

五维大反弹宇宙学模型的重建及其 相关宇宙学量的演化^{*}

吴亚波^{1)†} 吕剑波²⁾ 李 松³⁾ 杨秀一²⁾

1) 辽宁师范大学物理系, 大连 116029)

2) 大连理工大学物理与光电工程学院, 大连 116024)

3) 北京师范大学物理系, 北京 100875)

(2006 年 12 月 11 日收到, 2007 年 11 月 1 日收到修改稿)

在五维大反弹宇宙学模型框架下, 通过给定三种不同的暗能量有效态方程, 确定了在该模型中起重要作用的函数 $f(z)$, 从而描述了五维大反弹模型中相关的宇宙学量随红移量 z 的演化. 研究表明, 与情形 I 中有效态方程相对应的宇宙学量的演化规律和当前天文观测数据符合最好.

关键词: 大反弹宇宙学模型, 暗能量, 态方程

PACC: 9880, 0420, 0240

1. 引 言

近年来, 天文观测数据表明我们的宇宙现在正处于加速膨胀, 而不是减速膨胀. 例如, 人们对宇宙微波背景的研究^[1]、对 Ia 型超新星^[2]以及大尺度结构^[3]等研究都强烈地表明了这个现象. 为了解释当前宇宙加速膨胀的这一观测事实, 国际上研究者们从时空几何或宇宙中可能存在的物质的观点出发建立了大量的宇宙学模型. 一方面, 若假设宇宙的演化遵循标准的热大爆炸宇宙学模型, 则需要在宇宙中引进暗能量这种具有负压强的特殊物质, 以达到使宇宙加速膨胀的目的(尽管我们还没有发现这种特殊物质, 甚至连这种物质的其他性质以及可能的形式都还很不清楚). 在这种观点的指引下, 目前人们已建立了诸多的暗能量模型, 如将宇宙学常数 Λ 视为暗能量加之冷暗物质(CDM)的 Λ CDM^[4]模型、quintessence^[5]模型、广义的 Chaplygin 气体^[6]模型、quintom^[7]模型以及复标量场模型^[8]等. 另一方面, 从时空几何观点出发, 额外维理论已经被应用到宇宙学中^[9], 并且膜世界^[10]等额外维宇宙学模型解释了当前的宇宙加速膨胀.

尽管现在还没有实验证据证明额外维的存在,

但是人们认为我们所生活的时空具有超过三维的空间维数. 空间-时间-物质 (STM) 理论作为一种额外维理论也已经被应用到宇宙学中^[11]. 我们知道, 在 STM 理论中, 有物质存在的四维 Einstein 场方程可以从五维 Ricci 平坦的 Einstein 场方程中推导出来, 即认为该五维时空是真空, 满足 $R_{AB} = 0$. 然而, 在四维时空(即某一超曲面上)我们的宇宙是有物质的, 该物质由额外维诱导出来^[12]. 数学上, 这种方法的可行性是由 Campbell 定理所保证, 即“任一 N 维 Einstein 场方程的解析解可以局部地嵌入 $(N+1)$ 维 Ricci 平坦 ($R_{AB} = 0$) 的 Riemannian 流形中^[13].”

1995 年, 在 STM 理论的框架下, 一组精确的宇宙学解由 Liu 和 Mashhoon 给出^[14], 并且在文献 [11] 中 Liu 和 Wesson 对该解进行了更进一步的研究. 同时, 相对于大爆炸宇宙模型, 文献 [11] 提出了大反弹宇宙学模型. 这个解中包含了两个任意的函数 $\mu(t)$ 和 $\nu(t)$, 并且不同的 $\mu(t)$ 和 $\nu(t)$ 形式代表不同大反弹宇宙的演化. 对于此五维模型, 由于在宇宙学量的演化中不显含函数 $\nu(t)$, 所以可把函数 $\mu(t)$ 改写成是红移量 z 的函数 $f(z)$. 本文中我们将通过参数化具体的暗能量状态方程来确定函数 $f(z)$ 的具体形式, 进而给出五维大反弹模型中相关的宇宙学

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 10475036)和辽宁省教育厅高等学校科研基金(批准号: 05L215, 2007T087)资助的课题.

