

# 运动级联型三能级原子双光子过程的熵演化\*

张金芳 谭磊† 刘利伟 丁彩英

(兰州大学理论物理研究所, 兰州 730000)

(2007 年 7 月 5 日收到, 2007 年 9 月 28 日收到修改稿)

研究了运动级联型三能级原子与单模场双光子相互作用过程中场(原子)熵的演化特性. 讨论了当运动原子初始处于相干叠加态时, 原子运动、场模函数、初始场的平均光子数  $\bar{n}$  对场熵演化的影响. 结果表明, 熵演化的周期依赖于原子的运动和场模函数的取值, 而初始场的平均光子数  $\bar{n}$  只影响最大和次最小熵值, 不改变熵演化的周期.

关键词: 双光子, 运动  $\Xi$  型三能级原子, 熵

PACC: 4250, 3280

## 1. 引言

熵是一个描述系统偏离纯态程度的物理量, 能够提供系统无序程度, 不确定程度的信息. 一个量子系统的 Von Neumann 熵定义为  $S = -\text{tr}(\rho \ln \rho)$ , 其中  $\rho$  为系统的密度算符, 并取  $k_B = 1$ . 对纯态,  $S = 0$ , 对统计混合态,  $S \neq 0$ , 当系统的时间演化由不含时 Schrödinger 方程支配时,  $S$  为常量. 人们更加感兴趣的是原子和场各自的熵

$$\begin{aligned} S_a &= -\text{tr}(\rho_a \ln \rho_a), \\ S_f &= -\text{tr}(\rho_f \ln \rho_f), \end{aligned} \quad (1)$$

式中  $\rho_a$  和  $\rho_f$  分别为原子和光场的约化密度算符. 由于原子和光场都是开放的子系统, 它们的熵与时间有关. 根据 Araki-Lieb 不等式<sup>[1]</sup>  $|S_a - S_b| \leq S \leq S_a + S_b$ , 若光场和原子在初始时刻均处于纯态, 且彼此无关联, 则光场-原子复合系统熵  $S = 0$ , 所以总有  $S_a = S_f$ , 因此计算光场的熵只需计算原子的熵. 场(原子)熵的时间演化反映出光场与原子关联程度的演化特性, 熵值越大, 耦合越深. 在熵值的最大区域, 通过对原子的观测可以最大限度地获得关于场的信息. 近 10 年来, 人们相继对 Jaynes-Cummings (J-C) 模型熵的特性进行了广泛的研究, 得到了许多有意义

的结果. 由于实际原子往往具有多个能级, 将 J-C 模型推广到三能级乃至多能级的场合是十分必要的. 对于  $\Xi$  型三能级原子, 人们已研究了其与单模场在旋波近似下场熵<sup>[2]</sup>、原子熵和 Schrödinger 猫态<sup>[3]</sup>、原子的线性熵<sup>[4]</sup>以及在非旋波近似下场熵<sup>[5]</sup>和克尔介质中场熵<sup>[6]</sup>的演化特性, 还讨论了其与双模光场<sup>[7]</sup>、非耦合双模光场<sup>[8]</sup>相互作用系统熵的特性. 以上这些研究<sup>[2-8]</sup>都没考虑  $\Xi$  型三能级原子运动的影响, 已有的研究表明, 原子运动改变了原子熵<sup>[9]</sup>、场熵<sup>[10]</sup>压缩的演化特性. 文献 [11] 研究了  $\Lambda$  型三能级运动原子与单模场相互作用系统中场(原子)熵的特性, 并且讨论也仅限于单光子跃迁的情形. 对于双光子跃迁情形以往研究也只限于二能级原子<sup>[12]</sup>. 最近, 文献 [13] 研究了  $\Xi$  型三能级运动原子与单模场通过双光子跃迁对光场相位性质的影响, 但对于  $\Xi$  型三能级运动原子双光子过程中的熵特性至今未见涉及. 本文分析了  $\Xi$  型三能级运动原子初始处于相干叠加态时通过双光子跃迁与单模场相互作用系统中场(原子)熵特性.

