第 57 卷 第 4 期 2008 年 4 月
1000-3290/2008/57(04)/2035-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.57,No.4,April,2008

关联噪声驱动的非对称双稳系统的随机共振*

周丙常† 徐 伟

(西北工业大学应用数学系,西安 710072)

(2007 年 4 月 9 日收到;2007 年 7 月 19 日收到修改稿)

运用统一色噪声近似理论和两态模型理论,研究了周期矩形信号和关联的乘性色噪声和加性白噪声驱动的非对称双稳系统的随机共振现象,得到了适合信号任意幅值的信噪比表达式.信噪比是乘性噪声强度、加性噪声强度、乘性噪声自关联时间、噪声耦合强度的非单调函数,所以该双稳系统中出现了随机共振.同时,调节加性噪声强度比调节乘性噪声强度更容易产生随机共振.势阱静态非对称性和噪声之间的耦合强度对信噪比的影响是不同的.

关键词:非对称双稳系统,随机共振,信噪比,周期矩形信号

PACC:0540,0250

1. 引 言

1981 年,Benzi 等[1] 在研究第四纪全球气象冰川问题时提出了随机共振的概念.此后,出现了大量关于随机共振现象的理论和实验研究[2—26].Fauve 和 Heslot[2] 观察了具有双稳输出特性的 Schmitt 触发器电路系统,并用该实验第一次证实了随机共振现象的存在.McNamara 等[3,4] 提出了两态模型理论并且在绝热近似的条件下用信噪比来刻画随机共振.Dykman 等[5] 提出了线性响应理论来解释随机共振现象.胡岗等[6] 采用本征值微扰理论来研究随机共振.周同等[7] 提出用半周期内驻留时间作为随机共振的测度.后来,人们又发展了一些非经典的随机共振理论,如相干随机共振[8—10]、自适应随机共振[11]、耦合随机共振[12,13]、参数调节随机共振[14,15]、非周期随机共振[16]、非马尔可夫随机共振[17].上述研究中很多都是考虑对称的双稳系统,然而在许多实际的物理系统中对称性是不能保证的,故势阱的非对称性被引入磁通量闸门磁力计量器和超导量子干涉设备中来探测弱的信号[18,19].李静辉[20] 研究了由白噪声驱动的双稳系统中势阱的非对称性对随机共振的影响,发现势阱的非对称性能够使系统的信噪比减小.Nikitin 等[21] 研究了由周期信号和随机力驱动的非对称双稳系统,给出了转换时间分布的理论和数值结果.这些研究是在绝热近似理论条件下进行的,只适用于信号振幅较小的情况.后来通过选择适当的周期矩形信号,得到的信噪比表达式可以适用于信号的任意振幅情形.Gerashchenko[22] 从理论和实验两方面研究了一个由周期矩形信号和加性白噪声驱动的非对称双稳系统的随机共振问题.徐伟等[23] 在由周期矩形信号、乘性以及加性白噪声驱动非对称双稳系统中观察到了随机共振现象,发现改变加性噪声强度比改变乘性噪声强度更容易产生随机共振.本文考虑关联的乘性色噪声、加性白噪声和周期矩形信号驱动的非对称双稳系统,运用统一色噪声近似理论,得到了信噪比的表达式.在该系统中发现了随机共振现象.还讨论了各个参数对信噪比的影响.

2. 非对称双稳系统的信噪比

考虑关联的乘性色噪声和加性白噪声共同作用的一维非对称过阻尼双稳系统,该系统可以由以下郎之万方程描述:

$$\dot{x} = f(x) + r + x\xi(t) + \eta(t) + AG(t). \quad (1)$$

这里

$$f(x) = -U_0'(x),$$
$$U_0(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4, \quad (2)$$

---

* 国家自然科学基金(批准号:10472091,10332030)资助的课题.

