

非线性振动系统的预测同步方法研究*

秦卫阳 杨永锋 王红瑾 任兴民

(西北工业大学工程力学系, 西安 710072)

(2007 年 6 月 26 日收到, 2007 年 11 月 16 日收到修改稿)

对于非线性振动系统, 如果通过线性耦合可以实现派生系统与原系统的同步, 则可以建立相应的预测派生系统, 使得预测派生系统的响应与经 τ 时间以后的原系统响应同步, 实现对原振动系统的非线性响应, 特别是混沌响应的预测. 也可以建立多级的预测派生系统, 预测较长一段时间以后的振动系统未来的非线性响应. 对于 Duffing 系统建立了 6 级的预测派生系统, 可以比较精确地预测 3 s 左右的原系统混沌响应.

关键词: 预测同步, 派生系统, 响应

PACC: 0545

1. 引 言

自从 Pecora 等^[1]实现了混沌的同步以来, 非线性同步问题引起了许多研究者的关注, 取得了很多研究成果^[2-8]. 近年来, 出现了一些新类型的同步, 比如广义同步、延迟同步、相同步以及预测同步^[9, 10], 其中预测同步的提出是一个突破. 由于混沌运动是系统内禀随机性的表现, 一般无法对其运动进行预测, 但是预测同步可以使得派生系统响应与一定时间后未来的原系统混沌响应同步, 相当于提前观察到了原系统的混沌运动, 实现了对混沌响应的预测, 因此具有很重要的意义^[11-13]. 实际上, 对于激光系统预测同步的研究已取得了比较重要的进展^[14, 15], 通过数值仿真及实验研究, 已经在耦合的激光系统中观察到了预测同步现象^[16-18]. 预测同步提出的时间不是很长, 目前的研究主要集中在自治系统, 对于非自治强迫振动系统, 由于有时间项的存在而无法直接应用自治系统的方法, 作者至今未见到公开发表的相关研究成果.

本文对非线性非自治振动系统的预测同步问题进行了研究, 提出了建立振动预测同步系统的方法. 为了提高预测的时间量, 建立了多级的预测系统, 证明可以实现比较长时间的非线性振动系统混沌响应的预测.

2. 预测派生系统的建立

一般的非线性强迫振动系统可以表示为

$$\dot{x} = f(x) + g(t), \quad (1)$$

式中 $f(x)$ 为其非线性项, $g(t)$ 为激振力. 为了实现同步, 可以建立如下的派生系统:

$$\dot{y} = f(y) + g(t) + k(x - y). \quad (2)$$

已经证明^[19], 如果 $f(x)$ 满足 Lipschitz 条件, 则建立线性耦合的派生系统可以实现与原系统的同步.

将方程 (1) 减去方程 (2), 可以得到系统的差别方程

$$\dot{e} = f(x) - f(y) - ke, \quad (3)$$

其中

$$e = x - y.$$

由于两个系统可以通过线性耦合实现同步, 其响应最终会完全一致, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e\| = 0.$$

为了实现预测同步, 建立如下的预测派生系统:

$$\dot{y} = f(y) + g(t + \tau) + k(x - y_{-\tau}), \quad (4)$$

其中

$$y_{-\tau} = y(t - \tau).$$

对于方程 (1), 在 $t + \tau$ 时刻有

$$\dot{x}_{+\tau} = f(x_{+\tau}) + g_{+\tau}. \quad (5)$$

方程 (5) 减去方程 (4), 有

$$\dot{x}_{+\tau} - \dot{y} = f(x_{+\tau}) - f(y) - k(x - y_{-\tau}). \quad (6)$$

* 国家自然科学基金(批准号: 10372079)资助的课题.

如果 τ 很小, 则预测差别方程 (6) 与原差别方程 (3) 就很相似. 由于同步流形 $x = y$ 的稳定性^[10], 对于很小的 τ , 仍然可以保持同步, 即 $x = y_{-\tau}$ 仍然是稳定的, 此时有

$$y = x_{+\tau} = x(t + \tau),$$

即派生系统实现了对原系统的预测同步, 也就是派生系统的响应与经 τ 时间后的原系统响应完全相同, 尽管此时的 τ 很小, 但仍然具有重要的意义.