## 2. 理论与模型

考虑一个运动的级联型三能级原子, 沿轴向通过矩形或圆柱形腔, 并通过双光子跃迁过程与单模

\* 国家自然科学基金(批准号: 10704031)、兰州大学理论与数学纯基础科学基金(批准号: LZU05001)和国家基础科学人才培养基金(批准号: J0630313)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: tanlei@lzu.edu.cn

场相互作用. 三能级原子能级结构如图 1 所示,  $|3\rangle \rightarrow |1\rangle$  的跃迁是电偶极禁戒的.

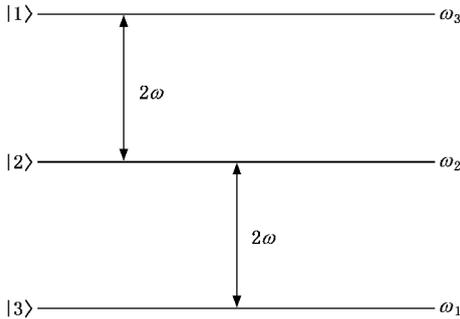


图 1 三型三能级原子结构示意图

为简便起见, 我们仅考虑原子和场共振的情况, 即

$$2\omega = \omega_3 - \omega_2 = \omega_2 - \omega_1.$$

在偶极近似和旋波近似下, 系统的哈密顿量( $\hbar = 1$ ) 可以写为

$$H = \omega a^\dagger a + \sum_{i=1}^3 \omega_i c_i^\dagger c_i + g_1 [f(z)] (a^\dagger c_2^\dagger c_3 + a^\dagger c_3^\dagger c_2) + g_2 [f(z)] (a^\dagger c_1^\dagger c_2 + a^\dagger c_2^\dagger c_1), \quad (2)$$

式中  $a^\dagger, a$  表示光子的产生、湮没算符,  $c_i^\dagger, c_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 为原子第  $i$  能级的产生、湮没算符,  $g_j$  ( $j = 1, 2$ ) 为光场与原子两种跃迁耦合常量,  $f(z)$  为场模形式函数. 假定在原子寿命时间内不发生碰撞, 并取原子与场发生作用的时间和位置为计时起点, 原子运动可表述为<sup>[14]</sup>

$$f(z) \rightarrow f(vt), \quad (3)$$

式中  $v$  表示原子运动速度. 定义 TE<sub>mpq</sub> 模为

$$f(z) = \sin(\pi pvt/L), \quad (4)$$

式中  $L$  为腔长.

如果  $t = 0$  时刻, 原子处于相干叠加态

$$|\Psi_a(0)\rangle = \sin\theta |1\rangle + \cos\theta \exp(i\phi) |3\rangle, \quad (5)$$

式中  $0 \leq \theta \leq \pi$  为原子的分布角,  $0 \leq \phi \leq 2\pi$  为原子的相位角. 辐射场处于相干态

$$|\psi(0)\rangle = \sum_n F_n |n\rangle, \quad (6)$$

$$F_n = \exp\left(-\frac{|a|^2}{2}\right) \frac{a^n}{\sqrt{n!}},$$

式中

$$a = \sqrt{\bar{n}} \exp(i\xi),$$

其中  $\bar{n}$  为初始相干态场的平均光子数,  $\xi$  为  $a$  的相位角, 在此令  $\xi = 0$ .

在相互作用绘景中,  $t$  时刻原子-光场耦合系统的态矢随时间演化可以表示为

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n \{a_n(t) |3, n\rangle + b_n(t) |2, n\rangle + c_n(t) |1, n\rangle\}. \quad (7)$$

