

共轭 Chen 混沌系统的分岔分析及基于该系统的超混沌生成研究*

张 青¹⁾ 王杰智^{1)†} 陈增强²⁾ 袁著祉²⁾

1) 中国民航大学理学院, 天津 300300)

2) 南开大学自动化系, 天津 300071)

(2007 年 9 月 1 日收到, 2007 年 11 月 15 日收到修改稿)

分析了一个三维自治混沌系统的 Hopf 分岔现象, 该系统的混沌吸引子属于共轭 Chen 混沌系统. 通过引入一个控制器, 基于该混沌系统构建了一个四维自治超混沌系统. 该超混沌系统含有一个单参数, 在一定的参数范围内呈现超混沌现象. 通过 Lyapunov 指数和分岔分析, 随着参数的变化该系统轨道呈现周期轨道、准周期轨道、混沌和超混沌的演化过程.

关键词: 混沌, 超混沌生成, Hopf 分岔, 分岔分析

PACC: 0545

1. 引言

1963 年, Lorenz 通过计算机仿真实现了第一个混沌吸引子——Lorenz 吸引子, 该吸引子发现于一个三维自治混沌系统^[1]. 1999 年著名的 Chen 系统^[2]被提出来, 该系统被看作是 Lorenz 系统的对偶系统. 2002 年 Lü 系统^[3]作为 Lorenz 系统和 Chen 系统的过渡系统被提出. 近年来, 混沌反控制已经成为非线性学科研究的热点, 发现了许多新的混沌系统^[4-10].

Lorenz 系统、Chen 系统和 Lü 系统有着相似的动力学行为, 但是它们并不是拓扑等价的. 迄今为止, 人们对现有的混沌系统进行了大量的理论研究, 其间, 提出了 Lorenz 系统族^[11]和广义 Lorenz 规范型^[12, 13]. 最近, 文献^[14]提出了共轭 Lorenz 型系统和一个统一的 Lorenz 型系统.

1979 年, Rössler^[15]提出了第一个超混沌系统. 超混沌系统具有两个或两个以上的正 Lyapunov 指数, 其相轨在更多的方向上分离. 四维连续自治系统处于超混沌状态时, 拥有两个正的 Lyapunov 指数、一个零指数和一个负指数. 正如对混沌应用^[16-22]的探索一样, 人们在许多研究领域也越来越关注对超混

沌的研究, 如在保密通信^[23]、同步^[24, 25]、激光^[26]、振荡^[27]等方面的研究. 相应地, 超混沌生成也成为了一项具有挑战性的工作^[28-34].

本文分析了一个新型三维自治混沌系统的 Hopf 分岔, 该系统属于共轭 Chen 系统^[14]. 在该混沌系统的基础上, 通过引入一个状态控制器, 构造了一个四维连续自治超混沌系统. 这个超混沌系统拥有两个较大的正 Lyapunov 指数. 随着参数的变化, 系统可以处于周期状态、准周期状态、混沌状态和超混沌状态.

2. 共轭 Chen 系统的 Hopf 分岔分析

2.1. 共轭 Chen 系统的模型

共轭 Chen 系统^[14]的动力学方程为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_1 x - a_2 y, \\ \dot{y} &= dx - cy + xz, \\ \dot{z} &= xy - bz. \end{aligned} \quad (1)$$

这里 $a_1, a_2, b, c, d \in R^+$, 并且 $c > \frac{a_2 d}{a_1}$. 取 $a_1 = a_2$

* 国家自然科学基金(批准号: 60774088, 10772135, 60574036) 教育部科学技术研究计划重点项目(批准号: 2007005) 教育部新世纪优秀人才支持计划(批准号: NCET-2005-290) 和中国民航大学科研启动基金(批准号: 07QD05X) 资助的课题.

† E-mail: wjzh7845@gmail.com

$= a, d = c - a$ 且 $c > a$ 时, 系统 (1) 可以写成

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(x - y), \\ \dot{y} &= (c - a)x - cy + xz, \\ \dot{z} &= xy - bz. \end{aligned} \quad (2)$$

当 $a = 28, b = 3$ 和 $c = 35$ 时, 共轭 Chen 系统 (2) 拥有一个典型的混沌吸引子, 如图 1 所示.