对于 τ 很小的情况, 虽然实现了对原系统振动响应的预测, 用途却不大. 为了实现比较长时间的预测, 可以建立多级的预测派生系统.

对于已建立的第一级预测派生系统 (方程 (4)), 在达到预测同步后, 会出现

$$x - y_{-\tau} = 0.$$

此后方程 (4) 变为

$$\dot{y} = f(y) + g(t + \tau). \quad (7)$$

对于方程 (7), 在 $t + \tau$ 时满足

$$\dot{y}_{+\tau} = f(y_{+\tau}) + g_{+2\tau}. \quad (8)$$

建立第二级预测派生系统

$$\dot{z}^{(1)} = f(z^{(1)}) + g(t + 2\tau) + k(y - z_{-\tau}^{(1)}). \quad (9)$$

将方程 (8) 减去方程 (9), 可以得到第二级差别方程

$$\dot{y}_{+\tau} - \dot{z}^{(1)} = f(y_{+\tau}) - f(z^{(1)}) - k(y - z_{-\tau}^{(1)}). \quad (10)$$

方程 (10) 与方程 (6) 形式完全相同, 因而同样存在着稳定的同步流形

$$z^{(1)} = y(t + \tau) = x(t + 2\tau). \quad (11)$$

相似地, 可以建立其后的各级预测派生系统, 形成一个 i 级的预测派生系统

$$\dot{z}^{(2)} = f(z^{(2)}) + g(t + 3\tau) + k(z^{(1)} - z_{-\tau}^{(2)}),$$

$$\dot{z}^{(3)} = f(z^{(3)}) + g(t + 4\tau) + k(z^{(2)} - z_{-\tau}^{(3)}),$$

$$(12)$$

$$\dot{z}^{(i)} = f(z^{(i)}) + g(t + i\tau)$$

$$+ k(z^{(i-1)} - z_{-\tau}^{(i)}),$$

使得 $z(t)^{(i)}$ 能够与 $x(t + (i+1)\tau)$ 同步, 即 $z(t)^{(i)}$ 与经 $(i+1)\tau$ 时间以后的 $x(t)$ 相同, 这样就可以提前比较长的时间预测 $x(t)$ 的响应. 需要指出的是, 预测同步不是简单的预测, 而是此时此刻的 $z(t)^{(i)}$ 必定会在经一定时间 (即 $(i+1)\tau$) 后的 $x(t)$ 响应出现, 相当于可以得到未来 $x(t)$ 的响应, 因此具有比较重要的意义.

在以上的叙述中, 为了简洁取每次的时间间隔

都为 τ . 实际上, 如果每次取不同的时间间隔 τ_i , 结果也是一样的, 此时最后的 $z(t)^{(i)}$ 会与 $\sum \tau_i$ 以后的 $x(t)$ 响应同步, 也就是可以预测 $\sum \tau_i$ 以后的 $x(t)$ 的响应.

3. 仿真计算

选取 Duffing 系统作为具体的研究对象, 进行预测同步的仿真计算. Duffing 系统的表达式如下:

$$\ddot{x} + cx - x + x^3 = F \cos \omega t. \quad (13)$$

随着系统参数 c, F, ω 的变化, 响应会出现混沌运动. 此时, 可以建立其线性耦合的派生系统实现与原 Duffing 系统的同步. 派生系统可以写成如下的二阶常微分方程:

$$\ddot{y} + cy - y + y^3 + \alpha(x - y) + \beta(\dot{x} - \dot{y}) = F \cos \omega t, \quad (14)$$

其中 $\alpha < -0.5, \beta < -0.5$.