由相互作用绘景的 Schrödinger 方程, 并考虑到初始条件(5)(6)式, 可得

$$a_n(\Theta) = \frac{D_n^2 \cos\theta e^{i\phi} + \gamma D'_n D_n \sin\theta}{D_n^2 + \gamma^2 D_n'^2} \times \cos[\sqrt{D_n^2 + \gamma^2 D_n'^2} g_1 \Theta(t)] + \frac{\gamma D'_n (\gamma D'_n \cos\theta e^{i\phi} - D_n \sin\theta)}{D_n^2 + \gamma^2 D_n'^2}, \quad (8)$$

$$b_{n+2}(\Theta) = -i \frac{D_n \cos\theta e^{i\phi} + \gamma D'_n \sin\theta}{\sqrt{D_n^2 + \gamma^2 D_n'^2}} \times \sin[\sqrt{D_n^2 + \gamma^2 D_n'^2} g_1 \Theta(t)], \quad (9)$$

$$c_{n+4}(\Theta) = \frac{\gamma D'_n D_n \cos\theta e^{i\phi} + \gamma^2 D_n'^2 \sin\theta}{D_n^2 + \gamma^2 D_n'^2} \times \cos[\sqrt{D_n^2 + \gamma^2 D_n'^2} g_1 \Theta(t)] + \frac{D_n (D_n \sin\theta - \gamma D'_n \cos\theta e^{i\phi})}{D_n^2 + \gamma^2 D_n'^2}, \quad (10)$$

式中

$$D_n = \sqrt{(n+1)(n+2)},$$

$$D'_n = \sqrt{(n+3)(n+4)}, \quad (11)$$

$$\gamma = g_2/g_1,$$

$$\Theta(t) = \int_0^t [f(vt')] dt' = \frac{1}{2} \left[ t - \frac{L}{2p\pi vt} \sin\left(\frac{2p\pi vt}{L}\right) \right]. \quad (12)$$

若选择原子的运动速度

$$v = \varepsilon g L / \pi,$$

则

$$\Theta(t) = \frac{1}{2g} \left[ gt - \frac{1}{2\varepsilon p} \sin(2\varepsilon pgt) \right]. \quad (13)$$

由态矢表达式(7),可得原子的约化密度矩阵  $\rho_a(t)$ 为

$$\rho_a(t) = \text{tr}_f |\Psi(t)\rangle \langle\Psi(t)|$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_n F_n F_n^* a_n(t) a_n^*(t) & \sum_n F_{n+2} F_n^* a_{n+2}(t) b_{n+2}^*(t) & \sum_n F_{n+4} F_n^* a_{n+4}(t) c_{n+4}^*(t) \\ \sum_n F_n F_{n+2}^* b_{n+2}(t) a_{n+2}^*(t) & \sum_n F_n F_n^* b_{n+2}(t) b_{n+2}^*(t) & \sum_n F_{n+2} F_n^* b_{n+4}(t) c_{n+4}^*(t) \\ \sum_n F_n F_{n+4}^* c_{n+4}(t) a_{n+4}^*(t) & \sum_n F_n F_{n+2}^* c_{n+4}(t) b_{n+4}^*(t) & \sum_n F_n F_n^* c_{n+4}(t) c_{n+4}^*(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \rho_{33} & \rho_{32} & \rho_{31} \\ \rho_{23} & \rho_{22} & \rho_{21} \\ \rho_{13} & \rho_{12} & \rho_{11} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