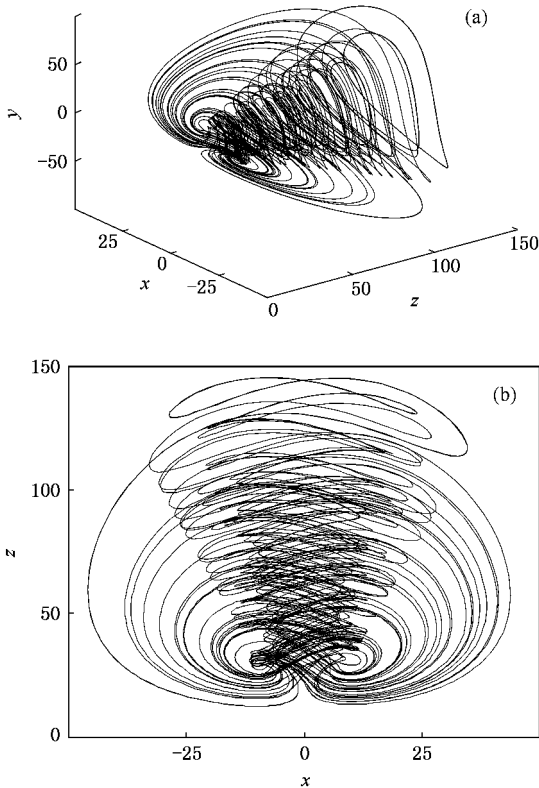


图 1 当 $a = 28, b = 3, c = 35$ 时, 共轭 Chen 系统 (2) 典型混沌吸引子的相图 (a) z - x - y 空间 (b) x - z 平面

2.2. Hopf 分岔

注意到系统 (2) 关于 z 轴对称. 当

$$\begin{aligned} \nabla V &= \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} \\ &= -(b + c - a) \\ &< 0 \end{aligned} \quad (3)$$

时, 系统是耗散的. 系统具有如下三个平衡点: $O_1 = (0, 0, 0), O_2 = (x_0, y_0, z_0), O_3 = (-x_0, -y_0, z_0)$. 这里 $x_0 = y_0 = \sqrt{ab}$ 和 $z_0 = a$.

下面将讨论平衡点 O_2 和 O_3 的分岔情况.

分别在平衡点 O_2 (或 O_3) 处线性化系统 (2) 得到如下相同的特征方程:

$$\lambda^3 + (b + c - a)\lambda^2$$

$$+ b(c - 2a)\lambda + 2a^2b = 0. \quad (4)$$

因为 a, b 和 c 均为正的实参数, 所以方程 (4) 没有零根, 则只讨论平衡点 O_2 (或 O_3) 处的 Hopf 分岔.

在条件 (3) 式下, 如果满足

$$3ac + 2ab - c^2 - bc = 0, \quad (5)$$

$$c > 2a, \quad (6)$$

系统 (2) 经历 Hopf 分岔.

把 a 看作 Hopf 分岔参数, 考虑如下的非奇异线性坐标变换:

$$\xi = x - x_0,$$

$$\eta = y - y_0,$$

$$\zeta = z - z_0,$$

系统 (2) 可以改写成

$$\dot{\xi} = a(\xi - \eta),$$

$$\dot{\eta} = c\xi - c\eta + \xi\zeta + x_0\zeta, \quad (7)$$

$$\dot{\zeta} = x_0(\xi + \eta) - b\zeta + \xi\eta,$$

则系统 (2) 的平衡点 O_2 (或 O_3) 对应系统 (7) 的平衡点 $O = (0, 0, 0)$. 在 origin 线性化系统 (7), 得到形如 (4) 式的特征方程

$$\begin{aligned} \lambda^3 + (b + c - a)\lambda^2 \\ + b(c - 2a)\lambda + 2a^2b = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

取

$$a = a_0 = \frac{a(b + c)}{2b + 3c},$$

并根据 (3) (5) 和 (6) 式可得方程 (8) 的三个特征值

$$\lambda_1 = -(b + c - a_0),$$

$$\lambda_2 = +iw_0,$$

$$\lambda_3 = -iw_0,$$

其中 λ_1 为一负实根, λ_2, λ_3 为一对共轭的纯虚根,

$$w_0 = \sqrt{b(c - 2a_0)}.$$

由方程 (8) 得

$$\lambda'(a) = \frac{\lambda^2 + 2a\lambda - 4ab}{3\lambda^2 + 2(b + c - a)\lambda + b(c - 2a)},$$

则

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\lambda'(a_0) &= \frac{(2b + 3c)(4b^3 + 12b^2c + 13bc^2)}{2w_0[(2b + 3c)^2w_0^2 + 4(b + c)^2]} \\ &> 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\lambda'(a_0) &= \frac{4b^3c + 9b^3c^2 + 8b^2c^3 + 5bc^4}{2w_0[(2b + 3c)^2w_0^2 + 4(b + c)^2]} \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

根据 Hopf 分岔定理 (9) 式满足横截条件, 则系统 (2) 在平衡点 O_2 (或 O_3) 处将发生 Hopf 分岔, 并且当

$a < a_0$ 时, O_2 (或 O_3) 是渐近稳定的, 当 $a > a_0$ 时, O_2 (或 O_3) 是不稳定的^[35].