为了实现预测同步, 按照上述分析, 建立 6 级的预测派生系统, 写成二阶常微分方程组如下:

$$\begin{aligned} & \ddot{z}^{(1)} + cz^{(1)} - z^{(1)} + z^{(1)3} \\ & + \alpha(x - z_{-\tau_1}^{(1)}) + \beta(\dot{x} - \dot{z}_{-\tau_1}^{(1)}) \\ & = F \cos \omega(t + \tau_1), \\ & \ddot{z}^{(2)} + cz^{(2)} - z^{(2)} + z^{(2)3} + \alpha(x - z_{-\tau_1}^{(2)}) \\ & + \beta(\dot{x} - \dot{z}_{-\tau_1}^{(2)}) \\ & = F \cos \omega(t + \tau_1 + \tau_2), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \ddot{z}^{(6)} + cz^{(6)} - z^{(6)} + z^{(6)3} + \alpha(z^{(5)} - z_{-\tau_1}^{(6)}) \\ & + \beta(\dot{z}^{(5)} - \dot{z}_{-\tau_1}^{(6)}) \\ & = F \cos \omega\left(t + \sum_1^6 \tau_i\right). \end{aligned}$$

下面对 $F = 0.28, \omega = 1.2, c = 0.2$ 和 $F = 0.8, \omega = 1.0, c = 1.0$ 两种情况进行具体的计算分析.

1) 在 $F = 0.28, \omega = 1.2, c = 0.2$ 时, 系统会出现混沌运动 (图 1), 此时选择 $\tau_1 = 0.6 \text{ s}, \tau_j = 0.3 \text{ s}, j = 2, \dots, 6$, 则最终的预测时间为 $\tau = 0.6 + 5 \times 0.3 = 2.1 \text{ s}$. 图 2 显示了在同一时间段内 $x(t)$ 与 $z^{(6)}(t)$ 的响应变化. 从图 2 可以看出, $z^{(6)}(t)$ 比 $x(t)$ 提前了 2.1 s . 图 3 显示的是 $z^{(6)}(t) - x(t + 2.1)$ 的结果. 从图 3 可以看出, 结果最后趋近于零, 即 $z^{(6)}(t) = x(t + 2.1)$.

