

多重边融合复杂动态网络的自适应同步*

高 洋^{1)†} 李丽香¹⁾ 彭海朋¹⁾ 杨义先¹⁾ 张小红¹⁾²⁾

1) 北京邮电大学网络与交换技术国家重点实验室 北京 100876)

2) 江西理工大学信息工程学院 赣州 341000)

(2007 年 8 月 14 日收到 2007 年 11 月 21 日收到修改稿)

基于网络拆分的思想对多重边融合复杂动态网络局部和全局的自适应同步进行了研究. 通过给出严格的数学定义及假设, 运用 Lyapunov 稳定理论得出了网络局部和全局的同步准则, 给出了更为简单的网络同步的控制器. 最后以 Lorenz 系统为例进行数值仿真, 验证了结论的正确性和有效性.

关键词: 多重边融合复杂动态网络, 自适应同步, 网络拆分, 时滞

PACC: 0545

1. 引 言

随着人类社会的日益网络化, 复杂网络引起了人们的广泛关注, 对其研究正渗透到数理学科、生命学科和工程学科等众多不同的领域. 复杂网络的理论研究始于著名数学家 Erdos 和 Renyi^[1]提出的 ER 随机图模型. 两项开创性工作即小世界网络模型^[2]和无标度网络模型^[3]的提出掀起了一股研究复杂网络的热潮. 此后, 相关研究主要是针对复杂网络的模型、属性和网络上的过程等方面展开. 目前提出的复杂网络的数学模型主要有随机网络模型、耦合规则网络模型、小世界网络模型、无标度网络模型和广义动态复杂网络模型. 对于网络属性的研究主要集中于网络的传递性、聚类性、定点度分布和小世界效应等方面. 对于网络上的过程研究集中于渗流理论、传染过程、网络相变、网络混沌同步等方面^[4-10]. 同时, 网络融合也受到人们越来越多的关注, 尤其是对于电信网、计算机网和视频网三网融合的研究已成为热点问题. 现在对于融合网络的研究主要基于技术层面, 但融合的含义是宽泛的, 是一个综合而复杂的过程, 可以从多个层面、多个角度进行融合的思考. 本文考虑的由多个子网络构成的复杂网络就属于融合网络的范畴.

国内外对于复杂网络的研究主要是针对单边的复杂网络的研究^[1-3, 11-14], 而对于具有多重边的融合复杂网络的研究工作还很少. 在现实生活中, 存在着由多种性质的子网络构成的多重边融合复杂网络, 如交通网、通信网、人际关系网等. 这些融合网络是由多个不同性质的子网络构成的. 以交通网为例, 把每个城市看作一个节点, 两城市间的交通线为边, 两城市间可能存在多种交通方式, 如公路、铁路、航空线等. 这样的交通网络就形成了一个多重边的融合复杂网络. 这样具有多种性质的融合网络必然具有不同于单一性质的单边复杂网络的特征, 其网络的拓扑结构、节点动态特性等可能更为复杂.

在处理融合网络时, 一个最简单的方式是把不同性质的边合并为一条边进行处理. 但是, 在现实生活中存在的一些边是不能简单合并处理的, 比如上面提到的交通网和通信网, 由于网络中边与边之间速度差异较大, 简单的合并不能真实地反映网络的特性. 因此, 我们就要考虑运用其他的方法来处理网络的融合. 本文考虑的是网络中任意两点间的多条边可能具有不同性质. 例如: 交通网中的公路网、铁路网、航空网等运输速度是不同的, 在同时出发的前提下, 航空网运输速度最快, 铁路网和公路网对于航空网都分别存在一个到达时间的滞后(如图 1 所示). 通信网中的电缆网络和光纤网络也存在传输速

* 国家重点基础研究发展规划(批准号: 2007CB310704)、国家自然科学基金(批准号: 60673098)和高等学校博士学科点专项科研基金(批准号: 20070013005)资助的课题.

† E-mail: gaoyang_du@sina.com

度的不同,其中电缆网络相对于光纤网络在信息传输速度上存在滞后.同样,人们之间可以通过信件、电话、电子邮件等多种方式进行联络,我们可以把这种联络网络拆分成邮寄网络、电话网络、Internet 网络,显然,这些子网络也存在信息传输时间的不同.

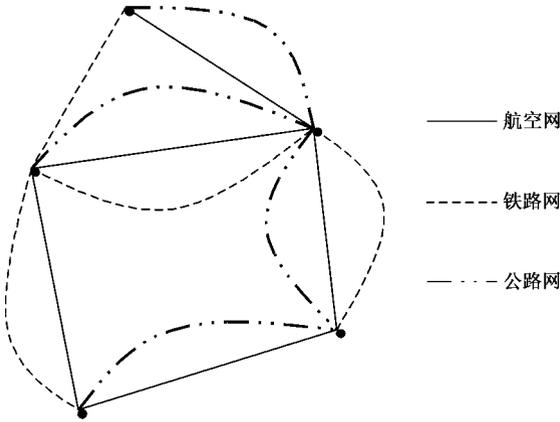


图 1 交通网络示意图

复杂动态网络的一个非常有趣而又重要的现象就是研究网络所有动力学节点的同步性.同步是一个典型的集体行为,同步现象虽然在自然界中俯拾皆是.复杂网络的小世界和无标度特性的发现,使得人们开始关注网络的拓扑结构与网络的同步化行为之间的关系^[15-17].由于动态网络的模型往往是未知或含有不确定因素,这使得想要设计一个网络同步方案是非常困难的.为了克服这些困难,基于多重边融合复杂动态网络模型,我们提出了一种有效的自适应同步方法.

本文运用网络拆分的思想研究了多重边融合复杂动态网络的局部和全局的自适应同步.根据边与边之间信息传输速度的不同,通过引入滞后将多重边融合复杂网络拆分成多个子网络,进而建立数学模型.在此基础上分析了网络的自适应同步,给出了网络局部和全局同步准则.最后,通过仿真验证了结果的正确性.

2. 模型描述

最近,文献^[18,19]提出了下列连续时间线性耦合网络的动态模型:

$$\dot{x}_i = f(x_i) + \epsilon \sum_{j=1}^N a_{ij} H x_j \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

这里 $f: R^n \rightarrow R^n$ 是连续可微的函数, $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})^T \in R^n$ 为节点 i 的状态变量,常数 $\epsilon > 0$

为网络的耦合强度, $H \in R^{n \times n}$ 为各个节点状态变量之间的内部耦合函数.耦合矩阵

$$A = (a_{ij})_{N \times N} \in R^{N \times N}$$

表示网络的拓扑结构,满足耗散耦合条件

$$\sum_j a_{ij} = 0,$$

其中 a_{ij} 的定义如下:若节点 i 和节点 j ($i \neq j$) 之间有连接,则 $a_{ij} = a_{ji} = 1$,否则 $a_{ij} = a_{ji} = 0$ ($i \neq j$).对角元为

$$a_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

这个模型很好刻画了单边复杂网络的动力学特性.