例如, 当 $b = 5, c = 10$ 时, $a_0 = 3.75$. 图 2 分别给出了在 $b = 5, c = 10$ 时系统 (2) 和 (7) 随着参数 a 变化的分岔图. 从图 2 可以看出, $a_0 = 3.75$ 为这两个系统的 Hopf 分岔临界点. 图 3 给出了系统 (2)

在 $a = 3.74$ 和 $a = 3.76$ 时的相图. 从图 3 可以看出, 当 $a = 3.74 < a_0$ 时, 系统 (2) 收敛到平衡点 $O_2 = (4.3243, 4.3243, 3.74)$; 当 $a = 3.76 > a_0$ 时, 系统 (2) 的平衡点 $O_2 = (4.3359, 4.3359, 3.76)$ 不稳定, 相应地, 系统有一个渐近稳定的周期轨道.

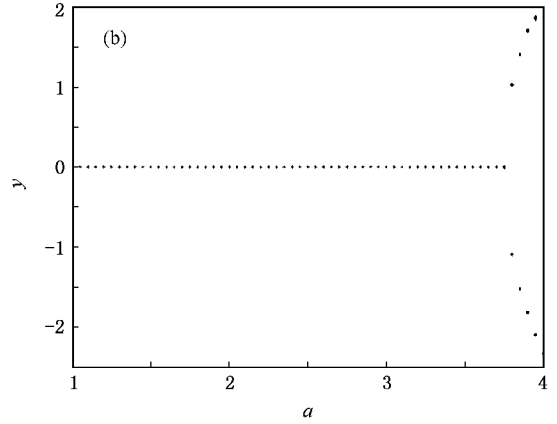
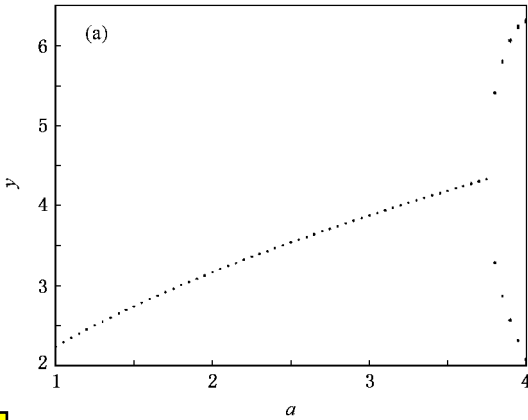


图 2 当 $b = 5, c = 10$ 时, 系统 (2) 和 (7) 随 a 变化的 y - a 分岔图 $a \in [1, 4]$. (a) 系统 (2) (b) 系统 (7)

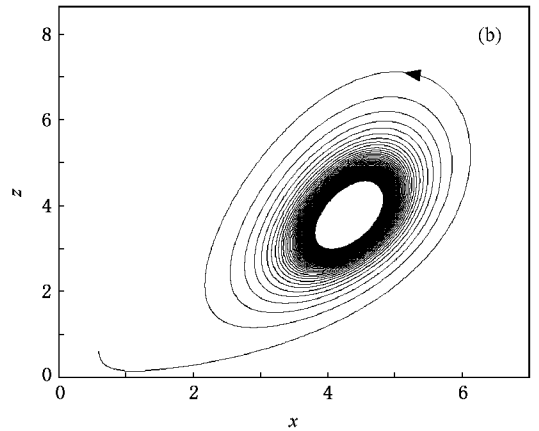
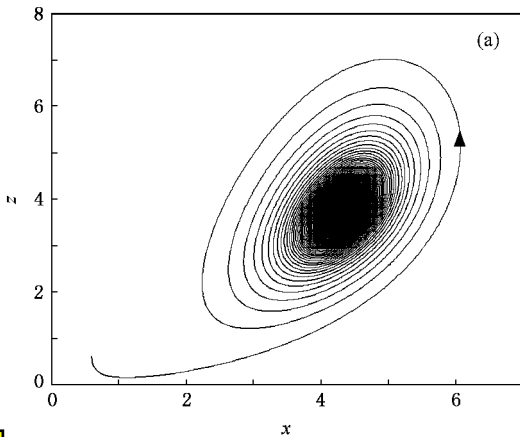


图 3 系统 (2) 的 x - z 平面相图 $b = 5, c = 10$. (a) $a = 3.74$ (b) $a = 3.76$

当把 b 或 c 看成分岔参数时, 可作同样的讨论.