根据熵的 Arake-Lieb 不等式和给定的系统初始条件可知,场熵与原子熵在任何时刻都相等.因此,可利用原子约化密度矩阵(14)式,得到量子系统的(原子)熵为

$$S(t) = S_a(t)$$

$$= \text{tr}_a \{ \rho_a(t) \ln \rho_a(t) \}$$

$$= - \sum_k \lambda_k \ln \lambda_k, \quad (15)$$

式中  $\lambda_k$  ( $k=1, 2, 3$ )为原子约化密度矩阵的本征值

由(14)式可知,本征值  $\lambda_k$  是一元三次方程

$$\lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C = 0 \quad (16)$$

的根,方程中的系数  $A, B, C$  均由有(14)式中的矩阵元决定,

$$A = -(\rho_{33} + \rho_{22} + \rho_{11})$$

$$= -1,$$

$$B = \rho_{33}\rho_{22} + \rho_{22}\rho_{11} + \rho_{11}\rho_{33}$$

$$- \rho_{13}\rho_{31} - \rho_{23}\rho_{32} - \rho_{21}\rho_{12}, \quad (17)$$

$$C = -\rho_{33}\rho_{22}\rho_{11} - \rho_{12}\rho_{23}\rho_{31}$$

$$- \rho_{32}\rho_{21}\rho_{13} + \rho_{31}\rho_{13}\rho_{22}$$

$$+ \rho_{32}\rho_{23}\rho_{11} + \rho_{12}\rho_{21}\rho_{33}.$$

因此,可得到本征值  $\lambda_k$  为

$$\lambda_1 = -2R \cos\left(\frac{\phi}{3}\right) + 1/3,$$

$$\lambda_2 = 2R \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\phi}{3}\right) + 1/3, \quad (18)$$

$$\lambda_3 = 2R \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\phi}{3}\right) + 1/3.$$

这里

$$\phi = \arccos\left(\frac{q}{R^3}\right),$$

$$q = -\frac{1}{27} + \frac{B}{6} + \frac{C}{2}, \quad (19)$$

$$R = \pm \left| \frac{B}{3} - \frac{1}{9} \right|^{1/2},$$

式中  $R$  与  $q$  的符号相同.

### 3. 数值计算及讨论

(15)–(19)式确定的熵很难精确求和,借助于数值计算与图示法,可以直观地展示  $\Xi$  型三能级运动原子通过双光子跃迁与单模场相互作用系统中场熵的演化特点.为简洁起见,以下计算中均取  $g_1 = g_2 = 1, \phi = 0, \theta = \pi/4$ .

#### 3.1. 当不考虑原子运动时

图2讨论了不考虑原子运动时熵的演化.从图2(a)可以看出,最大熵平均值演化具有规则的周期性,次最大熵值均出现了不同程度的分叉,说明光场与原子的关联程度发生了不同程度的振荡.增大初始平均光子数  $\bar{n}$  的值,从图2(b)可以看出,次最大熵值的分叉程度会明显降低,分叉程度较小的熵值增大甚至平滑过渡.此外,还可以观察到最大熵平均值和次最小熵平均值与图2(a)中相比已减小,而最大熵平均值的演化周期没有改变.这是由于光强对场熵的演化具有调制作用,随着初始平均光子数  $\bar{n}$  的增大光场与原子在次最大熵值处的缠绕开始变得稳定而最大缠绕程度降低的缘故.