本文考虑的是复杂网络融合时的情况,我们将根据节点间信息传输速度的不同,通过引入滞后对多重边融合网络进行拆分,将网络拆分成多个子网络的组合形式.

若我们把网络拆分成多个子网络,显然有多种拆分方式,而我们的原则是根据边的不同性质进行拆分.考虑含有 N 个节点的融合复杂网络,假设网络中边的性质有 m 种,网络中两点间的最大重边数为 k ,其中具有相同性质的边和 N 个点就形成了一个子网络,这样就得到了 m 个子网络,拆分后的子网络可能也是多重边的网络,设第 l 个子网络的最大重边数为 p_l ($l = 0, 1, \dots, m-1$) 并且 $p_l \leq k$,这样就构成了网络的拆分(拆分后的每个子网络都有其自身的性质而且可能不是连通的网络).本文把网络中各个边传输速度的不同定义为性质不同,以传输速度最快的或没有时滞的边和 N 个节点组成的网络为基准网络,称这个基准网络为零子网络($l = 0$),即时滞 $\tau_0 = 0$ 的网络,剩余边中相对于零子网络有相同时滞 τ_l 的边和 N 个节点构成第 l ($l = 1, \dots, m-1$) 个子网络,这样,最后可以拆分成 m 个子网络.以交通网为例,把交通网拆分成公路网、铁路网、航空网等子网络,以运输速度最快的航空网络为零子网络,公路网、铁路网相对于航空网分别存在滞后 τ_1 和 τ_2 .在现实生活中,像交通网这样存在传输滞后的情况是大量存在的,比如通信网络和人际间的联系网络.因此,我们根据多重边融合复杂网络中边的传输速度不同通过引入滞后对多重边融合网络进行拆分的方法是可行的.图 2 是对交通网进行拆分过程示意图,图中 τ 表示运输的滞后时间.

考虑一个由 N 个相同节点构成的耗散耦合 k 重边融合动态网络,其中网络中边的性质有 m 种.根据上述思想和方法,我们把这个 k 重边融合动态网络拆分成 m 个子网络,则整个动态网络的状态方

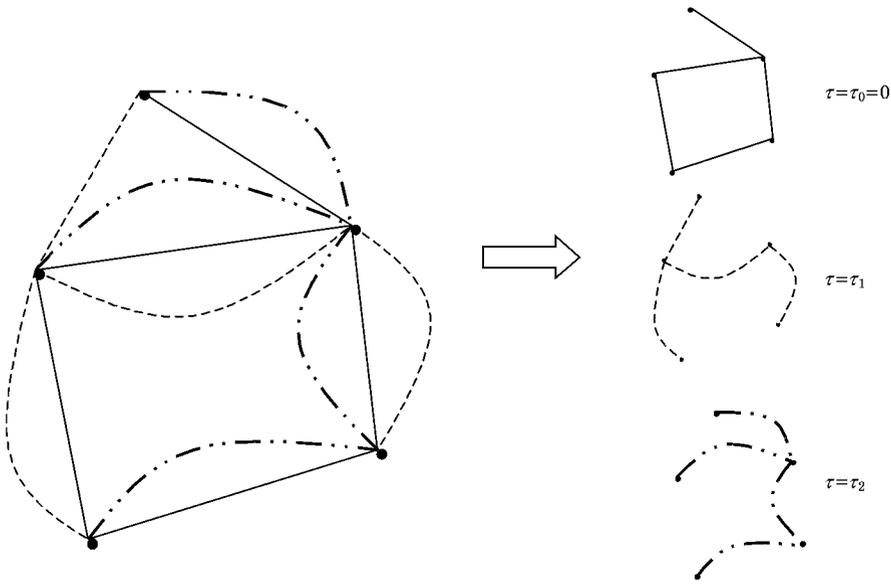


图 2 网络拆分示意图

程为

$$\begin{aligned} \dot{x}_i = & f(x_i) + \varepsilon_0 \sum_{j=1}^N a_{(0)ij} H_0 x_j(t) \\ & + \varepsilon_1 \sum_{j=1}^N a_{(1)ij} H_1 x_j(t - \tau_1) \\ & + \varepsilon_2 \sum_{j=1}^N a_{(2)ij} H_2 x_j(t - \tau_2) + \dots \\ & + \varepsilon_{m-1} \sum_{j=1}^N a_{(m-1)ij} H_{m-1} x_j(t - \tau_{m-1}) \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (1)$$

式中 $f: R^n \rightarrow R^n$ 是连续可微的函数, $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})^T \in R^n$ 为节点 i 的状态变量, $\tau_l (l = 1, 2, \dots, m-1)$ 为第 l 个子网络相对于不存在时滞的零子网络的时滞时间, 常数 $\varepsilon_l > 0 (l = 0, 1, 2, \dots, m-1)$ 为第 l 个子网络的耦合强度, $H_l \in R^{n \times n} (l = 0, 1, \dots, m-1)$ 为各个节点状态变量之间的内部耦合函数. 耦合矩阵

$$A_{(l)} = (a_{(l)ij})_{N \times N} \in R^{N \times N} \quad (l = 0, 1, 2, \dots, m-1)$$

表示第 l 个子网络的拓扑结构, 满足耗散耦合条件

$$\sum_j a_{(l)ij} = 0,$$

其中 $a_{(l)ij}$ 的具体定义如下: 若第 l 个子网络中的节点 i 和节点 $j (i \neq j)$ 之间有连接且连接数为 $q (q \leq p_l)$ 则 $a_{(l)ij} = a_{(l)ji} = q$, 若两点之间无连接, 则 $a_{(l)ij} = a_{(l)ji} = 0 (i \neq j)$. 这里矩阵 $A_{(l)}$ 的对角元定义如下:

$$a_{(l)ii} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N a_{(l)ij} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N a_{(l)ji} \quad (i = 1, 2, \dots, N; l = 0, 1, 2, \dots, m-1).$$

对于图 2 所示的交通网, $N = 5, m = k = 3, p = 1$, 其中航空网可看作零子网络即 $l = 0$, 时滞 $\tau_0 = 0$, 铁路网对于航空网存在时滞 τ_1 , 公路网对于航空网存在时滞 τ_2 . 网络状态方程如下:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i = & f(x_i) + \varepsilon_0 \sum_{j=1}^N a_{(0)ij} H_0 x_j(t) \\ & + \varepsilon_1 \sum_{j=1}^N a_{(1)ij} H_1 x_j(t - \tau_1) \\ & + \varepsilon_2 \sum_{j=1}^N a_{(2)ij} H_2 x_j(t - \tau_2) \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (2)$$

式中各变量的具体描述与(1)式相同.