其中 $a \in R^+$.

3. 新的超混沌系统

引入一个新的状态反馈控制器 w 到系统 (2) 的第二个方程中, 得到如下的四维连续自治系统:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(x - y), \\ \dot{y} &= (43 - a)x - cy + xz + w, \\ \dot{z} &= xy - 5z, \\ \dot{w} &= 9.5y + 0.15xz + w, \end{aligned} \quad (10)$$

本文通过数值仿真对系统 (10) 随着参数 a 变化时的动力学特性进行了分析研究, 其中 $a \in [7, 28]$.

四维自治系统的 Lyapunov 指数与系统轨道之间的对应关系如下: 对于周期轨道, 系统的 Lyapunov 指数一个为零, 三个为负; 对于准周期轨道, 系统的 Lyapunov 指数两个为零, 两个为负; 对于混沌轨道, 系统的 Lyapunov 指数一个为正, 一个为零, 两个为负; 对于超混沌轨道, 系统的 Lyapunov 指数两个为

正,一个为零,一个为负.

记系统(10)的四个 Lyapunov 指数分别为 L_1, L_2, L_3 和 L_4 ($L_1 > L_2 > L_3 > L_4, L_1 + L_2 + L_3 + L_4 <$

0),这里用 Wolf 方法^[36]来计算 Lyapunov 指数.

Lyapunov 指数随着参数 $a \in [7, 28]$ 变化的特性如图 4 所示. 相应的分岔图如图 5 所示.

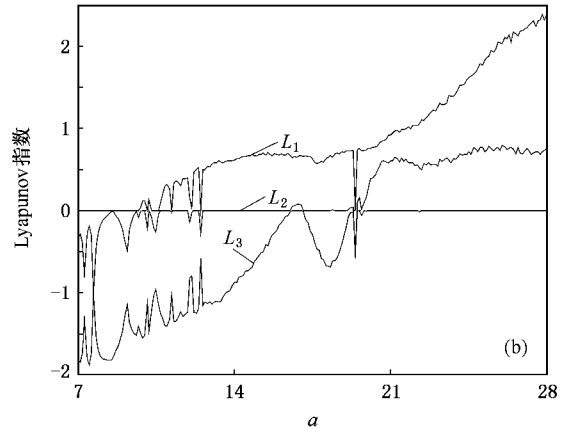
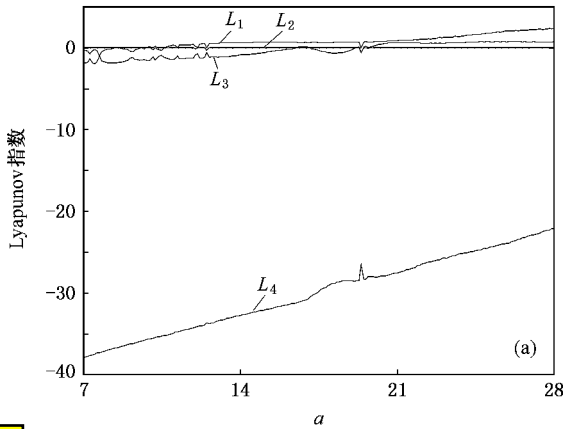


图 4 系统(10)随 a 变化时的 Lyapunov 指数谱 $a \in [7, 28]$ (a) L_1, L_2, L_3 和 L_4 (b) L_1, L_2 和 L_3

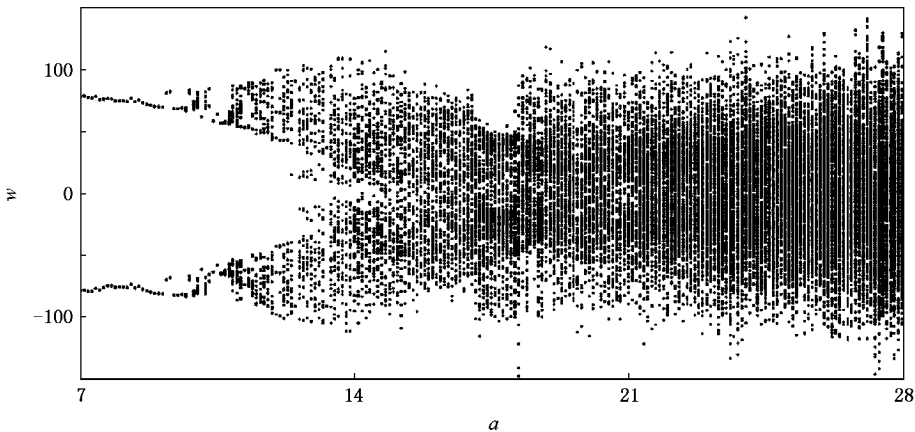


图 5 系统(10)随 a 变化时的 w - a 分岔图 $a \in [7, 28]$

从图 4 和图 5 可以看到,当参数 a 取某些值时,系统(10)拥有两个较大正的 Lyapunov 指数、一个零指数和一个负指数,说明系统能够处于超混沌状态.事实上,随着 a 的变化,系统拥有周期轨道、准周期