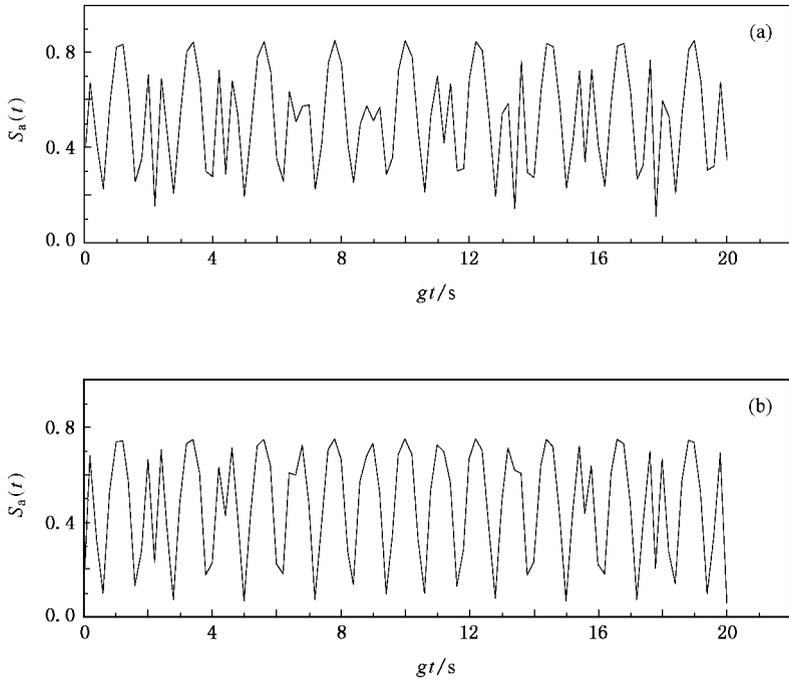


图 2 当不考虑原子的运动, 原子初始处于  $|1\rangle$  和  $|3\rangle$  的相干叠加态,  $g_1 = g_2 = g = 1$ ,  $\beta = \pi/4$ ,  $\phi = 0$  时,  $\bar{n} = 10, 40$  的场熵演化曲线 (a)  $\bar{n} = 10$  (b)  $\bar{n} = 40$

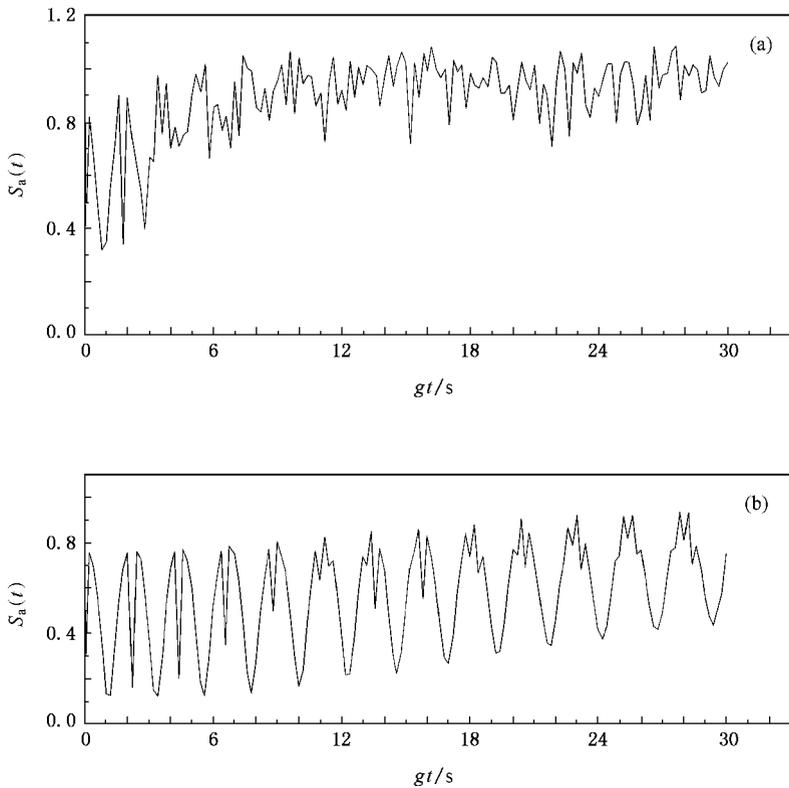


图 3 当考虑原子运动, 原子初始处于  $|1\rangle$  和  $|3\rangle$  的相干叠加态,  $g_1 = g_2 = g = 1$ ,  $\phi = 0$ ,  $\theta = \pi/4$  场模函数  $\varepsilon_p = 0.01$  时,  $\bar{n} = 10, 30$  的场熵演化曲线 (a)  $\bar{n} = 10$  (b)  $\bar{n} = 30$