对于多重边融合动态网络还应注意两点. 一是对多重边复杂网络进行拆分后得到的 m 个子网络, 可能连通或不连通. 二是在 N 个节点、 $m \geq 2$ 种性质、 k 重边的融合动态网络中, $k = 1$ 时, 网络为一个单边的复杂网络, 但是它同样可以根据上述思想和方法进行拆分, 拆分后的 m 个子网络均是不连通的.

下面将研究多重边融合复杂动态网络的局部和全局的自适应同步, 得出满足网络同步的充分条件, 给出更为简单的控制器. 考虑由 N 个相同节点构成的连续时间的耗散耦合动态网络, 其中网络的性质

$m = 2$ 其动态网络的状态方程为

$$\begin{aligned} \dot{x}_i = & f(x_i) + \varepsilon_0 \sum_{j=1}^N a_{(0)ij} H_0 x_j(t) \\ & + \varepsilon_1 \sum_{j=1}^N a_{(1)ij} H_1 x_j(t - \tau_1) + v_i \\ & (i = 1, 2, \dots, N), \end{aligned} \quad (3)$$

式中 $1 \leq i \leq N$, $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})^T \in R^n$ 是第 i 个节点的状态变量, $f: \Omega \times R^+ \rightarrow R^n$ 是一个平滑的非线性的变量域, 节点动态方程 $\dot{x} = f(x)$, $H_l: \Omega \times \dots \times \Omega \rightarrow R^n$ 是内部耦合函数, $v_i \in R^n$ 是控制输入且控制项满足

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \sum_{j=1}^N a_{(0)ij} H_0 s(t) \\ + \varepsilon_1 \sum_{j=1}^N a_{(1)ij} H_1 s(t - \tau_1) + v_i = 0, \end{aligned}$$

其中 s 是系统节点方程 $\dot{x} = f(x_i(t))$ 的一个达到同步的解.

为了研究多重边复杂动态网络的自适应同步, 下面引入一个严格的数学定义.

定义 1 令 $x_i(t; t_0, X_0)$ ($1 \leq i \leq N$) 为 (3) 式的解, $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_N^0)$, $f: \Omega \times R^+ \rightarrow R^n$ 和 $H_l: \Omega \times \dots \times \Omega \rightarrow R^n$ ($1 \leq l \leq N$) 是连续可微的, 其中 $\Omega \subseteq R^n$. 如果存在一个非空子集 $\Lambda \subseteq \Omega$ 并且 $x_i^0 \in \Lambda$ ($1 \leq i \leq N$), 那么对所有的 $t \geq t_0$ 和 $1 \leq i \leq N$, $x_i(t; t_0, X_0) \in \Omega$ 都成立, 且有

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \| x_i(t; t_0, X_0) - s(t; t_0, x_0) \|_2 = 0 \\ (1 \leq i \leq N), \end{aligned}$$

其中 $s(t; t_0, x_0)$ 是系统方程 $\dot{x} = f(x_i(t))$ 的一个解, 且 $x_0 \in \Omega$. 由此可知 (3) 式所描述的系统就达到同步, 并且 $\Lambda \times \dots \times \Lambda$ 被称为 (3) 式所描述的动态网络系统的同步域.

把 $s(t; t_0, x_0)$ 记为 $s(t)$. 因为 (3) 式所描述的多重边复杂动态网络是一个弥散的耦合网络, 那么 $s(t) = (s^T(t), s^T(t), \dots, s^T(t))^T$ 就是其节点状态方程达到同步的一个解. 在此, $s(t)$ 可以作为一个平衡点、一个周期轨道、一个非周期轨道或在相空间内的一个混沌轨道.

定义误差变量为

$$\begin{aligned} e_i(t) = & x_i(t) - s(t), \\ e_i(t - \tau_1) = & x_i(t - \tau_1) - s(t - \tau_1) \\ & (1 \leq i \leq N), \end{aligned}$$

那么控制器 v_i 的目标就是引导控制 (3) 式描述的动力

网络趋于同步, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \| e_i(t) \|_2 = 0 \quad (1 \leq i \leq N).$$

因为 $\dot{s} = f(s, t)$, 那么用 (3) 式减去 $\dot{s} = f(s, t)$, 就可以得到

$$\begin{aligned} \dot{e}_i = & \bar{f}(x_i, s, t) + \bar{h}_{i0}(t) \\ & + \bar{h}_{i1}(t - \tau_1) + v_i, \end{aligned} \quad (4)$$

式中 $1 \leq i \leq N$,

$$\bar{f}(x_i, s, t) = f(x, t) - f(s, t),$$

且

$$\begin{aligned} \bar{h}_{i0}(t) = & \varepsilon_0 \sum_{j=1}^N a_{(0)ij} H_0(x_j) \\ & - \varepsilon_0 \sum_{j=1}^N a_{(0)ij} H_0(s(t)), \\ \bar{h}_{i1}(t - \tau_1) = & \varepsilon_1 \sum_{j=1}^N a_{(1)ij} H_1 x_j(t - \tau_1) \\ & - \varepsilon_1 \sum_{j=1}^N a_{(1)ij} H_1 s(t - \tau_1). \end{aligned}$$

这里的 v_i 与 (3) 式中的 v_i 不相同, 这里的 v_i 是与误差有关, 而 (3) 式中的 v_i 是与变量有关的函数.

对于线性耦合 H_l ($l = 0, 1$), 显然可以得到下列结论: 存在一个非负的常数 $\lambda_{ij}, \gamma_{ij}$ ($1 \leq i, j \leq N$), 对于所有的 $1 \leq i \leq N$, 满足

$$\begin{aligned} \| \bar{h}_{i0}(t) \|_2 \leq & \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} \| e_j \|_2, \\ \| \bar{h}_{i1}(t - \tau_1) \|_2 \leq & \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} \| e_j(t - \tau_1) \|_2. \end{aligned}$$

假设 1 假设存在一个非负的常数 α 满足

$$\| Df(s, t) \|_2 = \| J(t) \|_2 \leq \alpha,$$

其中 $J(t)$ 是 $f(s, t)$ 的 Jacobi 矩阵.