[†] E-mail: ybwu61@163.com

量(如冷暗物质和暗能量的密度参数 $\Omega_{\text{dm}}, \Omega_{\text{de}}$ 及减速因子 q 和暗能量的有效态方程 ω_{de})随红移量 z 的演化规律. 研究结果表明, 我们得到的宇宙学量的演化规律与当前天文观测数据符合很好.

2. 五维大反弹宇宙学模型及其暗能量

考虑一类五维宇宙学模型, 其线元可以写为^[11]

$$dS^2 = B^2 dt^2 - A^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right) - dy^2. \quad (1)$$

这里

$$d\Omega^2 \equiv (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2)$$

$$A^2 = (\mu^2 + k)y^2 + 2\nu y + \frac{\nu^2 + K}{\mu^2 + k}, \quad (3)$$

$$B = \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial t} \equiv \frac{\dot{A}}{\mu}.$$

式中 $\mu(t)$ 和 $\nu(t)$ 是关于时间 t 的两个任意函数, k 是三维曲率指标 ($k = \pm 1, 0$), K 是常数. 这个解满足五维真空方程 $R_{AB} = 0$. 利用五维度规(1)式中的四维部分计算四维 Einstein 张量, 并假定该模型所诱导的物质只包含冷暗物质 ρ_{dm} 和暗能量 ρ_{de} 两部分, 可得到如下方程:

$${}^{(4)}G_0^0 = \frac{\mathfrak{X}(\mu^2 + k)}{A^2} = \rho_{\text{dm}} + \rho_{\text{de}}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} {}^{(4)}G_1^1 &= {}^{(4)}G_2^2 = {}^{(4)}G_3^3 \\ &= \frac{2\mu\dot{\mu}}{A\dot{A}} + \frac{\mu^2 + k}{A^2} \\ &= -(p_{\text{dm}} + p_{\text{de}}), \end{aligned} \quad (5)$$

式中

$$p_{\text{dm}} = 0, \quad (6)$$

$$p_{\text{de}} = \omega_{\text{de}} \rho_{\text{de}}.$$

联立方程(4)和(5), 可得到暗能量的有效态方程和无量纲的密度参数^[15]

$$\omega_{\text{de}} = \frac{p_{\text{de}}}{\rho_{\text{de}}} = -\frac{2\mu\dot{\mu}/A\dot{A} + (\mu^2 + k)A^2}{\mathfrak{X}(\mu^2 + k)A^2 - \rho_{0\text{dm}}A^{-3}}, \quad (7)$$

$$\Omega_{\text{dm}} = \frac{\rho_{\text{dm}}}{\rho_{\text{dm}} + \rho_{\text{de}}} = \frac{\rho_{0\text{dm}}}{\mathfrak{X}(\mu^2 + k)A}, \quad (8)$$

$$\Omega_{\text{de}} = 1 - \Omega_{\text{dm}}. \quad (9)$$

这里

$$\rho_{0\text{dm}} = \bar{\rho}_{0\text{dm}} A_0^3,$$

其中 $\bar{\rho}_{0\text{dm}}$ 和 A_0 分别表示冷暗物质的能量密度和尺度因子的当前值; Ω_{dm} 和 Ω_{de} 分别为无量纲的冷暗物质和暗能量的密度参数. 此外, 减速因子可表示为^[16]

$$q(t, y) \equiv -A \frac{d^2 A}{d\tau^2} / \left(\frac{dA}{d\tau} \right)^2$$

$$= -\frac{A\ddot{\mu}}{\mu\dot{A}}. \quad (10)$$

从方程(10)可知, 当 $\dot{\mu}/\mu > 0$ 时, 此时宇宙处于加速膨胀状态; 当 $\dot{\mu}/\mu < 0$ 时, 此时宇宙为减速膨胀. 因此, 函数 $\mu(t)$ 的不同形式决定了宇宙后期的演化状况.

本文考虑空间平直的宇宙学模型, 即三维空间曲率 $k = 0$. 从方程(7)–(10)可知, 在各宇宙学量的演化方程中并不显含任意函数 $\nu(t)$. 因此, 利用关系 $A_0/A = 1 + z$, 并定义 $\mu_0^2/\mu_z^2 = f(z)$ (这里 $f(0) \equiv 1$), 方程(7)–(10)能被写成关于红移量 z 的函数^[15], 即

$$\omega_{\text{de}} = -\frac{1 + (1 + z) \frac{d \ln f(z)}{dz}}{3 - 3\Omega_{\text{dm}}} \quad (11)$$

$$\Omega_{\text{dm}} = \Omega_{0\text{dm}}(1 + z)f(z), \quad (12)$$

$$\Omega_{\text{de}} = 1 - \Omega_{\text{dm}}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} q &= \frac{1 + 3\Omega_{\text{de}}\omega_{\text{de}}}{2} \\ &= -\frac{(1 + z) \frac{d \ln f(z)}{dz}}{2}. \end{aligned} \quad (14)$$