轨道、混沌轨道和超混沌轨道.表 1 给出了一些使得系统(10)处于超混沌状态的参数 a 的值及相应的 Lyapunov 指数.

图 6 给出了系统(10)的一些典型吸引子的相

表 1 当参数 a 取一些典型值时超混沌系统(10)的 Lyapunov 指数

a	L_1	L_2	L_3	L_4
21	0.9024	0.5901	0	-27.4907
25	1.7631	0.7445	0	-24.5072
28	2.4283	0.6912	0	-22.1188

图.当 $a = 8$ 时, $L_1 = 0, L_2, L_3, L_4 < 0$, 系统(10)是周期的,如图 6(a)所示;当 $a = 9.8$ 时, $L_1 = L_2 = 0, L_3,$

$L_4 < 0$, 系统(10)是准周期的,如图 6(b)所示;当 $a = 11.4$ 时, $L_1 > 0, L_2 = 0, L_3, L_4 < 0$, 系统(10)

是混沌的,如图 6(c)所示;当 $a = 12$ 时, $L_1 = 0, L_2, L_3, L_4 < 0$, 系统(10)是周期的,如图 6(d)所示;当 $a = 16$ 时, $L_1 > 0, L_2 = 0, L_3, L_4 < 0$, 系统(10)是混沌的,如图 6(e)所示;当 $a = 28$ 时, $L_1, L_2 > 0, L_3 = 0, L_4 < 0$, 系统(10)是超混沌的,如图 6(f)所示.

由表 1 可知,当 $a = 25$ 时,系统(10)是超混沌的,此时系统的 Lyapunov 维数为 $D_L = 3.1023$. 该超混沌吸引子在不同状态空间的相图如图 7 所示. 此时系统 Lyapunov 指数随时间 t 的演化如图 8 所示,可见系统有两个正的 Lyapunov 指数、一个零指数和一个负指数.