如果假设 1 成立, 那么就可以得出

$$\| (J(t) + J^T(t)) \|_2 \leq \alpha.$$

同样, 对于 $m = 3$ 的动态网络方程 (2), 可以写为

$$\begin{aligned} \dot{x}_i = & f(x_i) + \varepsilon_0 \sum_{j=1}^N a_{(0)ij} H_0 x_j(t) \\ & + \varepsilon_1 \sum_{j=1}^N a_{(1)ij} H_1 x_j(t - \tau_1) \\ & + \varepsilon_2 \sum_{j=1}^N a_{(2)ij} H_2 x_j(t - \tau_2) + v_i \\ & (i = 1, 2, \dots, N), \end{aligned} \quad (5)$$

式中控制项满足

$$\varepsilon_0 \sum_{j=1}^N a_{(0)ij} H_0 s(t) + \varepsilon_1 \sum_{j=1}^N a_{(1)ij} H_1 s(t - \tau_1)$$

$$+ \varepsilon_2 \sum_{j=1}^N a_{(2)ij} H_2 x_j(t - \tau_2) + v_i = 0,$$

其中 s 是系统节点方程 $\dot{x} = f(x_i(t))$ 的一个达到同步的解.

误差系统为

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= \bar{f}(x_i, s, t) + \bar{h}_{i0}(t) \\ &+ \bar{h}_{i1}(t - \tau_1) + \bar{h}_{i2}(t - \tau_2) + v_i, \quad (6) \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned} \bar{h}_{i2}(t - \tau_2) &= \varepsilon_2 \sum_{j=1}^N a_{(2)ij} H_2 x_j(t - \tau_2) \\ &- \varepsilon_2 \sum_{j=1}^N a_{(2)ij} H_2 s(t - \tau_2). \end{aligned}$$

同理可得, 存在一个非负的常数 $\psi_{ij} (1 \leq i, j \leq N)$ 对所有的 $1 \leq i \leq N$ 满足

$$\| \bar{h}_{i2}(t - \tau_2) \|_2 \leq \sum_{j=1}^N \psi_{ij} \| e_j(t - \tau_2) \|_2.$$

对定理进行证明时需要用到下面的引理.

引理 对于任意的 $x, y \in R^n, \mu > 0$, 有下式成立:

$$2x^T y \leq \mu x^T x + \frac{1}{\mu} y^T y.$$

3. 多重边复杂动态网络的自适应同步准则

这里讨论 $m = 2, 3$ 的多重边融合复杂动态网络的局部同步和全局同步, 并给出了若干网络同步的

准则.

3.1. $m = 2$ 时网络的自适应同步

在零附近线性化 (4) 式所表示的误差系统, 得出

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= \mathcal{J}(t) e_i(t) + \bar{h}_{i0}(t) \\ &+ \bar{h}_{i1}(t - \tau_1) + v_i, \quad (7) \end{aligned}$$

式中 $1 \leq i \leq N, \mathcal{J}(t) = Df(s, t)$ 是 f 在 $x = s(t)$ 处的 Jacobi 矩阵.

基于上述的结果和假设, 得出下面的网络同步准则.

定理 1 若假设 1 成立, 那么在下面的自适应控制器引导的条件下 (3) 式所描述的复杂动态网络的同步解 $s(t)$ 达到局部渐近稳定.

$$v_i = -d_i e_i \quad (1 \leq i \leq N), \quad (8)$$

并且

$$\dot{d}_i = k_i e_i^T e_i = k_i \| e_i \|_2^2 \quad (1 \leq i \leq N), \quad (9)$$

式中 $k_i (1 \leq i \leq N)$ 是正常数.

证明 构造 Lyapunov 稳定性方程如下:

$$\begin{aligned} V &= \sum_{i=1}^N e_i^T e_i + \sum_{i=1}^N \frac{(d_i - \hat{d})^2}{k_i} \\ &+ \sum_{i=1}^N \int_{t-\tau_1}^t r_i e_i^T(s) e_i(s) ds, \quad (10) \end{aligned}$$

式中 $\hat{d}_i (1 \leq i \leq N)$ 是待定的正常量,

$$r_i = \sum_{j=1}^N \gamma_{ij}^2.$$

经求导可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{i=1}^N (e_i^T \dot{e}_i + e_i^T \dot{e}_i) + 2 \sum_{i=1}^N \frac{1}{k_i} (d_i - \hat{d}_i) \dot{d}_i + \sum_{i=1}^N r_i (e_i^T e_i - e_i^T(t - \tau_1) e_i(t - \tau_1)) \\ &= \sum_{i=1}^N e_i^T (\mathcal{J}(t) + J^T(t) - 2\hat{d}_i I_n) e_i + 2 \sum_{i=1}^N e_0^T \bar{h}_{i0} + 2 \sum_{i=1}^N e_i^T \bar{h}_{i1}(t - \tau_1) \\ &+ \sum_{i=1}^N r_i (e_i^T e_i - e_i^T(t - \tau_1) e_i(t - \tau_1)) \\ &\leq \sum_{i=1}^N e_i^T (\mathcal{J}(t) + J^T(t) - 2\hat{d}_i I_n) e_i + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} \| e_i \|_2 \| e_j \|_2 \\ &+ 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} \| e_i \|_2 \| e_j(t - \tau_1) \|_2 + \sum_{i=1}^N r_i (e_i^T e_i - e_i^T(t - \tau_1) e_i(t - \tau_1)) \\ &\leq \sum_{i=1}^N e_i^T (\mathcal{J}(t) + J^T(t) - 2\hat{d}_i I_n) e_i + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} \| e_i \|_2 \| e_j \|_2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N e_i^T e_j \\ &+ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \gamma_{ij}^2 \| e_j(t - \tau_1) \|_2^2 + \sum_{i=1}^N r_i (e_i^T e_i - e_i^T(t - \tau_1) e_i(t - \tau_1)) \\ &\leq \sum_{i=1}^N e_i^T (\mathcal{J}(t) + J^T(t) - (2\hat{d}_i - 1) I_n) e_i + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} \| e_i \|_2 \| e_j \|_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \gamma_{ij}^2 \| e_j(t - \tau_1) \|_2^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \gamma_{ij}^2 (e_i^T e_i - e_i^T(t - \tau_1) e_i(t - \tau_1)) \\
& = \sum_{i=1}^N e_i^T (K(t) + J^T(t) - 2\hat{d}_i I_n + I_n) e_i + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} \| e_i \|_2 \| e_j \|_2 + \sum_{i=1}^N r_i e_i^T e_i \\
& \leq \sum_{i=1}^N (2\alpha - 2\hat{d}_i + 1) \| e_i \|_2^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \gamma_{ij}^2 e_i^T e_i + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} \| e_i \|_2 \| e_j \|_2 \\
& = e^T (2\Lambda + \Upsilon + \text{diag} \{ 2\alpha + 1 - 2\hat{d}_1, 2\alpha + 1 - 2\hat{d}_2, \dots, 2\alpha + 1 - 2\hat{d}_N \}) e ,
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
e & = (\| e_1 \|_2, \| e_2 \|_2, \dots, \| e_N \|_2)^T , \\
\Lambda & = (\lambda_{ij})_{N \times N} , \\
\Upsilon & = (\gamma_{ij}^2)_{N \times N} ,
\end{aligned}$$