另一方面, 文献[17]表明由给定的暗能量有效态方程可以重建 quintessence 暗能量模型中标量场的势. 类似地, 由方程(11)可知, 通过给定暗能量有效态方程的具体表达式, 任意函数 $f(z)$ 也能被重建, 进而能描述其他宇宙学量的演化.

3. 相关宇宙学量的重建及其演化

下面我们考虑在三种不同的暗能量有效态方程情形下, $f(z)$ 的重建形式, 并给出与大反弹模型相关的宇宙学量的演化.

3.1. 情形 I

暗能量有效态方程为^[18]

$$\begin{aligned} \omega_{\text{de}} &= -1 + \frac{1 + z}{3} \\ &\times \frac{A_1 + 2A_2(1 + z)}{A_0 + A_1(1 + z) + A_2(1 + z)^2}, \end{aligned}$$

在此情形下, 对方程(11)积分可得

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{(1 + z)^3}{\Omega_{0\text{dm}}(1 + z)^3 + \Omega_{0\text{de}} \left(1 + \frac{A_1 z + 2A_2 z + A_2 z^2}{A_0 + A_1 + A_2} \right)}. \end{aligned} \quad (15)$$

根据(14)式, 减速因子 q 可写为

$$q = -1 + \frac{1+z}{2} \times \frac{3\Omega_{0dm}(1+z)^3 + A_1 + 2A_2 + 2A_2z}{\Omega_{0de} + \Omega_{0dm}(1+z)^3 + (A_1 + 2A_2)z + A_2z^2}. \quad (16)$$

这里 Ω_{0dm} 和 Ω_{0de} 分别是冷暗物质和暗能量的密度参数的当前值, 可分别取为 $\Omega_{0dm} = 0.3, \Omega_{0de} = 0.7$. 进一步, 根据文献[18], 参数 A_0, A_1, A_2 需满足如下关系:

$$\begin{aligned} A_0 + A_1 + A_2 &= 1 - \Omega_{0dm}, \\ A_1 + 2A_2 &\geq 0, \\ A_2 &\geq 0, \end{aligned}$$

其中 $A_0 = 0.95, A_1 = -0.55, A_2 = 0.3$. 于是, 我们能得到重建的五维大反弹模型下密度参数 Ω_{dm}, Ω_{de} 及减速因子 q 和暗能量的有效态方程 ω_{de} 随红移量 z 的演化规律(图1).

3.2. 情形 II

暗能量的有效态方程为^[19]

$$q = \frac{\Omega_{0dm} + \Omega_{0de}(1+3\omega_0)(1+z)^{3\omega_0} e^{\frac{3\omega_1 z^2}{1+z}} + 3\Omega_{0de}\omega_1 z(1+z)^{3\omega_0-2} e^{\frac{3\omega_1 z^2}{1+z}}}{2\Omega_{0dm} + 2\Omega_{0de}(1+z)^{3\omega_0} e^{\frac{3\omega_1 z^2}{1+z}}}. \quad (18)$$

于是, 通过取参数值 $\Omega_{0dm} = 0.3, \Omega_{0de} = 0.7, \omega_0 = -1, \omega_1 = 0.033$, 得到重建的五维大反弹模型下密度参数 Ω_{dm}, Ω_{de} 及减速因子 q 和暗能量的有效态方程 ω_{de} 随红移量 z 的演化规律(图2).

