

耦合双稳系统的随机共振控制*

林 敏† 黄咏梅 方利民

(中国计量学院计量技术工程学院 杭州 310018)

(2007 年 8 月 27 日收到 2007 年 11 月 16 日收到修改稿)

两个双稳系统经非线性耦合而成为多稳态系统,该耦合系统与单一双稳系统相比具有较高的理论研究和实际应用价值.解析地分析了耦合系统在含噪弱周期信号作用下的响应特性,给出了耦合系数和双稳系统参数对随机共振的影响,表明耦合系统的随机共振是在带状的双势阱作用下产生的,还构建了反馈耦合控制原理框图.这在双稳类系统中人为地产生随机共振或使共振效应更加强烈即随机共振的控制及其应用提供了可靠的理论依据.数值仿真结果与理论分析完全符合.

关键词:耦合双稳系统,随机共振,控制

PACC: 0540, 0545

1. 引 言

自 1981 年 Benzi 等^[1]提出随机共振这一概念以来,人们对随机共振的规律及其在自然科学各个领域的表现已经有了较为深入的研究^[2-7],在自然界中广泛存在随机共振这一事实已被普遍接受.随机共振在非线性光学、固态器件、神经生理学、信号处理、智能理论等领域也获得了重要应用.但这些研究更多地是从观察的角度而不是从影响或控制的角度来研究随机共振,所研究的非线性系统也大多是单一的双稳或阈值系统^[8,9].

1999 年 Gammaitoni 等^[10]为了增强或抑制系统输出功率谱在输入信号频率处的谱值,首次提出了控制随机共振的方法.随后,文献^[11,12]针对不同的系统相继提出了不同的随机共振控制方法,有力地促进了随机共振控制思想的形成.随机共振控制是实现随机共振应用的关键.

随机共振的产生通常需要弱输入周期信号、噪声和非线性系统三个要素,而涉及的主要变量有周期信号的频率、噪声的强度以及非线性系统的参数.在实际应用中,输入的周期信号和噪声是给定的,其参数是不可改变的,而非线性系统的结构参数往往也是固定的,要改变其相关的势垒高度或阈值是困

难的也是不可能的.只有当非线性双稳系统与周期信号、噪声之间的各变量存在着匹配关系时,才能产生随机共振.随机共振控制或控制随机共振就是要通过控制手段而有目的地强化或者产生随机共振,从而产生所需要的具有特定性质的输出响应.

本文将两个双稳系统通过非线性方式耦合为一多稳态系统^[13],该耦合系统具有比单一双稳系统更为丰富的动力学特性.根据双稳系统的线性响应理论,解析地分析了耦合系统在周期信号和噪声作用下的响应特性,给出了耦合系数和双稳系统参数对随机共振的影响.采用调节耦合系数和双稳系统的参数对耦合系统中另一参数固定的双稳系统进行控制,并构建了反馈耦合控制的原理框图,为在双稳类系统中实现随机共振的控制及其应用提供了可靠的理论依据.

2. 非线性耦合双稳系统特性

2.1. 耦合系统模型

研究随机共振的经典双稳系统模型为

$$\dot{x} = a_0 x - b_0 x^3 + A \cos(\omega t) + \xi(t), \quad (1)$$

式中 a_0 和 b_0 是双稳系统的参数, $A \cos(\omega t)$ ($A \ll 1$ 为幅值, ω 为频率)是作用到系统的弱周期信号,

* 国家自然科学基金(批准号: 60674023, 50675214)资助的课题.

† E-mail: limm@cjlu.edu.cn

$\xi(t)$ 是均值为零、自相关函数 $\xi(t)\xi(0) = 2D\delta(t)$ 的高斯白噪声, 其中 D 代表噪声强度. 由于实际存在的双稳系统, 信号和噪声之间各变量往往不匹配而不能产生随机共振. 为了人为地产生随机共振或使共振效应更加强烈, 将两个双稳系统采用非线性耦合方式构成一耦合系统, 并将其中一个参数可调的双稳系统 ($ay - y^3$) 作为控制系统, 另一参数固定的双稳系统 ($a_0x - b_0x^3$) 作为被控制系统, 构建如图 1 所示的反馈耦合控制原理框图. 图 1 所示耦合