† E-mail:leiyu@nwpu.edu.cn

式中 $U_0(x)$代表对称的双稳势函数.方程(1)中的常数 r 刻画双稳系统的非对称性,A 为常数,周期为 T 的矩形信号由下式给出:

$$G(t+T)=G(t)=\begin{cases}1 & (0<t\leqslant T/2),\\ -1 & (T/2<t\leqslant T).\end{cases}\tag{3}$$

(3)式中的 $\xi(t)$和 $\eta(t)$分别为乘性色噪声和加性白噪声,它们之间是白关联的,均值和方差分别为

$$\langle\xi(t)\rangle=\langle\eta(t)\rangle=0,\tag{4a}$$

$$\langle\xi(t)\xi(s)\rangle=\frac{Q}{\tau}\exp\left(-\frac{|t-s|}{\tau}\right),\tag{4b}$$

$$\langle\eta(t)\eta(s)\rangle=2D\delta(t-s),\tag{4c}$$

$$\langle\xi(t)\eta(s)\rangle=\langle\eta(t)\xi(s)\rangle=2\lambda\sqrt{QD}\delta(t-s),\tag{4d}$$

其中 Q 和 D 分别为乘性噪声强度和加性噪声强度,λ 为噪声耦合强度.

运用文献[27]的统一色噪声近似方法,结合方程(1)—(4),相应的 Fokker-Planck 方程为

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}A(x)P(x,t)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}B(x)P(x,t).\tag{5}$$

这里

$$A(x)=\frac{f(x)+r+AG(t)}{M(x)}+\frac{H'(x)}{M^2(x)}-\frac{M'(x)H(x)}{M^3(x)},\tag{6a}$$

$$B(x)=\frac{H(x)}{M^2(x)},\tag{6b}$$

$$M(x)=1+2\tau x^2,\tag{6c}$$

$$H(x)=D[Rx^2+2\lambda\sqrt{R}x+1].\tag{6d}$$

定态概率密度函数可以表示为

$$P_{\mathrm{st}}(x)=N[B(x)]^{-1/2}\exp\left(-\frac{\Phi(x)}{D}\right),\tag{7}$$

式中 N 为归一化常数,

$$B(x)=\frac{D[Rx^2+2\lambda\sqrt{R}x+1]}{(1+2\tau x^2)^2},$$

其中 $R=Q/D$ 表示乘性噪声强度与加性噪声强度的比值.这里的 $\Phi(x)$为广义势函数,

$$\begin{aligned}\Phi(x)=&\frac{\tau}{2R}x^4-\frac{4\lambda\tau}{3R\sqrt{R}}x^3+\alpha(\lambda,\tau)x^2+\beta(\lambda,\tau)x+\gamma(\lambda,\tau)\ln|Rx^2+2\lambda\sqrt{R}x+1|\\&+\theta(\lambda,\tau)\arctan\frac{\sqrt{R}x+\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}+\left(-\frac{\tau}{R}x+\frac{\lambda\tau}{R\sqrt{R}}\ln|Rx^2+2\lambda\sqrt{R}x+1|\right.\\&\left.-\mu(\lambda,\tau)\arctan\frac{\sqrt{R}x+\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}\right)(r+AG(t)),\end{aligned}\tag{8}$$

式中

$$\alpha(\lambda,\tau)=\frac{2\tau(4\lambda^2-1)-R(2\tau-1)}{2R^2},\tag{9a}$$

$$\beta(\lambda,\tau)=\frac{2\lambda[4\tau(1-2\lambda^2)+R(2\tau-1)]}{R^2\sqrt{R}},\tag{9b}$$

$$\gamma(\lambda,\tau)=\frac{2\tau(16\lambda^4-12\lambda^2+1)-R(2\tau-1)(4\lambda^2-1)-R^2}{2R^3},\tag{9c}$$

$$\theta(\lambda,\tau)=\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}\frac{R^2+R(2\tau-1)(4\lambda^2-3)-2\tau(16\lambda^4-20\lambda^2+5)}{R^3},\tag{9d}$$

$$\mu(\lambda,\tau)=\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}\frac{\tau(2\lambda^2-1)+R(\tau+1)}{R\sqrt{R}}.\tag{9e}$$