α, λ_{ij} 和 $\gamma_{ij} (1 \leq i, j \leq N)$ 均为非负的常数. 选择合适的 $\hat{d}_i (1 \leq i \leq N)$, 使 $2\Lambda + \Upsilon + \text{diag} \{ 2\alpha + 1 - 2\hat{d}_1, 2\alpha + 1 - 2\hat{d}_2, \dots, 2\alpha + 1 - 2\hat{d}_N \}$ 为一个负定矩阵. 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 误差变量

$$\xi = (e_1^T, e_2^T, \dots, e_N^T)^T \rightarrow 0.$$

因此 (3) 式所描述的动态网络方程的一个同步解 $s(t)$ 在 (8) 和 (9) 式的自适应控制器下达到局部渐近稳定. 证毕.

下面将讨论全局同步的情况.

改写节点动力学方程 $\dot{x}_i = f(x_i, t)$ 为 $\dot{x}_i = Bx_i(t) + g(x_i, t)$, 其中 $B \in R^{n \times n}$ 是一个常数矩阵, $g: \Omega \times R^+ \rightarrow R^n$ 是一个平滑的非线性函数. 那么 (3) 式可以描述为

$$\dot{x}_i = Bx_i(t) + g(x_i, t) + \epsilon_0 \sum_{j=1}^N a_{(0)ij} H_0 x_j(t)$$

$$+ \epsilon_1 \sum_{j=1}^N a_{(1)ij} H_1 x_j(t - \tau_1) + v_i, \quad (11)$$

式中 $1 \leq i \leq N$. 类似地, 可以得出误差方程

$$\begin{aligned}
\dot{e}_i & = Be_i(t) + \bar{g}(x_i, s, t) + \bar{h}_{i0}(t) \\
& \quad + \bar{h}_{i1}(t - \tau_1) + v_i, \quad (12)
\end{aligned}$$

式中 $1 \leq i \leq N$,

$$\bar{g}(x_i, s, t) = g(x_i, t) - g(s, t).$$

假设 2 假设存在一个非负的常量 μ 满足

$$\| \bar{g}(x_i, s, t) \|_2 \leq \mu \| e_i \|_2.$$

定理 2 若假设 1 和假设 2 成立, 那么 (3) 式的一个同步解 $s(t)$ 在下列自适应控制器条件下达到全局渐近稳定:

$$v_i = -d_i e_i \quad (1 \leq i \leq N). \quad (13)$$

并且

$$\dot{d}_i = k_i e_i^T e_i = k_i \| e_i \|_2^2 \quad (1 \leq i \leq N), \quad (14)$$

式中 $k_i (1 \leq i \leq N)$ 是正常数.

证明 因为 B 是一个给定的常数矩阵, 且存在一个非负常量 β , 使得 $\| B \|_2 \leq \beta$, 并且

$$\| (B + B^T) / 2 \|_2 \leq \beta.$$

类似地, 构造 Lyapunov 函数方程, 并经求导可得

$$\begin{aligned}
\dot{V} & = \sum_{i=1}^N e_i^T (B + B^T - 2\hat{d}_i I_n) e_i + 2 \sum_{i=1}^N e_i \bar{g}(x_i, s, t) + 2 \sum_{i=1}^N e_i^T \bar{h}_{i0} \\
& \quad + 2 \sum_{i=1}^N e_i^T \bar{h}_{i1}(t - \tau_1) + \sum_{i=1}^N r_i (e_i^T e_i - e_i^T(t - \tau_1) e_i(t - \tau_1)) \\
& \leq \sum_{i=1}^N (2\beta + 2\mu + 1 - 2\hat{d}_i) \| e_i \|_2^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \gamma_{ij}^2 e_i^T e_i + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} \| e_i \|_2 \| e_j \|_2 \\
& = e^T (2\Lambda + \Upsilon + \text{diag} \{ 2\beta + 2\mu + 1 - 2\hat{d}_1, \dots, 2\beta + 2\mu + 1 - 2\hat{d}_N \}) e ,
\end{aligned}$$

其中 β, μ, λ_{ij} 和 $\gamma_{ij} (1 \leq i, j \leq N)$ 是非负的常数. 可以选择合适的 $\hat{d}_i (1 \leq i \leq N)$, 使 $2\Lambda + \Upsilon + \text{diag} \{ 2\beta + 2\mu + 1 - 2\hat{d}_1, \dots, 2\beta + 2\mu + 1 - 2\hat{d}_N \}$ 为一个负定矩阵. 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 误差变量

$$\xi = (e_1^T, e_2^T, \dots, e_N^T)^T \rightarrow 0.$$

因此 (3) 式描述的动态网络的一个同步解 $s(t)$ 在自适应控制器 (13) 和 (14) 式的条件下达到全局渐近稳定, 也就是达到全局同步. 证毕.

3.2. $m = 3$ 时网络的自适应同步

同样在零附近线性化(6)式所表示的误差系统, 得出

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= \mathcal{K}(t)e_i(t) + \bar{h}_{i0}(t) \\ &+ \bar{h}_{i1}(t - \tau_1) + \bar{h}_{i2}(t - \tau_2)v_i. \end{aligned} \quad (15)$$

基于上述的结果和假设, 可以得到定理 3.

定理 3 若假设 1 成立, 那么在下列自适应控制器引导的条件下(5)式所描述的复杂动态网络的同步解 $s(t)$ 达到局部渐近稳定:

$$v_i = -d_i e_i \quad (1 \leq i \leq N). \quad (16)$$

并且

$$\begin{aligned} \dot{\hat{d}}_i &= k_i e_i^T e_i = k_i \|e_i\|_2^2 \quad (1 \leq i \leq N), \\ & \quad \quad \quad (17) \end{aligned}$$

式中 $k_i (1 \leq i \leq N)$ 是正常数.