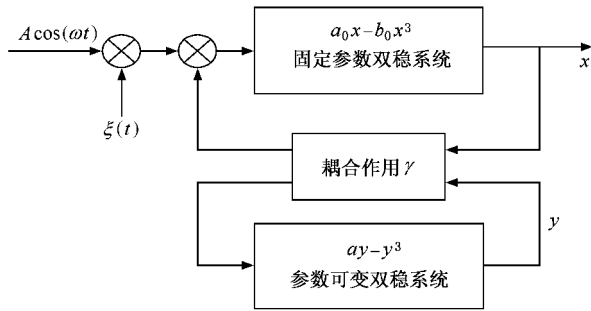


图 1 反馈耦合控制原理框图

控制过程中各变量与参数之间的关系可用如下耦合方程表示：

$$\dot{x} = a_0x - b_0x^3 - \gamma xy^2 + A \cos(\omega t) + \xi(t), \quad (2a)$$

$$\dot{y} = ay - y^3 - \gamma x^2 y, \quad (2b)$$

式中 γ 是两双稳系统之间的耦合系数, a 是可变的双稳系统参数, $x(t)$ 和 $y(t)$ 是双稳系统变量. 对于并不满足随机共振匹配条件的双稳系统 ($a_0x - b_0x^3$) 通过调节图 1 中的双稳系统 ($ay - y^3$) 的参数

a 和耦合系数 γ , 使之能产生随机共振或使共振的效应更为强烈.

2.2. 理论分析

(2) 式可改写为

$$\dot{x} = (a_0 - \gamma y^2)x - b_0x^3 + A \cos(\omega t) + \xi(t) \quad (3a)$$

$$\dot{y} = (a - \gamma x^2)y - y^3. \quad (3b)$$

该耦合系统的势函数 $V(x, y)$ 具有四个势阱, 可表示为

$$V(x, y) = -\frac{a_0}{2}x^2 + \frac{b_0}{4}x^4 - \frac{a}{2}y^2 + \frac{1}{4}y^4 + \frac{\gamma}{2}x^2y^2. \quad (4)$$

耦合系数 γ 和参数 a 的变化将影响耦合系统的势函数结构, 从而必将对系统的随机共振产生影响. 由于作用到耦合系统的周期信号 $A \cos(\omega t)$ 和噪声 $\xi(t)$ 都是沿 x 方向的, 因而能产生随机共振的运动也只能是沿着 x 方向的, 而不同的 y 值将对应着不同的势函数曲线和势阱高度. 当 (3a) 式中的参数 $A \ll 1, \omega \ll 1$ 和 $D \ll 1$ 时, 根据随机共振的线性响应理论^[14, 15] (3a) 式的稳态解可表示为

$$x(t) = X \cos(\omega t + \varphi), \quad (5)$$

式中 X 是耦合系统输出在频率 ω 处的幅值, 它反映了随机共振的强烈程度. 由于 $x(t)$ 是随机变量, 采用 $x(t)$ 的统计平均 $\langle x(t) \rangle$ 来刻画其特性, 并将 (5) 式代入 (3b) 式, 有

$$\dot{y} = [a - \gamma X^2 \cos^2(\omega t + \varphi)]y - y^3. \quad (6)$$

(6) 式属 Bernoulli 类型方程, 可严格求解, 其解为

$$y(t) = \pm \frac{\exp\left(at - \frac{1}{2}\gamma X^2 t - \frac{1}{2}\gamma X^2 t \cos(2\omega t + 2\varphi)\right) \sqrt{-2a + \gamma X^2 + \gamma X^2 \cos(2\omega t + 2\varphi)}}{\sqrt{-2a + 2y_0^2 - 2y_0^2 \exp(2at - \gamma X^2 t - \gamma X^2 t \cos(2\omega t + 2\varphi)) + \gamma X^2 + \gamma X^2 \cos(2\omega t + 2\varphi)}}, \quad (7)$$

式中 y_0 是初始条件. 当 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$y(t) \rightarrow \pm \sqrt{a - \frac{\gamma X^2 [1 + \cos(2\omega t + 2\varphi)]}{2}}. \quad (8)$$