设 $x_\pm=\pm1$ 和 $x_0=0$ 为未扰系统的稳定点和不稳定点,在绝热近似条件下和时间尺度 $T\gg W_{\pm0}^{-1}$ 时,粒子由 x_+所在的势阱跃迁到 x_-所在的势阱的跃迁速率及相应的逆跃迁速率为

$$W_{\pm} = \frac{|U''(x_0)U''(x_{\pm})|^{1/2}}{2\pi}\exp\left[\frac{\Phi(x_{\pm}) - \Phi(x_0)}{D}\right]$$
$$= W_{\pm 0}\exp[(\mp rq_{\pm} \mp Aq_{\pm}\ G(t))/D], \tag{10}$$

式中 $W_{\pm 0}$代表方程(1)仅受乘性噪声和加性噪声时的特征转换率. $W_{\pm 0}$和 $q_{\pm}$ 的表达式为

$$W_{\pm 0} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\exp\left(-\frac{1}{D}p_{\pm}\right), \tag{11}$$

$$q_{\pm} = \frac{\tau}{R} \mp \frac{\lambda\tau}{R\sqrt{R}}\ln|R \pm 2\lambda\sqrt{R} + 1| \pm \mu(\lambda,\tau)\left(\arctan\frac{\lambda \pm \sqrt{R}}{\sqrt{1-\lambda^2}} - \arctan\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}\right), \tag{12}$$

式中

$$p_{\pm} = -\frac{\tau}{2R} \pm \frac{4\lambda\tau}{3R\sqrt{R}} - \alpha(\lambda,\tau) \mp \beta(\lambda,\tau) - \gamma(\lambda,\tau)\ln|R \pm 2\lambda\sqrt{R} + 1| - \theta(\lambda,\tau)$$
$$\times\left(\arctan\frac{\lambda \pm \sqrt{R}}{\sqrt{1-\lambda^2}} - \arctan\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}\right). \tag{13}$$

利用两态模型理论[4],设 $n_{\pm}$ 分别表示在稳态 $x_{\pm}$ 的概率,则 $n_{\pm}$ 满足概率交换的主方程

$$\dot{n}_+ = -\dot{n}_- = W_-(t)n_- - W_+(t)n_+. \tag{14}$$

在绝热近似条件下,由于局部平衡的确立要比跃迁概率之间的交换快很多. 因此,方程(14)的初始分布为

$$n_+(t) = \frac{W_-(t)}{W_-(t) + W_+(t)},$$
$$n_-(t) = \frac{W_+(t)}{W_-(t) + W_+(t)}, \tag{15}$$

对随机过程 $x(t)$,利用两态模型理论,我们可以计算如下的条件概率:

$$P(m,t_1|n,t_2) = P(m,t_1) + \frac{\phi(m,t_1)\phi(n,t_1)}{P(n,t_1)}$$
$$\times\exp(-\lambda_0(t_1 - t_2)), \tag{16}$$

式中 $t_1 > t_2$,

$$\lambda_0 = W_+(t) + W_-(t)$$

为方程(14)的在绝热近似条件下的本征值,

$$\phi(1,t) = -\phi(-1,t) = \frac{\sqrt{W_+(t)W_-(t)}}{W_+(t)W_-(t)}$$

为方程(14)的在绝热近似条件下的本征函数.

根据马氏过程理论,我们可以给出联合概率密度

$$P(m,t_1;n,t_2)$$
$$= P(m,t_1|n,t_2)P(n,t_2)$$
$$= P(m,t_1)P(n,t_2) + \frac{\phi(m,t_1)\phi(n,t_1)}{P(n,t_1)}$$
$$\times P(n,t_2)\exp(-\lambda_0(t_1 - t_2)). \tag{17}$$

在时间尺度 $\lambda_0 \gg T^{-1}$, $\tau \approx |t_1 - t_2|$ 下,利用 δ 函数的性质,上述联合概率密度可以表示为

$$P(m,t_1;n,t_2)$$
$$= P(m,t_1)P(n,t_2)$$
$$+ \frac{2\delta(t_1 - t_2)}{\lambda_0}\phi(m,t_1)\phi(n,t_1). \tag{18}$$