证明 构造 Lyapunov 函数方程

$$\begin{aligned} V &= \sum_{i=1}^N e_i^T e_i + \sum_{i=1}^N \frac{(d_i - \hat{d}_i)^2}{k_i} \\ &+ \sum_{i=1}^N \int_{t-\tau_1}^t r_i e_i^T(s) e_i(s) ds \\ &+ \sum_{i=1}^N \int_{t-\tau_2}^t u_i e_i^T(s) e_i(s) ds, \end{aligned} \quad (18)$$

式中 $\hat{d}_i (1 \leq i \leq N)$ 是待定的正常量,

$$r_i = \sum_{j=1}^N \gamma_{ij}^2,$$

$$u_i = \sum_{j=1}^N \phi_{ij}^2.$$

那么, 经求导可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{i=1}^N e_i^T (\mathcal{K}(t) + J^T(t) - 2\hat{d}_i I_n) e_i + 2 \sum_{i=1}^N e_i^T \bar{h}_{i0} + 2 \sum_{i=1}^N e_i^T \bar{h}_{i1}(t - \tau_1) + 2 \sum_{i=1}^N e_i^T \bar{h}_{i2}(t - \tau_2) \\ &+ \sum_{i=1}^N r_i (e_i^T e_i - e_i^T(t - \tau_1) e_i(t - \tau_1)) + \sum_{i=1}^N u_i (e_i^T e_i - e_i^T(t - \tau_2) e_i(t - \tau_2)) \\ &\leq \sum_{i=1}^N e_i^T (\mathcal{K}(t) + J^T(t) - 2\hat{d}_i I_n) e_i + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} \|e_i\|_2 \|e_j\|_2 \\ &+ 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} \|e_i\|_2 \|e_j(t - \tau_1)\|_2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \phi_{ij} \|e_i\|_2 \|e_j(t - \tau_2)\|_2 \\ &+ \sum_{i=1}^N r_i (e_i^T e_i - e_i^T(t - \tau_1) e_i(t - \tau_1)) + \sum_{i=1}^N u_i (e_i^T e_i - e_i^T(t - \tau_2) e_i(t - \tau_2)) \\ &\leq \sum_{i=1}^N e_i^T (\mathcal{K}(t) + J^T(t) - 2\hat{d}_i I_n) e_i + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} \|e_i\|_2 \|e_j\|_2 + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N e_i^T e_j \\ &+ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \gamma_{ij}^2 \|e_j(t - \tau_1)\|_2^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \phi_{ij}^2 \|e_j(t - \tau_2)\|_2^2 \\ &+ \sum_{i=1}^N r_i (e_i^T e_i - e_i^T(t - \tau_1) e_i(t - \tau_1)) + \sum_{i=1}^N u_i (e_i^T e_i - e_i^T(t - \tau_2) e_i(t - \tau_2)) \\ &\leq \sum_{i=1}^N (2\alpha - 2\hat{d}_i + 2) \|e_i\|_2^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \gamma_{ij}^2 e_i^T e_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \phi_{ij}^2 e_i^T e_i + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} \|e_i\|_2 \|e_j\|_2 \\ &= e^T (2\Lambda + \Upsilon + \Psi + \text{diag}\{2\alpha + 2 - 2\hat{d}_1, 2\alpha + 2 - 2\hat{d}_2, \dots, 2\alpha + 2 - 2\hat{d}_N\}) e, \end{aligned}$$

其中 $\Psi = (\phi_{ij}^2)_{N \times N}$, $\alpha = \lambda_{ij}$, γ_{ij} 和 $\phi_{ij} (1 \leq i, j \leq N)$ 是非负的常数. 选择合适的 $\hat{d}_i (1 \leq i \leq N)$, 使 $2\Lambda + \Upsilon + \Psi + \text{diag}\{2\alpha + 2 - 2\hat{d}_1, 2\alpha + 2 - 2\hat{d}_2, \dots, 2\alpha + 2 - 2\hat{d}_N\}$ 为一个负定矩阵. 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 误差变量

$$\xi = (e_1^T, e_2^T, \dots, e_N^T)^T \rightarrow 0.$$

因此(5)式所描述的动态网络方程的一个同步解

$s(t)$ 在(16)和(17)式的自适应控制器下达到局部渐近稳定. 证毕.

类似于 $m = 2$ 情况下的全局同步的讨论, 可以得出定理 4.

定理 4 若假设 1 和假设 2 成立, 那么(5)式的一个同步解 $s(t)$ 在下列自适应控制器条件下达到全局渐近稳定:

$$v_i = -d_i e_i \quad (1 \leq i \leq N). \quad (19)$$

并且

$$\dot{d}_i = k_i e_i^T e_i = k_i \|e_i\|_2^2 \quad (1 \leq i \leq N), \quad (20)$$

式中 $k_i (1 \leq i \leq N)$ 是正常数.

证明 同样因为 B 是一个给定的常数矩阵, 且存在一个非负常量 β , 使得 $\|B\|_2 \leq \beta$, 并且

$$\|(B + B^T)/2\|_2 \leq \beta.$$

类似地, 构造 Lyapunov 函数方程, 并经求导可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{i=1}^N e_i^T (B + B^T - 2\hat{d}_i I_n) e_i + 2 \sum_{i=1}^N e_i^T g(x_i, s, t) + 2 \sum_{i=1}^N e_i^T \bar{h}_{i0} + 2 \sum_{i=1}^N e_i^T \bar{h}_{i1}(t - \tau_1) \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^N e_i^T \bar{h}_{i2}(t - \tau_2) + \sum_{i=1}^N r_i (e_i^T e_i - e_i^T(t - \tau_1) e_i(t - \tau_1)) + \sum_{i=1}^N u_i (e_i^T e_i - e_i^T(t - \tau_2) e_i(t - \tau_2)) \\ &\leq \sum_{i=1}^N (2\beta + 2\mu + 2 - 2\hat{d}_i) \|e_i\|_2^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \gamma_{ij}^2 e_i^T e_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \phi_{ij}^2 e_i^T e_i + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} \|e_i\|_2 \|e_j\|_2 \\ &= e^T (2\Lambda + \Upsilon + \Psi + \text{diag}\{2\beta + 2\mu + 2 - 2\hat{d}_1, \dots, 2\beta + 2\mu + 2 - 2\hat{d}_N\}) e, \end{aligned}$$

其中 $\beta, \mu, \lambda_{ij}, \gamma_{ij}$ 和 $\phi_{ij} (1 \leq i, j \leq N)$ 是非负的常数.