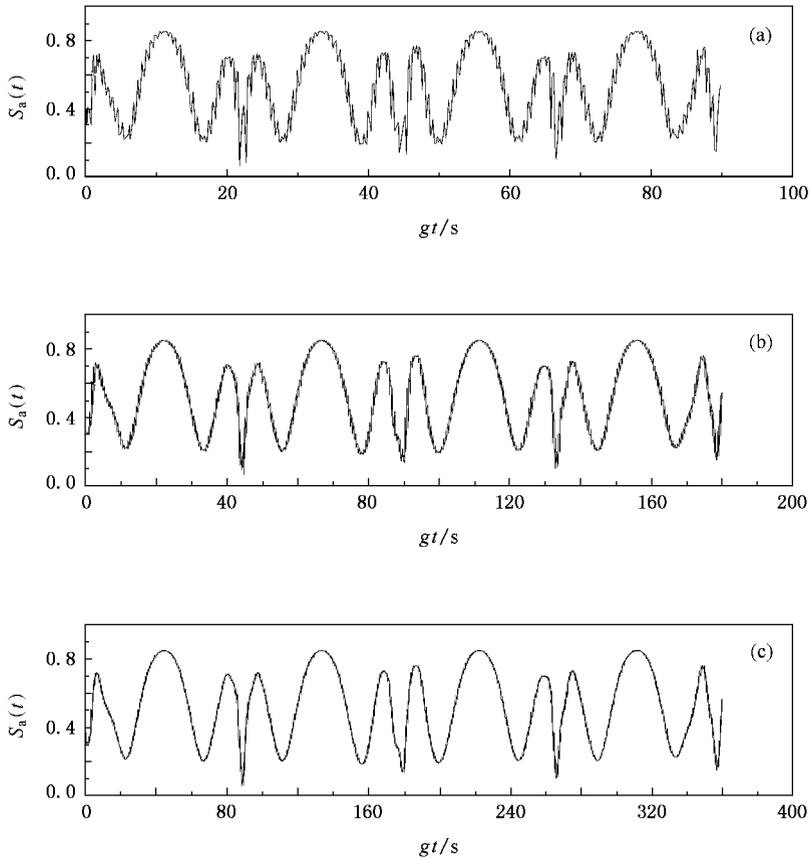


图 4 当考虑原子运动,原子初始处于  $|1\rangle$  和  $|3\rangle$  的相干叠加态,  $g_1 = g_2 = g = 1$ ,  $\phi = 0$ ,  $\theta = \pi/4$ , 初始平均光子数  $\bar{n} = 10$  时,场模函数  $\epsilon_p = 5, 10, 20$  的场熵演化曲线 (a)  $\epsilon_p = 5$  (b)  $\epsilon_p = 10$  (c)  $\epsilon_p = 20$

### 3.2. 当考虑原子运动时

图 3 所示为场模函数较小时熵随时间的演化曲线. 由图 3(a) 可以看出, 场熵只在开始时间内显示出非常不稳定的周期趋势, 随后便在很短的时间内演化到熵的平均最大值  $S \approx 1.0$ . 随时间的演化熵呈现出无规则的剧烈振荡, 但幅值的动态变化范围不大, 平均熵值仍然很高. 这是由于原子运动导致光场与原子强烈纠缠, 与原子不运动时(图 2)相比较, 此时的场熵不呈现出任何周期性. 增大初始平均光子数  $\bar{n}$  值之后, 场熵的演化开始呈现出一定的周期性, 如图 3(b) 所示, 而且在开始时间内具有与图 3(a) 中演化曲线相应的特点, 最大熵值相对于图 3(a) 仍然降低, 相应于图 2 所示的结果. 这说明光场的增强使得光场与原子间的最大缠绕程度降低.

图 4 所示为初始平均光子数一定时场熵随场模

函数增大的时间演化曲线. 从图 4 可以看出, 当  $\epsilon_p \geq 5$  时不仅最大熵值的演化具有良好的周期性, 而且与原子不运动时(图 2)的情况相比, 原子运动使得次最大熵值的演化也呈现良好的周期性. 演化曲线与双光子 J-C 模型熵的演化曲线<sup>[15]</sup>类似, 但演化周期要比双光子 J-C 模型中大得多. 对比图 4 中的 (a)(b)(c) 可以发现, 熵演化周期正比于场模函数的取值, 随着场模函数的成倍增大, 熵演化的周期也成倍变长.

图 5 所示为场模函数一定时场熵随初始平均光子数增大的时间演化曲线. 从图 5 可以发现, 此时熵的演化仍然具有良好的周期性. 随着初始光子数  $\bar{n}$  的增加, 熵的演化周期仍不发生变化, 但此时的周期要比原子不运动时(图 2)大得多. 最大熵值和次最小熵值依然随着初始平均光子数  $\bar{n}$  的增大而减小, 与图 2 原子不运动时所得结果一致.