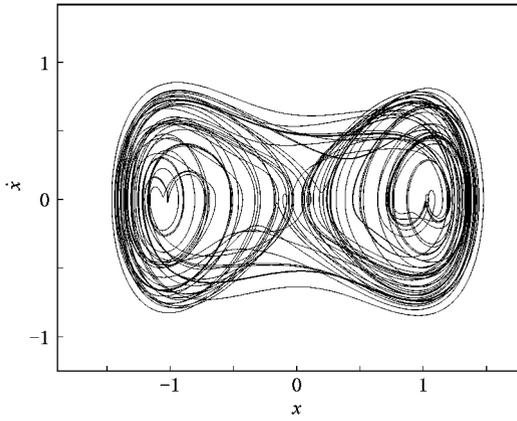


图 1 在 $F=0.28, \omega=1.2, c=0.2$ 时 Duffing 系统的混沌运动相图

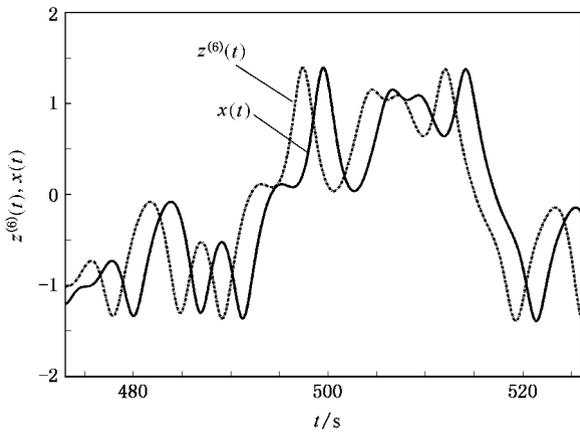


图 2 在 $F=0.28, \omega=1.2, c=0.2$ 时第 6 级派生系统响应 $z^{(6)}(t)$ 与原系统响应 $x(t)$ 的对比

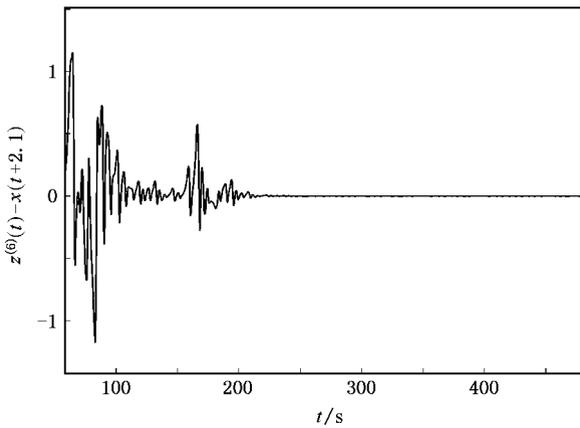


图 3 第 6 级派生系统响应 $z^{(6)}(t)$ 与原系统 2.1 s 以后的响应 $x(t+2.1)$ 之差

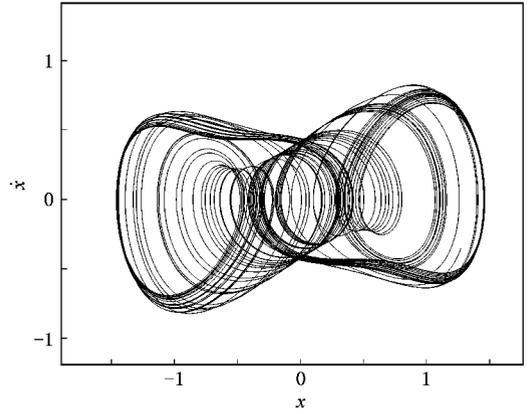


图 4 在 $F=0.8, \omega=1.0, c=1.0$ 时 Duffing 系统的混沌运动相图

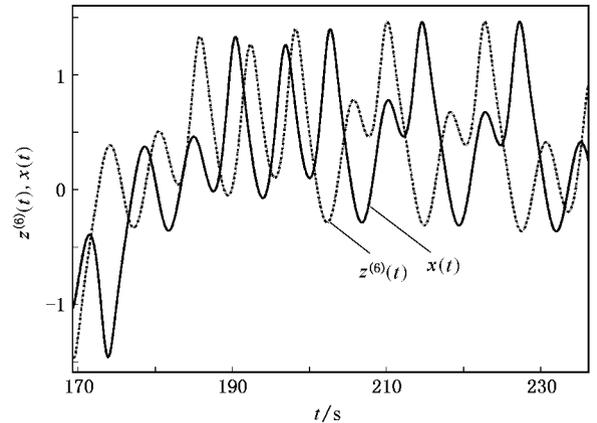


图 5 在 $F=0.8, \omega=1.0, c=1.0$ 时第 6 级派生系统响应 $z^{(6)}(t)$ 与原系统响应 $x(t)$ 的对比

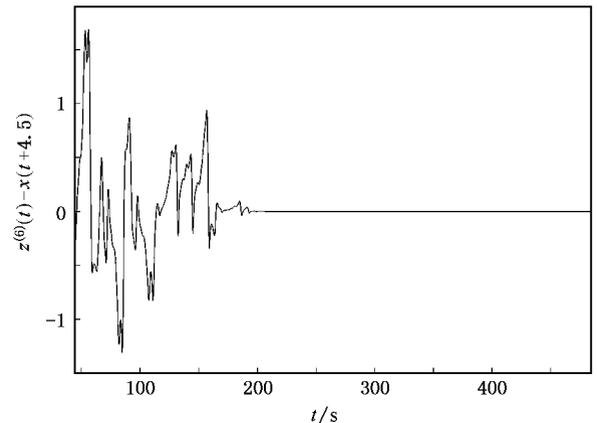


图 6 第 6 级派生系统响应 $z^{(6)}(t)$ 与原系统 4.5 s 以后的响应 $x(t+4.5)$ 之差

4.5 s. 图 5 显示了在同一时间段内 $x(t)$ 与 $z^{(6)}(t)$ 的响应变化. 从图 5 可以看出, $z^{(6)}(t)$ 比 $x(t)$ 提前了 4.5 s. 图 6 显示了 $z^{(6)}(t) - x(t+4.5)$ 的结果. 从图 6 可以更加明显地看出, $z^{(6)}(t)$ 与 $x(t+4.5)$ 实现了同步, 即 $z^{(6)}(t) = x(t+4.5)$.