对于任意的函数 f,有下列公式成立:

$$f[r + AG(t)]$$
$$= \frac{1}{2}[f(r + A) + f(r - A)$$
$$+ G(t)(f(r + A) - f(r - A))]. \tag{19}$$

由(18),(19)式根据平均自相关函数定义 $K(t) = \langle\langle x(t_1)x(t_2)\rangle\rangle_t$ 并结合文献[28]中的方法,可以解得相关函数的表达式为

$$K(t) = B(rq_{\pm},Aq_{\pm})\langle G(t)G(0)\rangle$$
$$+ C(rq_{\pm},Aq_{\pm})\delta(t), \tag{20}$$

式中

$$\langle G(t)G(0)\rangle = \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)^{-2}\exp(-\mathrm{i}(2k+1)\Omega t) \quad \left(\Omega = \frac{2\pi}{T}\right), \tag{21a}$$

$$B(rq_{\pm},Aq_{\pm}) = \frac{1}{4}(\tanh(rq_{\pm} + Aq_{\pm}) - \tanh(rq_{\pm} - Aq_{\pm}))^2, \tag{21b}$$

$$C(rq_{\pm},Aq_{\pm}) = \frac{1}{2W_{\pm 0}}\left(\frac{1}{\cosh^3(rq_{\pm} + Aq_{\pm})} + \frac{1}{\cosh^3(rq_{\pm} - Aq_{\pm})}\right). \tag{21c}$$

功率谱 $S(\omega)$ 定义为平均自相关函数的傅里叶变换,可以写为

$$S(\omega) = S_1(0) + S_2(\omega), \tag{22}$$

式中 $S_1(0)$ 为噪声背景下零频处相应的谱密度,$S_2(\omega)$ 为与输出信号相应的谱密度.

$$S_1(0) = C(rq_{\pm}, Aq_{\pm}), \tag{23a}$$

$$S_2(\omega) = B(rq_{\pm}, Aq_{\pm}) \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)^{-2} \times \delta[\omega - (2k+1)\Omega]. \tag{23b}$$

因而信噪比 ξ_{SN} 的表达式可以写为

$$\xi_{SN} = \frac{8}{\pi} \frac{B(rq_{\pm}, Aq_{\pm})}{C(rq_{\pm}, Aq_{\pm})}. \tag{24}$$

(24)式是在绝热近似的条件下得到的,应该满足条件 $q_{\pm} \ll 1$. 这时(24)式可以简化为

$$\xi_{SN} = \frac{8}{\pi} \frac{W_{\pm 0} A^2 q_{\pm}^2}{\cosh(rq_{\pm})}. \tag{25}$$

3. 噪声和信号对系统信噪比的影响

利用(25)式,我们讨论加性噪声强度 D、乘性噪声强度 Q、噪声强度比值 R、噪声耦合强度 λ、乘性噪声自关联时间 τ 和静态非对称性 r 对信噪比的影响. 为了方便,在图 1—图 6 中仅讨论 $r>0$ 的情况并假定初始条件 $x(t=0)=x_-$.

图 1 给出了信噪比作为加性噪声强度 D 的函数随 r 的变化曲线. 从图 1 可以看出,随着 D 的增加在信噪比曲线上出现了单峰,这意味着随机共振的发生. 随着 r 的增加,峰值开始降低并且峰值的位置左移. 而噪声之间无关联时峰值的位置右移.