若用 P_s 表示耦合系统输出功率谱, 则 P_s 在频率 ω 处的值为 $P_s(\omega) = X^2/2$ (8) 式可表示为

$$y(t) \rightarrow \pm \sqrt{a - \gamma P_s(\omega) [1 + \cos(2\omega t + 2\varphi)]}. \quad (9)$$

由于作用到系统的周期信号幅值 $A \ll 1$, 系统所产生的输出响应 $x(t)$ 的幅值 X 也较小, 因此, 在较小的耦合系数 γ 作用下, 经足够长的时间后 $y(t)$ 将趋于在

双稳系统的两稳态之一的 \sqrt{a} (或 $-\sqrt{a}$) 附近作周期为 2ω 的小幅波动. 参数 γ 和 a 的变化将影响 $y(t)$ 波动的均值.

$y(t)$ 对耦合系统输出 $x(t)$ 的影响是以 $y(t)$ 平方的形式出现在被控双稳系统的线性项系数中, 即 $\hat{a}_0 = a_0 - \gamma y^2$. 由于 $y(t)$ 的波动是小幅的, 因此耦合系统的势函数是 y 方向受限的二维窄带双势阱, 如图 2 所示. 图 2 中势函数 $V(x, y)$ 的各参数分别为 $a_0 = 1, b_0 = 1, a = 1, \gamma = 0.6$. 由此可见, 参数 γ 和 a

的变化将使系统的势垒高度和 Kramers 逃逸率发生变化^[2,16],从而影响被控双稳系统的固有特性,经适当调节总能使系统、信号和噪声的相互作用协同而产生随机共振.

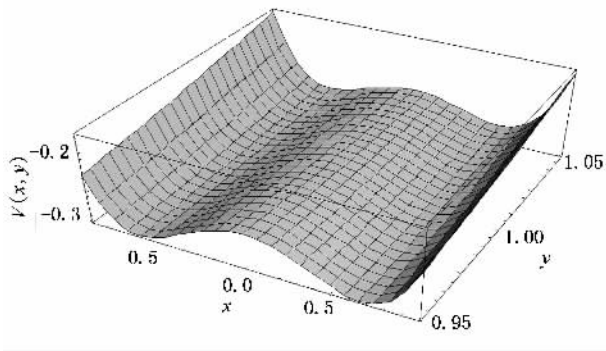


图2 y 方向受限的二维窄带双势阱 $a_0 = 1, b_0 = 1, a = 1, \gamma = 0.6$

3. 数值仿真分析

对于如图 1 所示的反馈耦合控制原理框图,不同的参数取值将呈现出各不相同的随机共振特性.将耦合双稳系统中的其中一个作为固定参数的被控系统,而另一个参数可调的系统则作为控制系统.

被控双稳系统的参数取 $a_0 = 0.1, b_0 = 1$,作用到系统的周期信号幅值 $A = 0.05$,频率 $\omega = 0.02\pi$,噪声强度 $D = 0.18$ 时,由于被控系统的势垒太低极容易在两个势阱内运动,作用的信号、噪声与被控系统之间不存在产生共振的匹配关系,输出响应 $x(t)$ 的功率谱 P_s 在频率 $\omega = 0.02\pi$ 处的值较小,如图 3(a) 所示.当设定控制系统的参数 $a = 1$,并通过调节耦合系数 γ 能使被控系统产生随机共振,当 $\gamma = -0.1$ 时输出响应 $x(t)$ 的功率谱 P_s 在频率 $\omega = 0.02\pi$ 处的值明显增大,如图 3(b) 所示.耦合的作用是人为地提高了被控双稳系统的势垒高度,使信号、噪声与耦合系统之间能协同作用而产生随机共振,实现噪声能量与信号能量的转换,提高了输出信号的品质.

被控双稳系统的参数取 $a_0 = 0.5, b_0 = 1$,作用到系统的周期信号幅值 $A = 0.05$,频率 $\omega = 0.02\pi$,噪声强度 $D = 0.18$ 时,由于势垒高度太高, $x(t)$ 只能在一个势阱内的稳定点 $\sqrt{a_0/b_0} = 0.707$ 附近波动,如图 4 所示.系统与作用的信号、噪声之间不满足匹配条件而不能产生随机共振,也无法实现噪声与信号之间的能量转换.采用图 1 所示的耦合控制