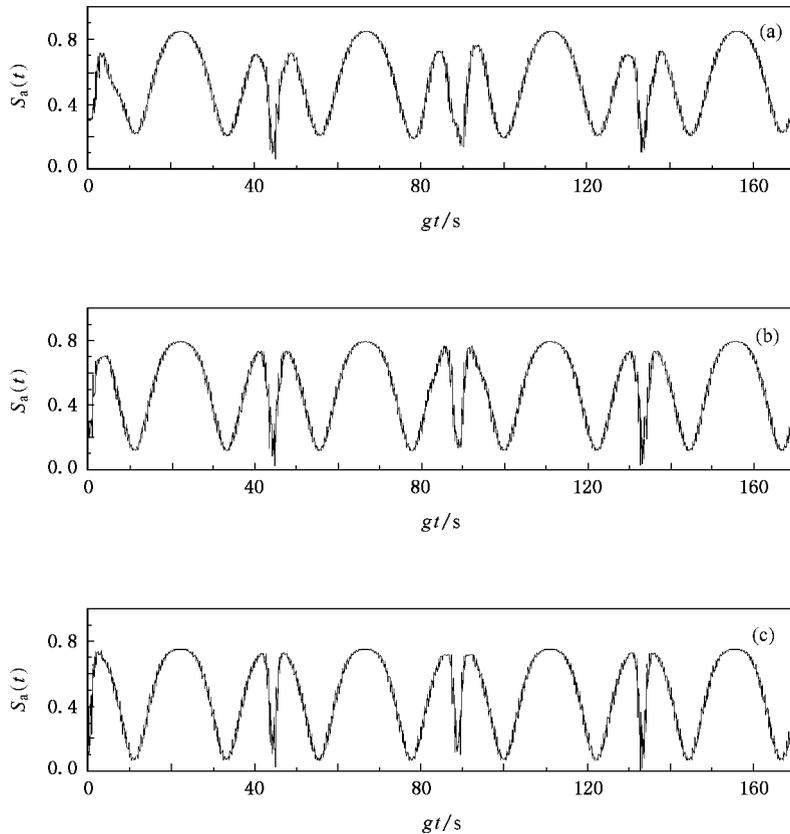


图5 当考虑原子运动,原子初始处于 $|1\rangle$ 和 $|3\rangle$ 的相干叠加态, $g_1 = g_2 = g = 1$ , $\phi = 0$ , $\theta = \pi/4$ 场模函数 $\epsilon_p = 10$ 时, $\bar{n} = 10, 20, 40$ 的场熵演化曲线 (a) $\bar{n} = 10$  (b) $\bar{n} = 20$  (c) $\bar{n} = 40$

## 4. 结 论

应用全量子熵理论,研究了 $\Xi$ 型三能级运动原子与单模场通过双光子相互耦合系统中场(原子)熵的演化规律.当不考虑原子运动时,最大熵平均值的演化具有周期性;次最大熵值演化具有分叉行为.随着初始平均光子数的增大,次最大熵值的分叉程度降低,最大熵平均值减小.当考虑原子运动时,场

模函数值影响熵演化的周期性.当场模函数值很小时,熵的演化不具有周期性,原子与场处于强烈缠绕状态.只有当光强增大时,熵才呈现出周期性.当场模函数增大时,熵的演化开始呈现良好的周期性,并且熵的演化周期正比于场模函数的取值,此时次最大熵的演化也比较规则.无论考虑或不考虑原子运动,初始平均光子数的取值只影响最大和次最小熵的取值,光场越强,它们的值越小,初始平均光子数的取值不会改变熵演化周期.