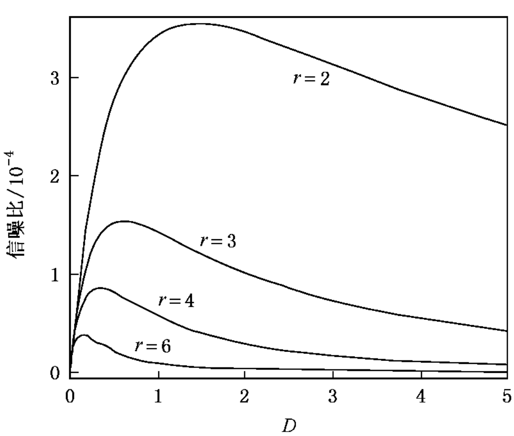

图 1 信噪比作为加性噪声强度 D 的函数随 r 的变化 $A=0.05, Q=20, \lambda=0.4, \tau=1.0$

图 2 给出了信噪比作为乘性噪声强度 Q 的函数随 r 的变化曲线. 从图 2 可以看出,曲线存在极大值,这说明该情况下存在随机共振. 随着 r 的增加,峰值开始降低并且峰值的位置右移. 由图 1 和图 2 还可以看出,改变加性噪声强度 D 比改变乘性噪声强度 Q 更容易产生随机共振.

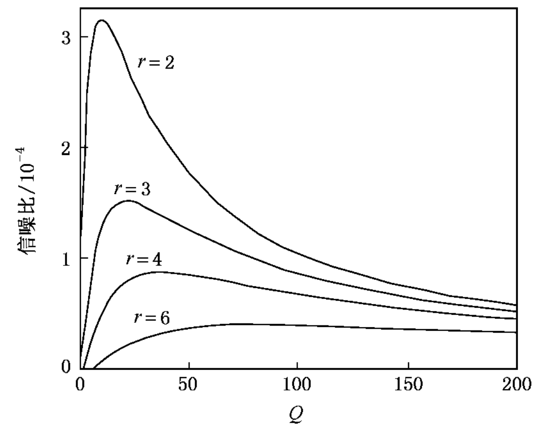

图 2 信噪比作为乘性噪声强度 Q 的函数随 r 的变化 $A=0.05, D=0.5, \lambda=0.4, \tau=1.0$

图 3 给出了信噪比作为噪声耦合强度 λ 的函数随 r 的变化曲线. 从图 3 可以看出,随着 λ 的增加在信噪比曲线上出现了单峰,该情况下也出现随机共振. 随着 r 的增加,峰值开始降低,同时峰值的位置左移.

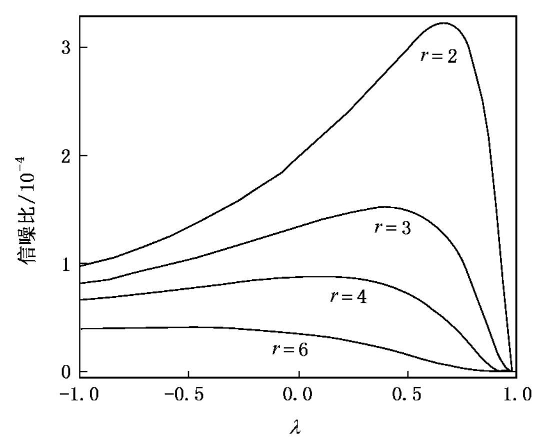

图 3 信噪比作为噪声耦合强度 λ 的函数随 r 的变化 $A=0.05, Q=20, E=0.5, \tau=1.0$

图 4 给出了信噪比作为静态非对称性 r 的函数随噪声强度比值 R 的变化曲线. 从图 4 可以看出,曲线上出现了明显的单峰,表明产生了随机共振. 当 $|r|$ 增加时,信噪比减小. 该结论与文献[22]一致. 同时,随着噪声强度比值 R 的增加,信噪比逐渐减小.

该结果与噪声之间无关联的情形结论相反.

图 5 和图 6 给出了信噪比作为静态非对称性 r 的函数分别随乘性噪声自关联时间 τ 和噪声之间的耦合强度 λ 的变化曲线. 图 5 和图 6 中均出现随机共振现象，并且当 $|r|$ 增加时，信噪比减小. 随着噪声之间的自关联时间 τ 和噪声之间的耦合强度 λ 的增加，信噪比也随之增加.