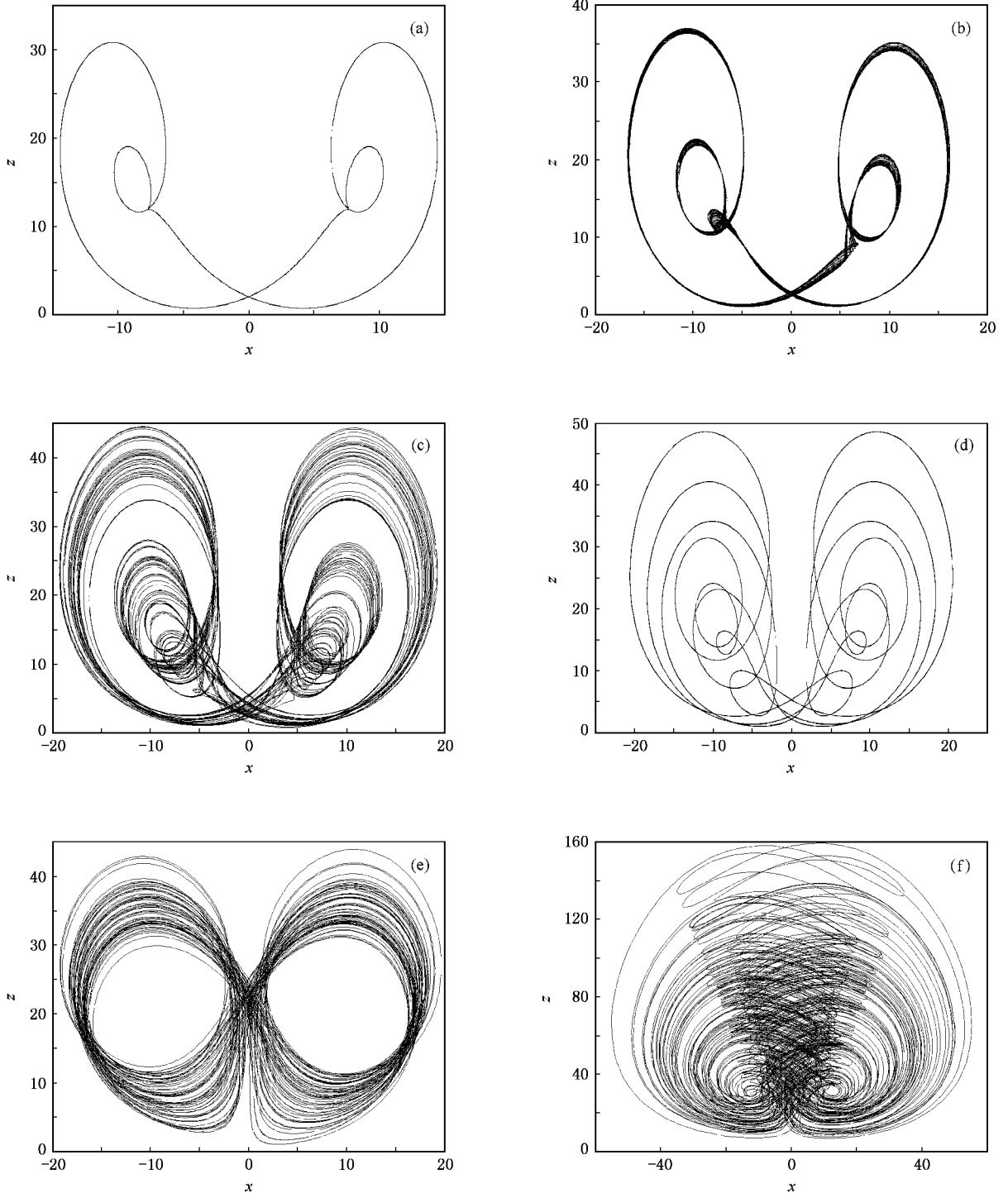


图 6 系统(10)的典型吸引子 $x-z$ 平面的相图 (a) $a = 8$, 周期轨道 (b) $a = 9.8$, 准周期轨道 (c) $a = 11.4$, 混沌轨道 (d) $a = 12$, 周期轨道 (e) $a = 16$, 混沌轨道 (f) $a = 28$, 超混沌轨道