可以选择合适的 $\hat{d}_i (1 \leq i \leq N)$, 使 $2\Lambda + \Upsilon + \Psi + \text{diag}\{2\beta + 2\mu + 2 - 2\hat{d}_1, \dots, 2\beta + 2\mu + 2 - 2\hat{d}_N\}$ 为一个负定矩阵. 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 误差变量

$$\xi = (e_1^T, e_2^T, \dots, e_N^T)^T \rightarrow 0.$$

因此 (5) 式所描述的动态网络方程的一个同步解 $x(t)$ 在自适应控制器 (19) 和 (20) 式的条件下达到全局渐近稳定. 证毕.

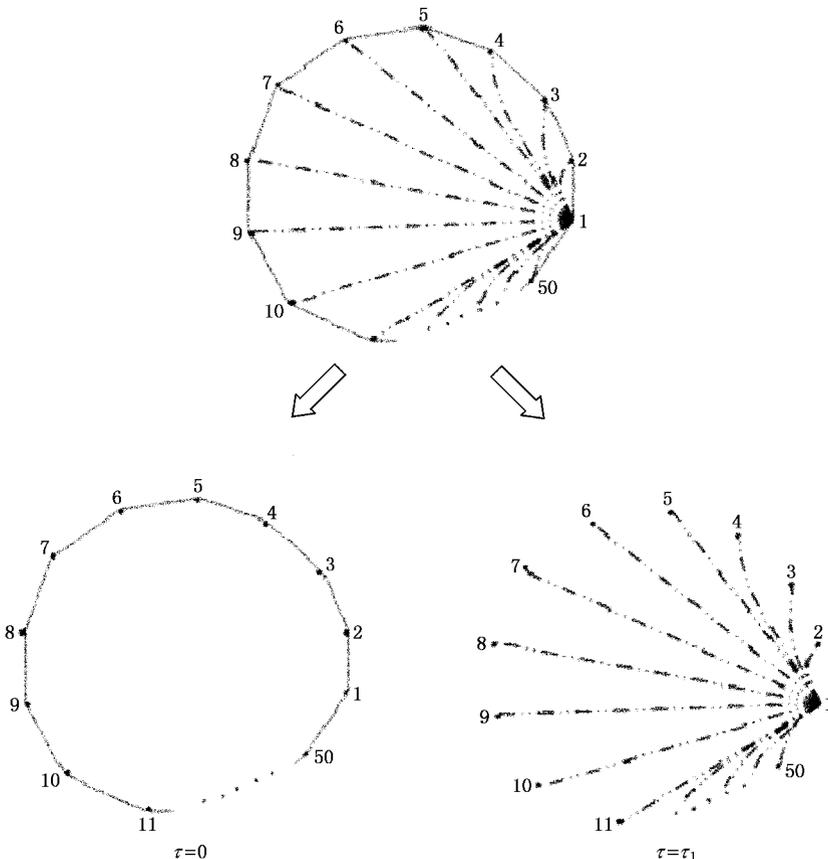


图3 $m=2$ 的多重边融合复杂动态网络耦合形式

4. 数值仿真

考虑含有 50 个相同节点的 $m = 2$ 复杂动态网络(图 3) ,其中节点为 Lorenz 系统 ,节点的动力学方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{i1} \\ \dot{x}_{i2} \\ \dot{x}_{i3} \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ x_{i3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -x_{i1}x_{i3} \\ x_{i1}x_{i2} \end{bmatrix},$$

其中

$$B = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8/3 \end{bmatrix}.$$

假设耦合强度为 $\epsilon_0 = \epsilon_1 = 0.2$,内部耦合矩阵 H_0 和 H_1 均为单位阵 ,则相应于(11)式可得

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{i1} \\ \dot{x}_{i2} \\ \dot{x}_{i3} \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ x_{i3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -x_{i1}x_{i3} \\ x_{i1}x_{i2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & + \begin{bmatrix} 0.2x_{i-1,1} - 0.4x_{i1} + 0.2x_{i+1,1} \\ 0.2x_{i-1,2} - 0.4x_{i2} + 0.2x_{i+1,2} \\ 0.2x_{i-1,3} - 0.4x_{i3} + 0.2x_{i+1,3} \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} 0.2x_{i1}(t - \tau_1) - 0.2x_{i1}(t - \tau_1) \\ 0.2x_{i2}(t - \tau_1) - 0.2x_{i2}(t - \tau_1) \\ 0.2x_{i3}(t - \tau_1) - 0.2x_{i3}(t - \tau_1) \end{bmatrix} \\ & - d_i e_i, \end{aligned} \tag{21}$$

且

$$\begin{aligned} \dot{d}_i & = k_i e_i^T e_i \\ & = k_i \| e_i \|^2 \quad (1 \leq i \leq 50). \end{aligned} \tag{22}$$

当 $i = 1$ 时 相应地有

$$\begin{aligned} & \epsilon_0 \sum_{j=1}^{50} a_{(0)j} H_0 x_j(t) \\ & = 0.2x_{50} - 0.4x_1 + 0.2x_2, \\ & \epsilon_1 \sum_{j=1}^{50} a_{(1)j} H_1 x_j(t - \tau_1) \\ & = -9.8x_1(t - \tau_1) + 0.2x_2(t - \tau_1) \\ & \quad + \dots + 0.2x_{50}(t - \tau_1). \end{aligned}$$

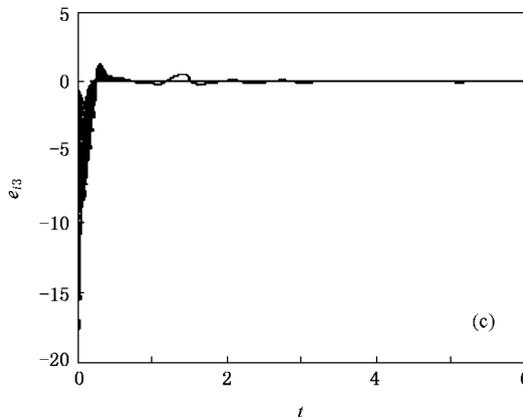
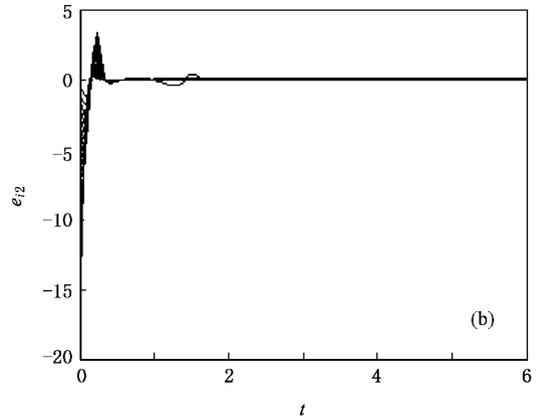
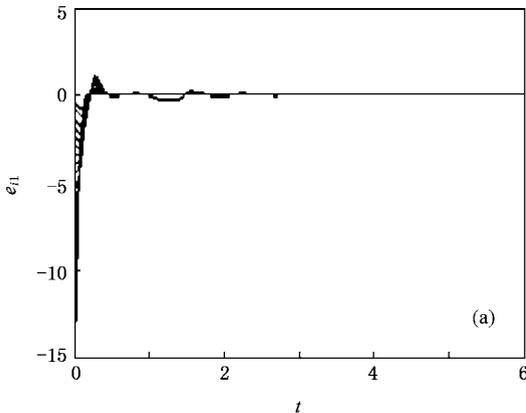