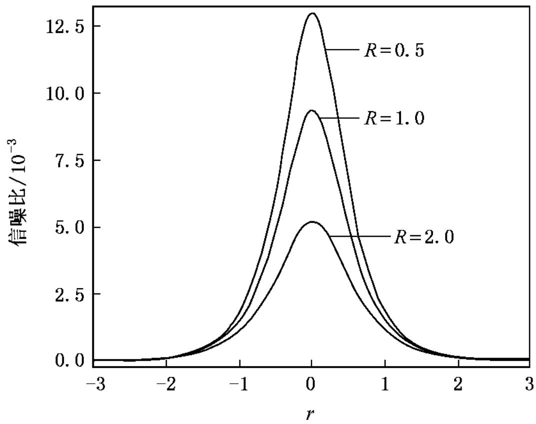

图 4　信噪比作为静态非对称性 r 的函数随 R 的变化 $A=0.05$, $Q=1.0$, $\tau=1.0$, $\lambda=0.4$

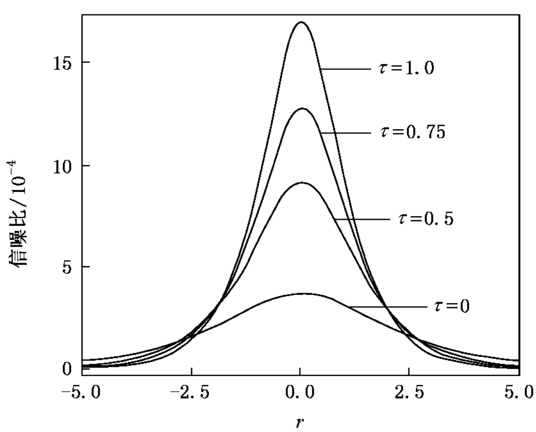

图 5　信噪比作为静态非对称性 r 的函数随 τ 的变化 $A=0.05$, $Q=5.0$, $E=0.5$, $\lambda=0.4$

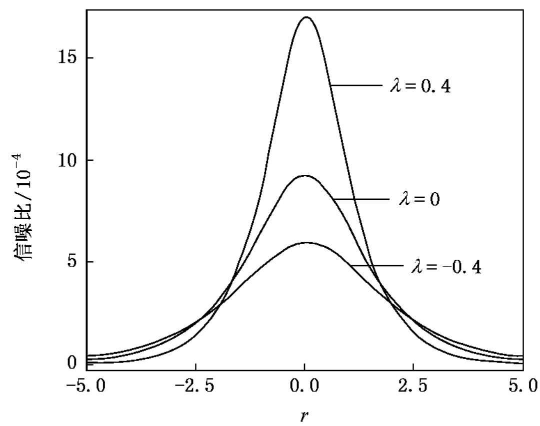

图 6　信噪比作为静态非对称性 r 的函数随 λ 的变化 $A=0.05$, $Q=5.0$, $E=0.5$, $\tau=1.0$

4. 结　论

本文研究了白关联的乘性色噪声和加性白噪声以及矩形信号对非对称双稳系统的影响. (1) 所得到的信噪比表达式不仅适用于信号幅值较小的情况，而且也适用于信号幅值较大的情况，即适用于任意信号幅值. (2) 调节加性白噪声强度比调节乘性色噪声强度更容易产生随机共振. (3) 随着乘性色噪声自关联时间的增加，信噪比的峰值逐渐增大. (4) 随着噪声之间耦合强度的增加，信噪比的峰值也逐渐增大. (5) 由于噪声之间关联性，使得随机共振的产生与系统的初始状态有关，即噪声之间的关联对初始状态具有记忆性. 本文假定 $x(t=0)=x_-$，对于 $x(t=0)=x_+$ 完全可以进行类似讨论.