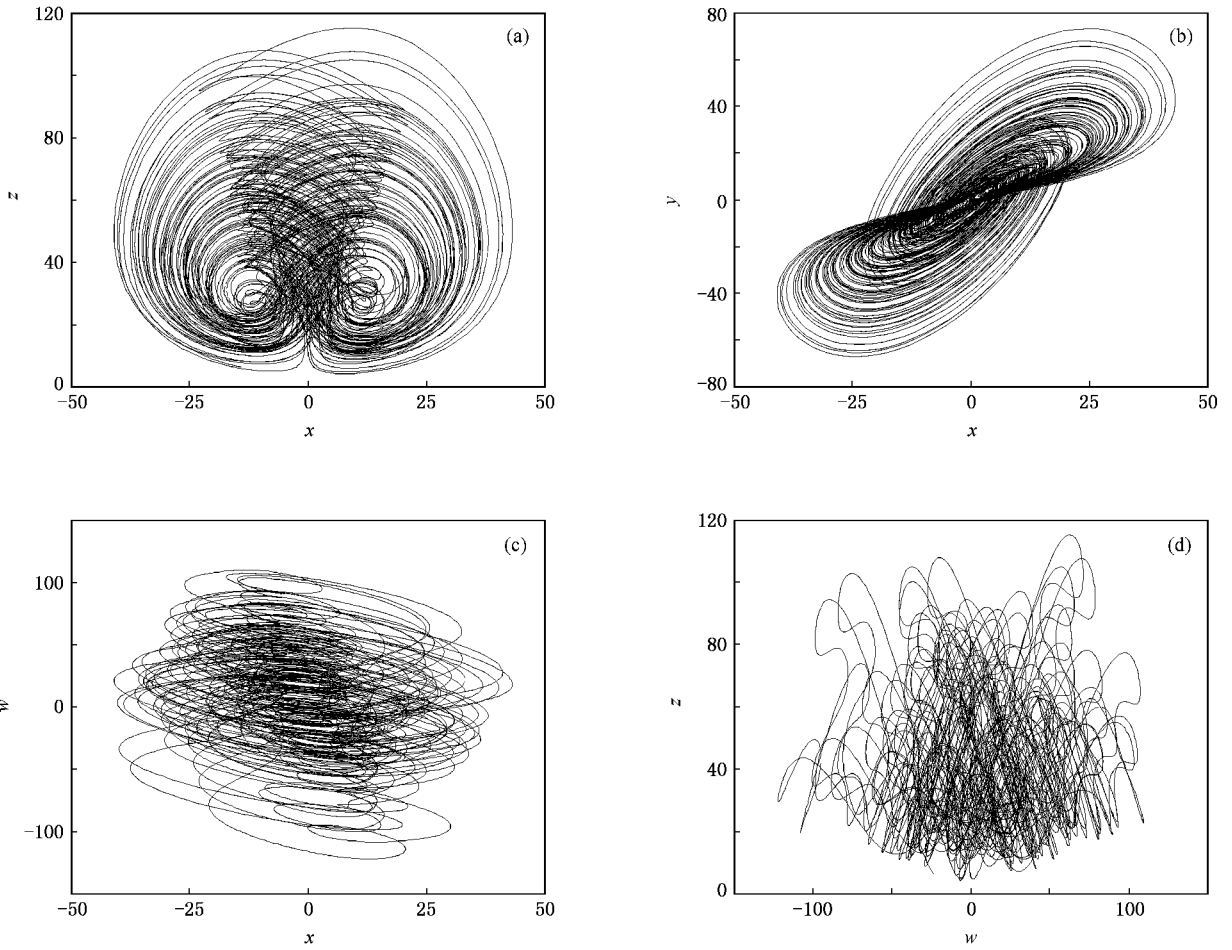


图 7 当 $a = 25$ 时,系统 (10) 典型的超混沌吸引子 (a) x - z 平面 (b) x - y 平面 (c) x - w 平面 (d) w - z 平面

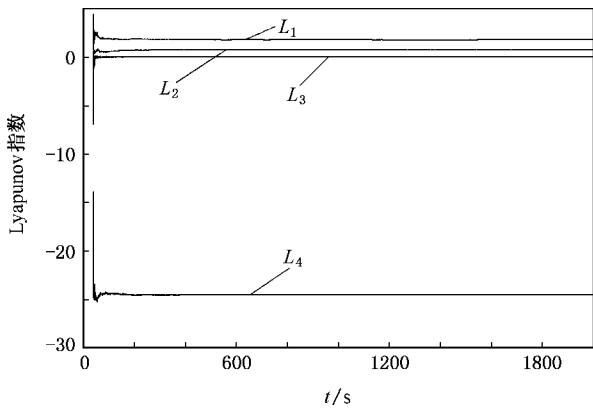


图 8 当 $a = 25$ 时,系统 (10) 的 Lyapunov 指数随时间 t 的演化

4. 结 论

本文运用 Hopf 分岔定理证明了一类新型的三维自治混沌系统——共轭 Chen 系统的 Hopf 分岔的存在性. 在该系统的基础上构建了一个新的四维自治超混沌系统, 通过 Lyapunov 指数谱、分岔图和相图对构建的系统进行了分岔分析, 发现其拥有较大的超混沌参数区域和较大的正的 Lyapunov 指数. 此系统在实际工程中具有较好的应用前景.

[1] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 130
 [2] Chen G R ,Ueta T 1999 *Int. J. Bifur. Chaos* **9** 1465
 [3] Lü J H ,Chen G R 2002 *Int. J. Bifur. Chaos* **12** 659
 [4] Qi G Y ,Chen G R ,Du S Z ,Chen Z Q ,Yuan Z Z 2005 *Chaos Solitons Fract.* **23** 1671
 [5] Zhang Y H ,Qi G Y ,Liu W L ,Yan Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55**