[1] Phoenix S J D, Knight P L 1988 *Ann. Phys. (New York)* **186** 381  
 [2] Liu S M, Wan L, Liu S Q 2001 *J. Jiangxi Normal Univ.* **25** 352 (in Chinese) [刘素梅、万琳、刘三秋 2001 江西师范大学学报 **25** 352]  
 [3] Liu X, Fang M F, Liu A L 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1707 (in Chinese) [刘翔、方卯发、刘安玲 2000 物理学报 **49** 1707]  
 [4] Li J, Guo H, Li G X 2005 *Acta Sin. Quantum Opt.* **11** 110 (in Chinese) [李静、郭红、李高翔 2005 量子光学学报 **11** 110]

[5] Liu S M 2003 *Chin. J. Quantum Electron.* **20** 725 (in Chinese) [刘素梅 2003 量子电子学报 **20** 725]  
 [6] Liu J M, Tao X Y, Liu S Q, Nie Y Y 2000 *Acta Opt. Sin.* **20** 1456 (in Chinese) [刘金明、陶向阳、刘三秋、聂义友 2000 光学学报 **20** 1456]  
 [7] Zhang L H, Li G X, Gan Z W 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1168 (in Chinese) [张立辉、李高翔、甘仲惟 2003 物理学报 **52** 1168]  
 [8] Liu X, Fang M F, Liu A L 2002 *Chin. J. Quantum Electron.* **19** 43 (in Chinese) [刘翔、方卯发、刘安玲 2002 量子电子学报 **19** 43]

- [ 9 ] Liao X P ,Fang M F 2004 *Acta Opt . Sin .* **24** 983 ( in Chinese ) [ 廖湘萍、方卯发 2004 光学学报 **24** 983 ]
- [ 10 ] Liao X P ,Fang M F 2005 *Chin . J . Quantum Electron .* **22** 212 ( in Chinese ) [ 廖湘萍、方卯发 2005 量子电子学报 **22** 212 ]
- [ 11 ] Jia J P ,Tang J W 2005 *Acta Sin . Quantum Opt .* **11** 145 ( in Chinese ) [ 贾金平、唐京武 2005 量子光学学报 **11** 145 ]
- [ 12 ] Liu X J ,Zhou B J ,Fang M F ,Zhou Q P 2006 *Acta Phys . Sin .* **55** 711 ( in Chinese ) [ 刘小娟、周并举、方卯发、周清平 2006 物理学报 **55** 711 ]
- [ 13 ] Tian Y H ,Cheng Q H ,Han L B 2006 *Chin . J . Quantum Electron .* **23** 494 ( in Chinese ) [ 田永红、程庆华、韩立波 2006 量子电子学报 **23** 494 ]
- [ 14 ] Schlicher R R 1989 *Opt . Commun .* **70** 97
- [ 15 ] Liu X J ,Wang H Q 1999 *Acta Sin . Quantum Opt .* **5** 1 ( in Chinese ) [ 刘小娟、王惠琴 1999 量子光学学报 **5** 1 ]

## Evolution of atom entropy in a moving cascade three-level atom in a two-photon process<sup>\*</sup>

Zhang Jin-Fang Tan Lei<sup>†</sup> Liu Li-Wei Ding Cai-Ying

( *Institute of Theoretical Physics ,Lanzhou University ,Lanzhou 730000 ,China* )

( Received 5 July 2007 ;revised manuscript received 28 September 2007 )

### Abstract

The entropy evolution properties of field ( atom ) in a moving cascade three-level atom interacting with a single-mode field are studied through two photon transitions. When the atom is initially in coherent state , the influences of the atomic motion , the field-mode structure parameter and the initial average photon number on the evolution of the entropy are discussed. The results show that the entropy evolution period of the field is dependent of the atomic motion and the field-mode structure parameter. However , the parameter of the initial average photon number will neither lengthen nor shorten the entropy evolution period of the field , but the numerical values of maximum and sub-minimum of entropy will be affected by it.

**Keywords :** two-photon , moving  $\Xi$ -type three-level atom , entropy

**PACC :** 4250 , 3280

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 10704031 ) , the Foundation of Basic Research for Physics and Mathematics of Lanzhou University , China ( Grant No. LZU05001 ) and the National Talents Training Foundation of Basic Science , China ( Grant No. J0630313 ).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail : tanlei@lzu.edu.cn