[1] Benzi R, Sutera A, Vulpiani A 1981 *J. Phys. A: Math. Gen.* **14** L453

[2] Fauve S, Heslot F 1983 *Phys. Lett.* A **97** 5

[3] McNamara B, Wiesenfeld K, Roy R 1988 *Phys. Rev. Lett.* **60** 2626

[4] McNamara B, Wiesenfeld K 1989 *Phys. Rev.* A **39** 4854

[5] Dykman M I, Mannella R, McClintock P V E, Stocks N G 1990 *Phys. Rev. Lett.* **65** 2606

[6] Hu G, Nicolis G, Nicolis C 1990 *Phys. Rev.* A **42** 2030

[7] Zhou T, Moss F, Jung P 1990 *Phys. Rev.* A **42** 3161

[8] Masoliver J, Robinson A 1995 *Phys. Rev.* E **51** 4021

[9] Porra J M 1997 *Phys. Rev.* E **55** 6533

[10] Dhara A K, Mukhopadhyay T 1999 *Phys. Rev.* E **60** 2727

[11] Yang T 1998 *Phys. Lett.* A **245** 79

[12] Zhang Y, Hu G, Gammaitoni L 1998 *Phys. Rev.* E **58** 2952

[13] Krawiecki A 2004 *Physica* A **333** 505

[14] Li J L, Xu B H 2006 *Chin. Phys.* **15** 2867

[15] Li J L 2007 *Chin. Phys.* **16** 340

[16] Collins J J, Chow C C, Capela A C, Imhoff T T 1996 *Phys. Rev.* E **54** 5575

[17] Goychuk I, Hanggi P 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 070601

[18] Inchiosa M E,Bulsara A R,Gammaitoni L 1997 *Phys*. *Rev*. E **55** 4049
[19] Gammaitoni L,Bulsara A R 2002 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **88** 230601
[20] Li J H 2002 *Phys*. *Rev*. E **66** 031104
[21] Nikitin A,Stocks N G,Bulsara A R 2003 *Phys*. *Rev*. E **68** 016103
[22] Gerashchenko O V 2003 *Tech*. *Phys*. *Lett*. **29** 256
[23] Xu W,Jin Y F,Li W,Mao S J 2005 *Chin*. *Phys*. **14** 1077
[24] Kang Y M,Xu J X,Xie Y 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 2712 (in Chinese) [康艳梅、徐健学、谢 勇 2003 物理学报 **52** 2712]
[25] Cheng Q H,Cao L,Wu D J 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 2556 (in Chinese) [程庆华、曹 力、吴大进 2004 物理学报 **53** 2556]
[26] Zhang L Y,Cao L,Jin G X 2006 *Acta Phys*. *Sin*. **55** 6238 (in Chinese) [张良英、曹 力、金国祥 2006 物理学报 **55** 6238]
[27] Jia Y,Zheng X P,Hu X M,Li J R 2001 *Phys*. *Rev*. E **63** 031107
[28] Ginzburg S L,Pustovoit M A 2002 *Phys*. *Rev*. E **66** 021107

Stochastic resonance in an asymmetric bistable system driven by correlated noise*

Zhou Bing-Chang† Xu Wei

(*Department of Applied Mathematics*, *Northwestern Polytechnical University*, *Xi'an* 710072, *China*)

(Received 9 April 2007; revised manuscript received 19 July 2007)

Abstract

The phenomenon of stochastic resonance (SR) in a bistable system subject to correlated multiplicative colored and additive white noises and a periodic rectangular signal with a constant component is investigated in the unified colored noise approximation and by applying the two-state theory. The expression of the signal-to-noise ratio (SNR) is obtained for arbitrary signal amplitude. The SNR is a non-monotonic function of intensities of multiplicative colored and additive white noises, correlation time of multiplicative colored noise and the strength of the coupling between noises, so SR appears in the bistable system. Meanwhile, it is more effective to control SR through adjusting the additive white noise intensity than adjusting the multiplicative colored noise intensity. Moreover, the effects of potential asymmetry and the strength of the coupling between noises on SNR are opposite.

Keywords: asymmetric bistable system, stochastic resonance, signal-to-noise ratio, periodic rectangular signal

PACC: 0540, 0250

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10472091, 10332030).

† E-mail: leiyu@nwpu.edu.cn