- 3307 (in Chinese) [张宇辉、齐国元、刘文良、阎彦 2006 物理学报 **55** 3307]
- [6] Qi G Y ,Chen G R ,Du S Z ,Chen Z Q ,Yuan Z Z 2005 *Physica A* **352** 295
- [7] Qi G Y ,Chen G R ,Li S W ,Zhang Y H 2006 *Int. J. Bifur. Chaos* **16** 859
- [8] Yu S M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1500 (in Chinese) [禹思敏 2005 物理学报 **54** 1500]
- [9] Wang F Z ,Qi G Y ,Chen Z Q ,Zhang Y H ,Yuan Z Z 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4005 (in Chinese) [王繁珍、齐国元、陈增强、张宇辉、袁著祉 2006 物理学报 **55** 4005]
- [10] Wang F Z ,Qi G Y ,Chen Z Q ,Yuan Z Z 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3137 (in Chinese) [王繁珍、齐国元、陈增强、袁著祉 2007 物理学报 **56** 3137]
- [11] Lü J H ,Chen G R ,Cheng D Z ,Čelikovsky S 2002 *Int. J. Bifur. Chaos* **12** 2917
- [12] Čelikovsky S ,Chen G R 2002 *Int. J. Bifur. Chaos* **12** 1789
- [13] Čelikovsky S ,Chen G R 2005 *Chaos Solitons Fract.* **26** 1271
- [14] Yang Q G ,Chen G R ,Zhou T S 2006 *Int. J. Bifur. Chaos* **16** 2855
- [15] Rössler O E 1979 *Phys. Lett. A* **71** 155
- [16] Guan X P ,He Y H ,Wu J 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2718 (in Chinese) [关新平、何宴辉、邬晶 2003 物理学报 **52** 2718]
- [17] Zhang X Y ,Guan X P ,Li H G 2005 *Chin. Phys.* **14** 279
- [18] Al-Hosiny N M ,Henning I D ,Adams M J 2007 *Opt. Commun.* **269** 166
- [19] Song Y Z ,Zhao G Z ,Qi D L 2006 *Chin. Phys.* **15** 2266
- [20] Wang F Q ,Liu C X 2007 *Chin. Phys.* **16** 946
- [21] Ma J H ,Ren B ,Chen Y S 2004 *Appl. Math. Mech.* **25** 971
- [22] Ma J H ,Ren B ,Chen Y S 2005 *Appl. Math. Mech.* **26** 449
- [23] Sun L ,Jiang D P 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3283 (in Chinese) [孙琳、姜德平 2006 物理学报 **55** 3283]
- [24] Zhang H ,Ma X K ,Yang Y ,Xu C D 2005 *Chin. Phys.* **14** 86
- [25] Gao T G ,Chen Z Q ,Yuan Z Z 2007 *Chaos Solitons Fract.* **33** 922
- [26] Zhang H S ,Shen K 2003 *Chin. Phys.* **12** 149
- [27] Čenys A ,Tamaševičius A ,Baziliauskas A 2003 *Chaos Solitons Fract.* **17** 349
- [28] Yu S M ,Ma Z G ,Qiu S S ,Peng S G ,Lin Q H 2004 *Chin. Phys.* **13** 317
- [29] Li Y X ,Chen G R ,Tang W K S 2005 *IEEE Trans. Circ. Syst. II* **52** 204
- [30] Gao T G ,Chen Z Q ,Yuan Z Z 2006 *Int. J. Mod. Phys. C* **17** 471
- [31] Wang F Q ,Liu C X 2006 *Chin. Phys.* **15** 963
- [32] Wang J Z ,Chen Z Q ,Yuan Z Z 2006 *Chin. Phys.* **15** 1216
- [33] Wang G Y ,Zheng Y ,Liu J B 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3113 (in Chinese) [王光义、郑艳、刘敬彪 2007 物理学报 **56** 3113]
- [34] Chen Z Q ,Yang Y ,Qi G Y ,Yuan Z Z 2007 *Phys. Lett. A* **360** 696
- [35] Wiggins S 1990 *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos* (Berlin : Springer) p275
- [36] Wolf A ,Swift J B ,Swinney H L ,Nastano J A 1985 *Physica D* **16** 285

The bifurcation analysis of a conjugate Chen chaotic system and the hyperchaos generation based on the system *

Zhang Qing¹⁾ Wang Jie-Zhi^{1,2)†} Chen Zeng-Qiang²⁾ Yuan Zhu-Zhi²⁾

1) *College of Science, Civil Aviation University of China, Tianjin 300300, China*

2) *Department of Automation, Nankai University, Tianjin 300071, China*

(Received 1 September 2007 ; revised manuscript received 15 November 2007)

Abstract

The Hopf bifurcation is analyzed for a new type of three-dimensional autonomous chaotic system, of which the chaotic attractor belongs to the category of conjugate Chen attractors. A new four-dimensional autonomous hyperchaotic system is constructed based on this chaotic system by introducing an additional controller. This hyperchaotic system with one parameter presents hyperchaotic behavior over a range of parameter values. The analysis of Lyapunov exponents and bifurcation diagram demonstrates the evolution process from periodic orbits, quasi-periodic orbits to chaos, and further to hyperchaos as the parameter increases.

Keywords : chaos, hyperchaos generation, Hopf bifurcation, bifurcation analysis

PACC : 0545

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 60774088, 10772135, 60574036), the Key Program of Science and Technology Research of Ministry of Education, China (Grant No. 2007005), the Program for the New Century Excellent Talents in University of Ministry of Education, China (Grant No. NCET-2005-290) and the Scientific Research Foundation of Civil Aviation University of China (Grant No. 07QD05X).

† E-mail : wjzh7845@gmail.com