3.3. 情形 III

暗能量有效态方程为^[20]

$$\omega_{de} = \omega_r \frac{\omega_0 e^{Qx} + e^{Qx_c}}{e^{Qx} + e^{Qx_c}},$$

式中 $x = -\ln(1+z), \omega_r = 1/3, \omega_0 = -3, Q$ 和 x_c 是常数. 根据文献[20], 下面讨论常数 $Q = 2$ 的情况. 若定义 $B = e^{Qx_c}$, 则积分方程(11)得到

$$f(z) = \frac{(1+z)^3}{\Omega_{0dm}(1+z)^3 + \Omega_{0de} \left(1 + \frac{2Bz + Bz^2}{1+B}\right)^2}. \quad (19)$$

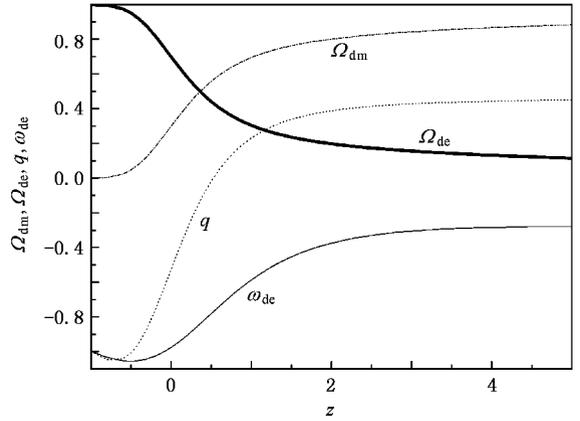


图1 情形 I 中密度参数 Ω_{dm}, Ω_{de} 及减速因子 q 和暗能量的有效态方程 ω_{de} 随红移量 z 的演化

$$\omega_{de} = \omega_0 + \omega_1 \frac{z}{(1+z)^2},$$

在此情形下, 对方程(11)积分可得

$$f(z) = \frac{1}{\Omega_{0dm}(1+z) + \Omega_{0de}(1+z)^{1+3\omega_0} e^{\frac{3\omega_1 z^2}{1+z}}}. \quad (17)$$

同时, 我们能得到减速因子 q 与红移量 z 的关系为

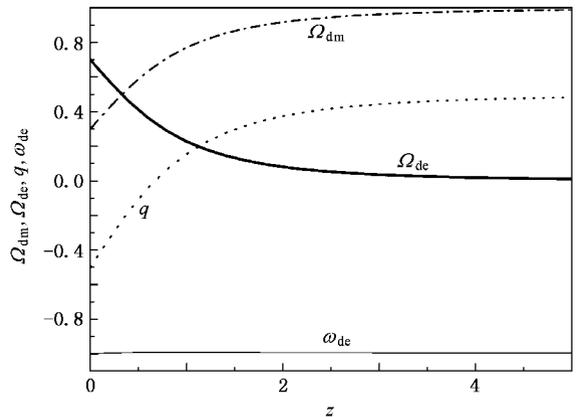


图2 情形 II 中密度参数 Ω_{dm}, Ω_{de} 及减速因子 q 和暗能量的有效态方程 ω_{de} 随红移量 z 的演化

相应的减速参数 q 可写为如下形式:

$$q = -1 + \frac{3\Omega_{\text{dm}}(1+B)(1+z)^3 + 4\Omega_{\text{de}}B(1+z)(1+B+2Bz+Bz^2)}{2\Omega_{\text{dm}}(1+B)(1+z)^3 + 2\Omega_{\text{de}}(1+B+2Bz+Bz^2)} \quad (20)$$

于是,我们同样能给出密度参数 Ω_{dm} , Ω_{de} 及减速因子 q 和暗能量有效态方程随红移量 z 的演化规律(图 3). 这里,参数值分别取为^[20] $\Omega_{\text{dm}} = 0.3$, $\Omega_{\text{de}} = 0.7$, $x_c = -2.64$ 和 $x_c = -4$.

