兹不等式和 Gronwall 不等式等技巧,证明了该方程在初值 $u(x,0) \in H_0^1(\Omega)$,$u_t(x,0) \in L^2(\Omega)$的条件下初边值问题存在整体弱解 $u(x,t)$,并证明了整体弱解关于初始条件具有连续的依赖性及唯一性.进一步证明了该方程在初值 $u(x,0) \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$,$u_t(x,0) \in H_0^1(\Omega)$ 的条件下初边值问题存在整体强解 $u(x,t)$.


[1] Josephson B D 1962 *Phys*. *Lett*. **1** 251

[2] Zheng Q,Yue P 2006 *Chin*. *Phys*. **15** 35

[3] He H S,Chen J,Yang K Q 2005 *Chin*. *Phys*. **14** 1926

[4] Lu F L,Chen C Y 2005 *Chin*. *Phys*. **14** 463

[5] Zhang X A,Chen K,Duan Z L 2005 *Chin*. *Phys*. **14** 42

[6] Teman R 1988 *Infinite-dimensional Dynamical Systems in Mechnics and Physics* (New York:Springer) pp15—26,80—113

[7] Zhu Z W,Lu Y 2000 *J*. *Chin*. *Quart*. *Math*. **15** 71

[8] Lions J L,Magenes E 1972 *Non-homoneous Boundary Value Problem and Application* (New York:Springer) Vol Ⅰ

# Global solutions for a kind of generalized Sine-Gordon equation with strong damping*

Zhang Jian-Wen[1)†] Wang Dan-Xia[1)] Wu Run-Heng[2)]

1)(*College of Science, Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024, China*)

2)(*College of Science, North China University of Technology, Beijing 100041, China*)

(Received 23 November 2006; revised manuscript received 3 September 2007)

Abstract

A kind of generalized Sine-Gordon equations with strong damping are studied, considering both viscosity effect and external damping. Firstly, by the aid of Galerkin method, under the initial value conditions $u(x,t) \in H_0^1(\Omega)$, $u_t \in L_2(\Omega)$, we prove the existence and uniqueness of a global weak solution $u(x,t)$ for the initial boundary value problems and the constant dependence of solution on the initial value. Secondly, under the initial value conditions $u(x,0) \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $u_t(x,0) \in H_0^1(\Omega)$, the course of proof of the existence of strong solution $u(x,t)$ is also explained by using Galerkin method.

**Keywords**: Sine-Gordon equations, strong damping, Galerkin method, global solution

**PACC**: 0365G, 0290

* Project supported by the Natural Science Foundation of Shanxi Province, China (Grant No. 2006011005) and the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10772131).

† E-mail: jianwenz@public.ty.sx.cn