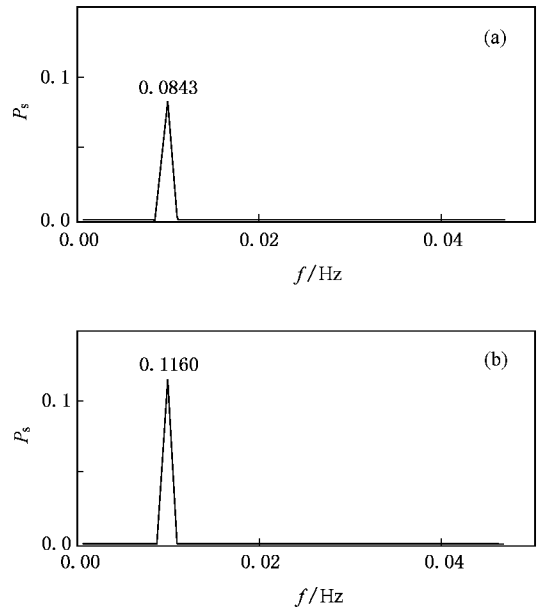


图3 输出响应 $x(t)$ 的功率谱 P_s . (a) 无耦合作用 ($\gamma = 0$), (b) 耦合作用 ($\gamma = -0.1$)

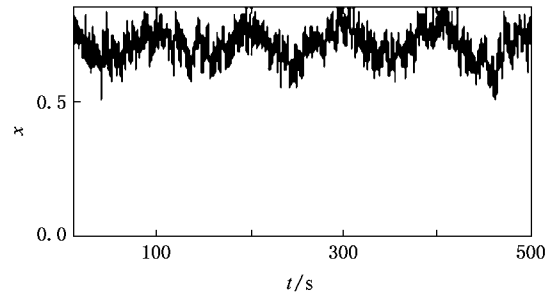


图4 当 $a_0 = 0.5, b_0 = 1, \gamma = 0$ 时, $x(t)$ 只在单一势阱内波动

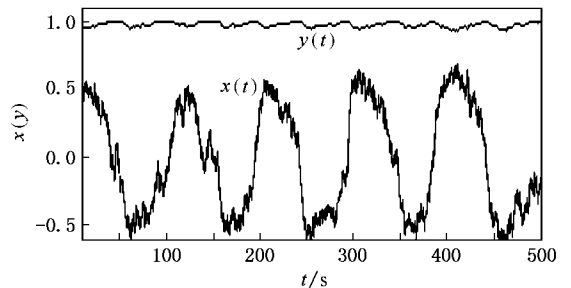


图5 当 $\gamma = 0.35$ 时, 耦合系统变量 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的时域波形

方法,设定控制系统参数 $a = 1$,通过调节耦合系数 γ 能使系统产生随机共振.当 $\gamma = 0.35$ 时,耦合系统两个变量 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的时间波形如图 5 所示.由图 5 可见, $y(t)$ 在略低于 $\sqrt{a} = 1$ 附近作小幅波动,而 $x(t)$ 在两势阱之间振动,输出功率谱 P_s 在频率 ω

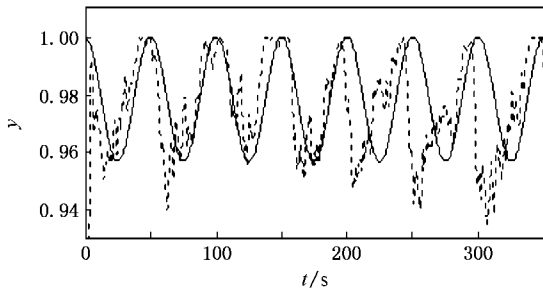


图 6 当 $\gamma = 0.35$ 时, 变量 $y(t)$ 的时域波形 实线为理论结果, 虚线为仿真结果

$= 0.02\pi$ 处的值为 0.1205. 将 a, γ 和 P_s 的值代入 (9) 式可获得 $y(t)$ 的理论曲线, 如图 6 所示. 图 6 中的实线是理论结果, 虚线是仿真结果, 数值仿真结果与理论分析结果相符合.