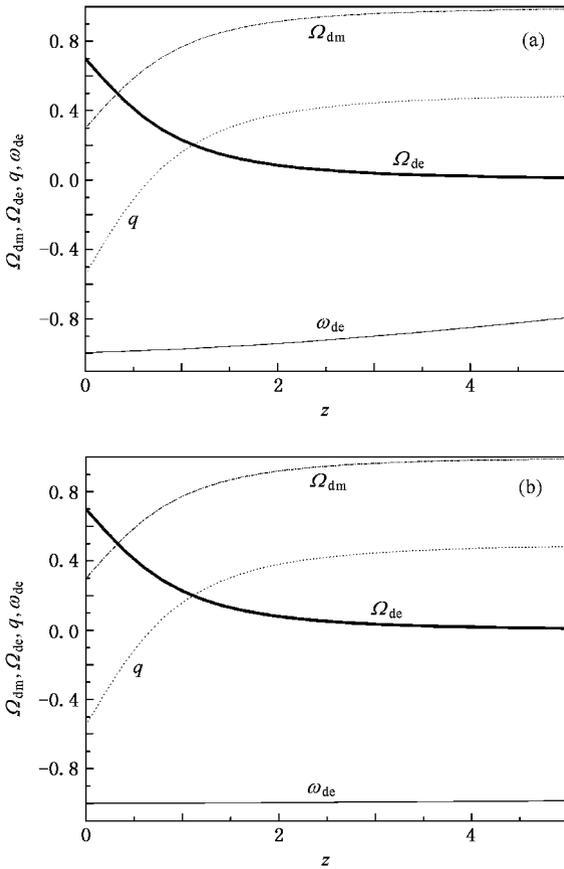


图 3 情形 III 中密度参数 Ω_{dm} , Ω_{de} 及减速因子 q 和暗能量的有效态方程 ω_{de} 随红移量 z 的演化 (a) $x_c = -2.64$ (b) $x_c = -4$

有了显著的变化,并且随着红移量 z 的减小而迅速减少,而 Ω_{de} 则随着红移量 z 的减小而迅速增大,并且最终占据主导地位,这与当前的实验观测结果^[4,21]符合很好. 此外,从减速因子 q 的演化规律,我们可以看到这三种情形都描述了宇宙从过去的减速膨胀($q > 0$)变到现在乃至未来的加速膨胀($q < 0$),因而都能够解释当前宇宙的加速膨胀现象. 另一方面,根据文献[6,22]中关于超新星(SNe)和宇宙微波背景实验给出的观测数据可知,有效态方程的当前值为 $\omega_0 = -1.05 \pm 0.09$, 减速因子的当前值为 $q_0 = -0.63 \pm 0.12$ 以及转变红移量 $z_T = 0.57 \pm 0.07$. 而在我们重建的五维大反弹宇宙学模型下,以上三种情形给出的 ω_0 , q_0 以及 z_T 值列于表 1.

表 1 三种情形对应的 ω_0 , q_0 和 z_T 值

	情形 I	情形 II	情形 III ($x_c = -2.64$)	情形 III ($x_c = -4$)
ω_{de}	-0.976	-1.000	-0.993	-1.000
q_0	-0.530	-0.500	-0.543	-0.550
z_T	0.525	0.669	0.665	0.671

从表 1 可知,情形 I 所给出的数值与当前实验观测结果符合最好. 并且从图 1 可知,有效态方程的演化穿过了 $\omega = -1$ 的界限和避免了宇宙大劈裂的命运. 从情形 II 和情形 III,我们得到 ω_0 和 q_0 与当前实验观测结果相符很好,并且对于 $x_c = -4$ 的情况,有效态方程的演化可近似为 Λ CDM 暗能量模型. 但是,对于情形 II 和情形 III,转变红移量 z_T 不在实验观测范围内.

4. 讨 论

通过给定以上三种不同情形的暗能量有效态方程 ω_{de} ,我们重建了五维大反弹宇宙学模型中函数 $f(z)$ 的具体形式,进而给出了宇宙学量(如暗物质和暗能量的密度参数 Ω_{dm} , Ω_{de} 以及减速因子 q)在五维模型中的演化. 从图 1—图 3 可以看到,在上述三种情形下,暗物质的密度参数 Ω_{dm} 在 $z = 2$ 附近开始

5. 结 论

通过对上述三种不同的有效态方程的讨论,给出了重建的五维宇宙学量的演化规律,并将它们与当前的实验观测值进行了对比. 研究表明,情形 I 所对应的相关宇宙学量的演化规律与当前实验观测结果符合最好,由此显示出了该重建方法的可行性.