图 4 动态网络的同步误差曲线 (a) e_{11} (b) e_{12} (c) e_{13}



当 $i = 50$ 时 相应地有

$$\begin{aligned} & \varepsilon_0 \sum_{j=1}^{50} a_{(0)j} H_0 x_j(t) \\ &= 0.2x_{49} - 0.4x_{50} + 0.2x_1, \\ & \varepsilon_1 \sum_{j=1}^{50} a_{(1)j} H_1 x_j(t - \tau_1) \\ &= 0.2x_1(t - \tau_1) - 0.2x_{50}(t - \tau_1). \end{aligned}$$

显然,可以得到

$$\begin{aligned} \bar{g}(x_i, s, t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -x_{i1}x_{i3} + s_1s_3 \\ x_{i1}x_{i2} - s_1s_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ -x_{i3}e_{i1} - s_1e_{i3} \\ x_{i2}e_{i1} + s_1e_{i2} \end{bmatrix} \quad (1 < i < 50). \end{aligned}$$

由于 Lorenz 吸引子被限制在一个有界区域 $\Phi \subset R^{[20, 21]}$, 故存在一个常数 M 满足 $|x_{ij}|, |s_j| \leq M$ 其中 $1 \leq i \leq 50, j = 1, 2, 3$. 因此

$$\begin{aligned} & \| \bar{g}(x_i, s, t) \|_2 \\ &= \sqrt{(x_{i3}e_{i1} + s_1e_{i3})^2 + (x_{i2}e_{i1} + s_1e_{i2})^2} \\ &\leq 2M \| e_i \|_2. \end{aligned}$$

由此可知假设 2 成立. 根据定理 2 (21) 和(22)式的同步解 $s(t)$ 达到全局渐近稳定.

假设 $k_i = 1, d_i(0) = 1, x_i(0) = (4 + 0.5i, 5 + 0.5i, 6 + 0.5i), s(0) = (4, 5, 6), 1 \leq i \leq 50. e_i$ 的同步误差曲线如图 4 所示.

5. 结 论

本文研究了多重边融合复杂动态网络的局部和全局的自适应同步. 首先, 根据网络中节点间信息传输速度的不同, 通过引入滞后对多重边融合网络进行了拆分, 将网络拆分成多个子网络的组合形式, 建立了数学模型. 其次, 研究了多重边融合复杂网络的自适应同步, 给出了网络局部和全局同步的充分条件. 最后, 通过数值仿真验证了结果的有效性.

[1] Erdos P, Renyi A 1959 *Publ. Math.* **6** 290
[2] Watts D J, Strogatz S H 1998 *Nature* **393** 440
[3] Barabási A L, Albert R 1999 *Science* **286** 509
[4] Wang X F, Chen G R 2003 *IEEE Circuits Syst. Mag.* **3** 6
[5] Guan X P, Tang Y G, Fan Z P, Wang Y Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2112 (in Chinese) [关新平、唐英干、范正平、王益群 2001 物理学报 **50** 2112]
[6] Lü J, Yu X, Chen G 2004 *Physica A* **334** 281
[7] Li J, Wang B H, Jiang P Q, Zhou T, Wang W X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4051 (in Chinese) [李 季、汪秉宏、蒋品群、周 涛、王文旭 2006 物理学报 **55** 4051]
[8] Li Y, Liu Y, Shan X M, Ren Y, Jiao J, Qiu B 2005 *Chin. Phys.* **14** 2153
[9] Xu D, Li X, Wang X F 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1313 (in Chinese)
[10] Zhen J, Liu Q X 2006 *Chin. Phys.* **15** 1248
[11] Newman M E J, Watts D J 1999 *Phys. Lett. A* **263** 341
[12] Li X, Chen G 2003 *Physica A* **328** 274
[13] Pecora L M, Carroll T L 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2109
[14] Barahona M, Pecora L M 2004 *Phys. Rev. Lett.* **89** 054101
[15] Li C, Chen G 2004 *Physica A* **343** 236
[16] Tan W, Wang Y N 2005 *Chin. Phys.* **14** 72
[17] Zhou J, Chen T P 2006 *IEEE Trans. Circuits Syst. I* **53** 3
[18] Wang X F, Chen G 2002 *IEEE Trans. Circuits Syst. I* **49** 54
[19] Wang X F, Chen G 2002 *Int. J. Bifur. Chaos* **12** 187
[20] Li D M, Lu J A, Wu X Q, Chen G 2005 *Chaos Solitons Fract.* **23** 529
[21] Han X P, Lu J A, Wu X Q 2004 *Chaos Solitons Fract.* **22** 221

Adaptive synchronization in united complex dynamical network with multi-links^{*}

Gao Yang^{1)†} Li Li-Xiang¹⁾ Peng Hai-Peng¹⁾ Yang Yi-Xian¹⁾ Zhang Xiao-Hong¹⁾²⁾

1) *State Key Laboratory of Networking and Switching Technology, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China*

2) *School of Information Engineering, Jiangxi University of Science and Technology, Ganzhou 341000, China*

(Received 14 August 2007 ; revised manuscript received 21 November 2007)

Abstract

This paper further investigates the locally and globally adaptive synchronization of united complex dynamical networks based on a new method of network split. Time-delay has been introduced into networks to split and upon which a model of united complex dynamical networks with multi-links has been constructed. Several new locally and globally asymptotically stable network synchronization criteria are deduced by using Lyapunov stability theory and some hypotheses. The validity of the results was proved through numerical simulation of this paper.

Keywords : united complex networks with multi-links , adaptive synchronization , network split , time-delay

PACC : 0545

^{*} Project supported by the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant No. 2007CB310704), the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60673098) and the Doctoral Program Foundation of Institution of Higher Education of China (Grant No. 20070013005).

[†] E-mail : gaoyang_du@sina.com