当输入信号和噪声参数保持不变, 被控系统参数取 $a_0 = 1, b_0 = 1$ 时, 则 $x(t)$ 也只在稳定点 $\sqrt{a_0/b_0} = 1$ 附近作小幅波动, 如图 7 所示. 采用图 1 所示的

耦合控制方法, 分别设定控制系统参数 $a = 1, 2, 4, 8$, 通过调节耦合系数 γ 能使耦合系统产生随机共振, 如图 8 所示. 图 8 (a) 是 $a = 1, \gamma = 0.96$ 时耦合系统两个变量 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的时间波形, 可见 $y(t)$ 在略低于 $\sqrt{a} = 1$ 附近作波动, 而 $x(t)$ 在两势阱间振动. 图 8 (b) (c) (d) 分别是 $a = 2, \gamma = 0.45; a = 4, \gamma = 0.22; a = 8, \gamma = 0.11$ 时耦合系统的 $x(t)$ 和 $y(t)$ 波形. 从图 8 可以看出, 数值仿真结果与理论分析完全符合.

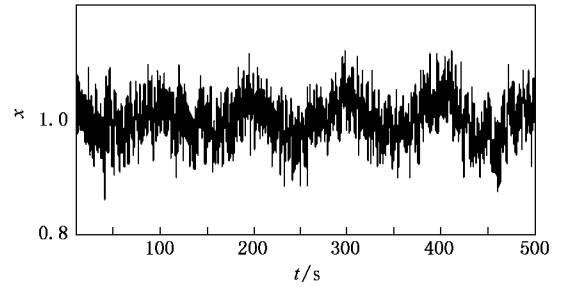


图 7 当 $a_0 = 1, b_0 = 1, \gamma = 0$ 时, $x(t)$ 只在单一势阱内波动

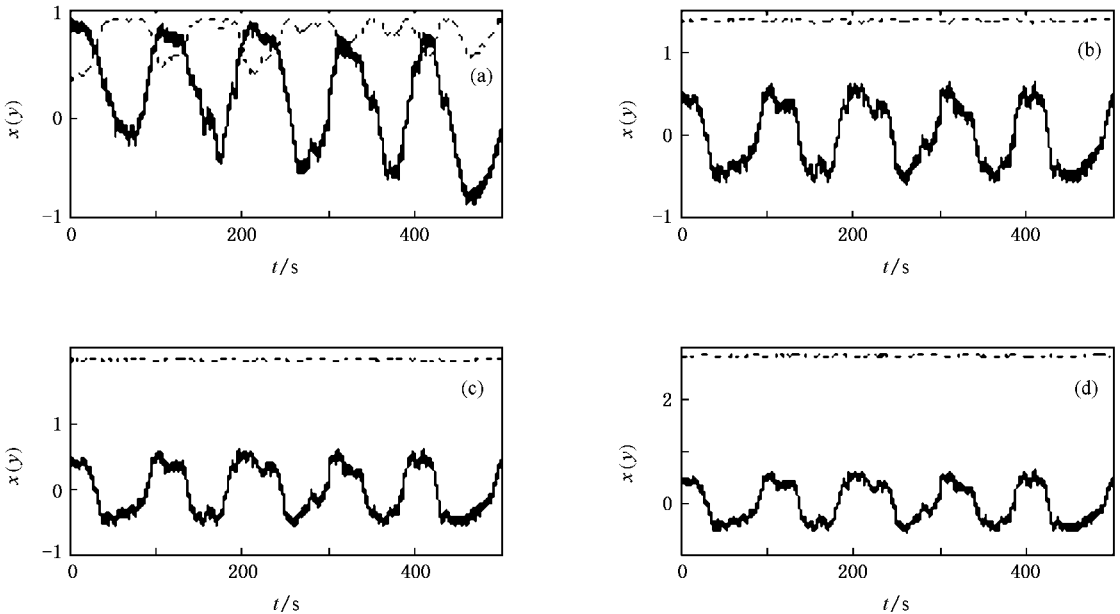


图 8 当参数 a 和 γ 取不同值时, 耦合系统 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的波形 实线为 $x(t)$ 的波形, 虚线为 $y(t)$ 的波形. (a) $a = 1, \gamma = 0.96$ (b) $a = 2, \gamma = 0.45$ (c) $a = 4, \gamma = 0.22$ (d) $a = 8, \gamma = 0.11$

4. 结 论

相互作用是到处存在的. 两个双稳系统通过非线性耦合可以成为多稳态系统, 该耦合系统具有四个势阱, 有着较为丰富的动力学特性, 单一双稳系统及其特性只是耦合系统的特例. 本文解析地分析了