- [1] Bennett C L , Hill R S , Hinshaw G , Nolte M R , Odegard N , Page L , Spergel D N , Weiland J L , Wright E L , Halpern M , Jarosik N , Kogut A , Limon M , Meyer S S , Tucker G S , Wollack E 2003 *Astrophys. J.* (Suppl.) **148** 97
- [2] Riess A G , Filippenko A V , Challis P , Clocchiattia A , Diercks A , Garnavich P M , Gilliland R L , Hogan C J , Jha S , Kirshner R P , Leibundgut B , Phillips M M , Reiss D , Schmidt B P , Schommer R A , Smith R C , Spyromilio J , Stubbs C , Suntzeff N B , Tonry J 1998 *Astron. J.* **116** 1009
- [3] Pope A C , Matsubara T , Szalay A S , Blanton M R , Eisenstein D J , Gray J , Jain B , Bahcall N A , Brinkmann J , Budavari T , Connolly A J , Frieman J A , Gunn J E , Johnston D , Kent S M , Lupton R H , Meiksin A , Nichol R C , Schneider D P , Scranton R , Strauss M A , Szapudi I , Tegmark M , Vogeley M S , Weinberg D H , Zehavi I 2004 *Astrophys. J.* **607** 655
- [4] Carroll S M 2001 *Living Rev. Rel.* **4** 1
- [5] Caldwell R R , Dave R , Steinhardt P J 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 1582
- [6] Kamenshchik A Y , Moschella U , Pasquier V 2001 *Phys. Lett. B* **511** 265
- [7] Feng B , Wang X L , Zhang X M 2005 *Phys. Lett. B* **67** 35
- [8] Zhai X H , Zhao Y B 2006 *Chin. Phys.* **15** 2465
- [9] Tao B X , Ji S Y , Li F Q 2004 *Chin. Phys.* **13** 1830
- [10] Alam U , Sahni V 2006 *Phys. Rev. D* **73** 084024
- [11] Liu H Y , Wesson P S 2001 *Astrophys. J.* **562** 1
- [12] Ponce J , Leon D 2001 *Mod. Phys. Lett. A* **16** 2291
- [13] Seahra S S , Wesson P S 2003 *Class. Quant. Grav.* **20** 1321
- [14] Liu H Y , Mashhoon B 1995 *Ann. Phys.* **4** 565
- [15] Xu L X , Liu H Y , Zhang C W 2006 *Int. J. Mod. Phys. D* **15** 215
- [16] Liu H Y 2003 *Phys. Lett. B* **560** 149
- [17] Guo Z K , Ohtab N , Zhang Y Z 2005 *Phys. Rev. D* **72** 023504
- [18] Alam U , Sahni V , Saini T D , Starobinsky A A 2004 *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **354** 275
- [19] Jassal H K , Baglab J S , Padmanabhan T 2005 *Phys. Rev. D* **72** 103503
- [20] Seokcheon L 2005 *Phys. Rev. D* **71** 123528
- [21] Starobinsky A A 2000 *Grav. Cosmol.* **6** 157
- [22] Knop R A , Aldering G , Amanullah R , Astier P , Blanc G , Burns M S , Conley A , Deustua S E , Doi M , Ellis R , Fabbro S , Folatelli G , Fruchter A S , Garavini G , Garmond S , Garton K , Gibbons R , Goldhaber G , Goobar A , Groom D E , Hardin D , Hook I , Howell D A , Kim A G , Lee B C , Lidman C , Mendez J , Nobili S , Nugent P E , Pain R , Panagia N , Pennypacker C R , Perlmutter S , Quimby R , Raux J , Regnault N , Ruiz-Lapuente P , Sainton G , Schaefer B , Schahmanecche K , Smith E , Spadafora A L , Stanishev V , Sullivan M , Walton N A , Wang L , Wood-Vasey M W , Yasuda N 2003 *Astrophys. J.* **598** 102

The evolution of the reconstructing five-dimensional cosmological model with a big bounce^{*}

Wu Ya-Bo^{1)†} Lü Jian-Bo²⁾ Li Song³⁾ Yang Xiu-Yi²⁾

¹⁾ Department of Physics, Liaoning Normal University, Dalian 116029, China)

²⁾ School of Physics and Optoelectronic Technology, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

³⁾ Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875, China)

(Received 11 December 2006; revised manuscript received 1 November 2007)

Abstract

Based on the five-dimensional cosmological model with a big bounce, by using the forms of the effective equation of state for dark energy, the expression of the interesting function $f(z)$ is given in this model. Furthermore, the evolution of some cosmological quantities with the redshift z is presented. In addition, it is shown that the evolution of the dimensionless density parameters Ω_{dm} , Ω_{de} and deceleration parameter q for the first case is the best fit one, that consists with the present observations.

Keywords: big bounce model in universe, dark energy, equation of state

PACC: 9880, 0420, 0240

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10475036) and the Scientific Research Foundation of Institution of Higher Education of Liaoning Province, China (Grant Nos. 05L215, 2007T087).

[†] E-mail: ybwu61@163.com