2) 在 $F=0.8, \omega=1.0, c=1.0$ 时, 系统也会出现混沌运动(图 4). 此时选择 $\tau_1=10\text{ s}, \tau_j=0.7\text{ s } (j=2, \dots, 6)$, 则最终的预测时间 $\tau=1.0\text{ s} + 5 \times 0.7\text{ s} =$

4. 结 论

综上所述,可以得到以下的结论:

1)对于非线性振动系统,如果在响应线性耦合情况下出现同步现象,则可以通过建立预测派生系统实现派生系统对原系统响应的预测同步.

2)预测派生系统在 t 此刻的响应与原系统 $t + \tau$ 时刻的响应完全相同,可以实现对非线性系统的响应,特别是混沌响应的预测.

3)建立多级的预测派生系统,可以提高预测的时间量,实现对原非线性振动系统较长时间后的未来响应预测,特别是对混沌运动也可以实现较长时间的预测.

-
- [1] Pecora L M ,Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [2] Cross M C ,Zumdieck A ,Lifshitz R ,Rogers J L 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 224101
- [3] Guan S G ,Li K ,Lai C H 2006 *Chaos* **16** 023107
- [4] Chen Z ,Lin W ,Zhou J 2007 *Chaos* **17** 023106
- [5] Jia F L ,Xu W 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3101 (in Chinese) [贾飞蕾、徐 伟 2007 物理学报 **56** 3101]
- [6] Yang D S ,Zhang H G ,Li A P ,Meng Z Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3121 (in Chinese) [杨东升、张化光、李爱平、孟子怡 2007 物理学报 **56** 3121]
- [7] Chen B ,Liu G G ,Zhang Y ,Zhou Z O 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5039 (in Chinese) [陈 滨、刘光祜、张 勇、周正欧 2005 物理学报 **54** 5039]
- [8] Zhu S Q ,Luo X Q ,Fang J X 2001 *Chin. Phys. Lett.* **18** 727
- [9] Voss H U 2000 *Phys. Rev. E* **61** 5115
- [10] Voss H U 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 014102
- [11] Ciszak M ,Calvo O ,Masoller C ,Mirasso C R ,Toral R 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 204102
- [12] Ciszak M ,Marino F ,Toral R ,Balle S 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 114102
- [13] Corron N J ,Blakely J N ,Pethel S D 2005 *Chaos* **15** 023110
- [14] Masoller C 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 2782
- [15] Shahverdiev E M ,Sivaprakasam S ,Shore K A 2002 *Phys. Rev. E* **66** 037202
- [16] Tang S ,Liu J M 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 194101
- [17] Wu L ,Zhu S ,Ni Y 2007 *Eur. Phys. J. D* **41** 349
- [18] Wu L ,Zhu S 2003 *Phys. Lett. A* **315** 101
- [19] Qin W Y ,Wang H J ,Zhang J F 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 4361 (in Chinese) [秦卫阳、王红瑾、张劲夫 2007 物理学报 **56** 4361]

Anticipated synchronization for a class of nonlinear vibration systems^{*}

Qin Wei-Yang Yang Yong-Feng Wang Hong-Jin Ren Xing-Min

(*Department of Engineering Mechanics ,Northwestern Polytechnical University ,Xi'an 710072 ,China*)

(Received 26 June 2007 ; revised manuscript received 16 November 2007)

Abstract

For the nonlinear vibration system ,if the derived system can reach synchronization with the original system by linear coupling , a corresponding anticipated system can be formed to realize the anticipated synchronization. The response of anticipated system can synchronize with the future response of original system and realize the prediction for nonlinear response , even for chaos in the original system. In order to realize a long-term prediction , a series of anticipated systems can be formed by the rule presented in this paper. For chaotic motion in Duffing system , a 6-level anticipated system is formed , which can predict the response of original Duffing system in about 3 s.

Keywords : anticipated synchronization , derived system , response

PACC : 0545

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10372079).