耦合系统在周期信号和噪声作用下的响应特性, 表明耦合系统的随机共振是在带状的双势阱作用下产生的, 而该势函数随着时间还作小幅的波动, 与单一双稳系统的一维势函数有着本质的区别. 构建了反馈耦合控制原理框图, 将耦合系统中的其中一个双稳系统当作参数固定的被控系统, 而另一个双稳系统则作为参数可调的控制系统, 通过调节耦合系数

和双稳系统参数能产生随机共振. 该方法灵活、有效, 特别适用于参数固定或难以改变的系
统. 数值仿

真结果与理论分析完全符合.

- [1] Benzi R ,Sutera A ,Vulpiana A 1981 *Physica A* **14** L453
- [2] Gammaitoni L ,Hanggi P ,Jung P ,Marchesoni F 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 223
- [3] Babinec P 1997 *Phys. Lett. A* **225** 179
- [4] Nozaki D ,Mar D J ,Grigg P ,Collins J J 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 2402
- [5] Qin G R ,Gong D C ,Hu G ,Wen X D 1992 *Acta Phys. Sin.* **41** 360 (in Chinese)[秦光戎、龚德纯、胡 岗、温孝东 1992 物理学报 **41** 360]
- [6] Zhu H J ,Li R ,Wen X D 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2404 (in Chinese)[祝恒江、李 蓉、温孝东 2003 物理学报 **52** 2404]
- [7] Lin M ,Huang Y M 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3277 (in Chinese) [林 敏、黄咏梅 2006 物理学报 **55** 3277]
- [8] Li J L ,Xu B H 2006 *Chin. Phys.* **15** 2867
- [9] Leng Y G ,Wang T Y ,Guo Y ,Wang W J ,Hu S G 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1118 (in Chinese)[冷永刚、王太勇、郭 焱、汪文津、胡世广 2005 物理学报 **54** 1118]
- [10] Gammaitoni L ,Löcher M ,Bulsara A R ,Hanggi P ,Neff J ,Wiesenfeld K ,Ditto W L ,Inchiosa M E 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 4574
- [11] Löcher M ,Inchiosa M E ,Neff J ,Bulsara A R ,Wiesenfeld K ,Gammaitoni L ,Hanggi P ,Ditto W L 2000 *Phys. Rev. E* **62** 317
- [12] Schmid G ,Hanggi P 2005 *Physica A* **351** 95
- [13] Gandhimathi V M ,Rajasekar S ,Kurths J 2006 *Phys. Lett. A* **360** 279
- [14] Dykman M I ,Luchinsky D G ,McClintock P V E ,Mannella R 1993 *J. Stat. Phys.* **70** 463
- [15] Dykman M I ,Mannella R ,McClintock P V E ,Stocks N G 1990 *Phys. Rev. Lett.* **65** 2606
- [16] Hu G 1994 *Stochastic Forces and Nonlinear Systems* (Shanghai : Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) (in Chinese)[胡 岗 1994 随机力与非线性系统(上海 :上海科技教育出版社)]

The stochastic resonance control of coupled bistable systems^{*}

Lin Min[†] Huang Yong-Mei Fang Li-Min

(College of Metrology Technology and Engineering ,China Jiliang University ,Hangzhou 310018 ,China)

(Received 27 August 2007 ; revised manuscript received 16 November 2007)

Abstract

Two bistable systems can become multistable through nonlinear coupling. The coupled system is more valuable than the single bistable system in theoretical research and practical application. The response characteristics of the coupled system subjecting to noise and periodic signal have been analytically analyzed to show the effect of coupled coefficient and bistable system parameters on stochastic resonance. The results show that the stochastic resonance is produced by the effect of zonal double-well potential. The schematic diagram of feedback coupled control principle has also been constructed. The method gives a reliable theoretical basis for artificially producing stochastic resonance or strengthening the effect of resonance in bistable system to control the stochastic resonance , and also for its application. The results of numerical simulation agree with that of theoretical analysis.

Keywords : coupled bistable systems , stochastic resonance , control

PACC : 0540 , 0545

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 60674023 , 50675214).

[†] E-mail : linm@cjlu.edu.cn