

多孔介质中盐指现象的数值模拟*

罗莹莹^{1)†} 詹杰民^{1)†} 李毓湘²⁾

1) 中山大学应用力学与工程系, 广州 510275)

2) 香港理工大学土木及结构工程系, 香港)

3) 中山大学近岸海洋工程广东省重点实验室, 广州 510275)

(2007 年 7 月 22 日收到, 2007 年 11 月 13 日收到修改稿)

运用基于杂交网格的高精度数值方法研究了多孔介质中的盐指现象. 该算法将基于边界拟合坐标下的高精度有限差分法和高精度的泊松方程快速求解器有效地结合在一起, 从而达到提高整体的计算精度、计算效率和稳定性的目的. 通过比较不同孔隙率的多孔介质对盐指对流的传热传质效应的影响, 发现在标准孔隙率较低的多孔介质中, 盐度扩散的速度明显比热扩散的速度快, 盐指很快触及上下壁面, 使得上下层的盐度梯度迅速减小, 这是与非多孔介质具有明显差异之处.

关键词: 多孔介质, 双扩散对流, 盐指

PACC: 4725Q, 4755M

1. 引 言

多孔介质中物质和能量的输运是地球生物圈内普遍存在的自然现象. 土壤、动物的细胞组织、植物的根茎叶都是天然的多孔体. 在许多工程技术应用领域, 如地热资源的利用、石油勘探与开采、污染源在地下含水层中的扩散、核电站核废料的地下安全埋藏、金属固化等等, 都依赖于多孔介质的自然对流传热传质. 盐指现象是上述过程中常见的流动特征, 例如在多组分岩浆熔体自上而下的固结作用过程产生的“指状”形态、化学工业领域二元溶液凝固过程中的指状双扩散对流等等, 都是众多学者的研究对象^[1-3]. 盐指现象是一种小尺度的混合作用, 在发生盐指现象的双扩散对流系统中, 流体上升或下沉都会产生浮力通量并促进传热和传质过程. 由此可见, 研究多孔介质中的盐指现象及其传热传质效应, 无论是从剖析物理现象本身, 还是从解决实际问题方面都是必要的.

数值模拟是研究多孔介质中双扩散问题的一种有效手段. 多孔腔问题中的主要参数和温度、盐度边界条件类型决定了流体可能存在的四种流态, 这些

参数包括温度 Rayleigh 数、浮力比、Lewis 数、多孔介质孔的标准孔隙率、腔体高宽比. Chen 等^[4]结合 Galerkin 方法和有限差分法, 研究了饱和多孔介质中的双扩散盐指对流的特征. Mamou 等^[5]在分析双扩散在垂直多孔密闭腔体中的不稳定性时, 运用 Galerkin 有限元方法对 Rayleigh 数的临界值进行分析, 并指出近临界流的发展. Schoofs 等^[6]研究了刚性低孔隙率介质中初始稳态分层的流体在底部加热时出现的水平层化结构及其发展. Otero 等^[7]模拟了饱和多孔层在多种高 Rayleigh 数条件下的对流运动和热的传递过程. Kalliadasis 等^[8]模拟了多孔介质中存在化学反应的二维浓度指现象. 由于化学反应的过程会释放热量, 同时反应溶液里的浓度逐渐减小, 两者对密度的影响呈反作用, 上升的界面呈现手指状扩散曲线, 在随后不稳定非线性条件下演化为蘑菇形的热羽状结构, 而下降的界面出现等振幅、等波长的指状结构. Dong 等^[9]则采用二维的格子 Boltzmann 方法研究周期性排列的二维圆柱中的黏性耗散效应和非线性流体拖曳的影响. Hughes 等^[10]提出一个新的数值模型来模拟双扩散多成分在多孔介质中的流动. 该模型基于多维的、浓度相关的、饱和-非饱和传输模式, 采用杂交的有限元结合有限差

* 国家自然科学基金(批准号: 40476012)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: stszjm@mail.sysu.edu.cn

分方法,得到与 Pringle 等^[11]实验相符的数值结果.结果表明,氯化钠和显示氯化钠浓度的指示剂的分子扩散率的差别在很大程度上影响氯化钠浓度记录的准确性.

现有的多孔介质传热传质理论和模型,大多是直接或间接地把多孔介质看作是一种在大尺度上均匀分布的虚拟连续介质,假想包含固、液、气相的连续介质代替多相多孔介质.这种处理方法尽管与多孔介质的实质微观状态存在一些差别,但在一定程度上仍能满足工程设计的需要.因此,本文采用虚拟连续介质模型,运用基于杂交网格的高精度数值方法^[12]模拟多孔介质中的盐指现象,并比较不同孔隙率的多孔介质对盐指对流产生的传热传质效应的影响.

2. 基于 Boussinesq 假设的 Darcy 模型

根据 Boussinesq 假设,流体的密度与温度梯度和盐度梯度有关,但密度的变化并不显著地改变流体的性质.因此,在动量守恒方程中忽略密度的变化对惯性力项、压力差项和黏性力项的影响,仅考虑其对质量力项的影响.基于这个假设,得到下述二维的无量纲控制方程组.连续性方程

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \quad (1)$$

动量方程

$$U = -\frac{\partial P}{\partial X}, \quad (2)$$

$$V = -\frac{\partial P}{\partial Y} + Pr \cdot Ra_T (T - \lambda S), \quad (3)$$

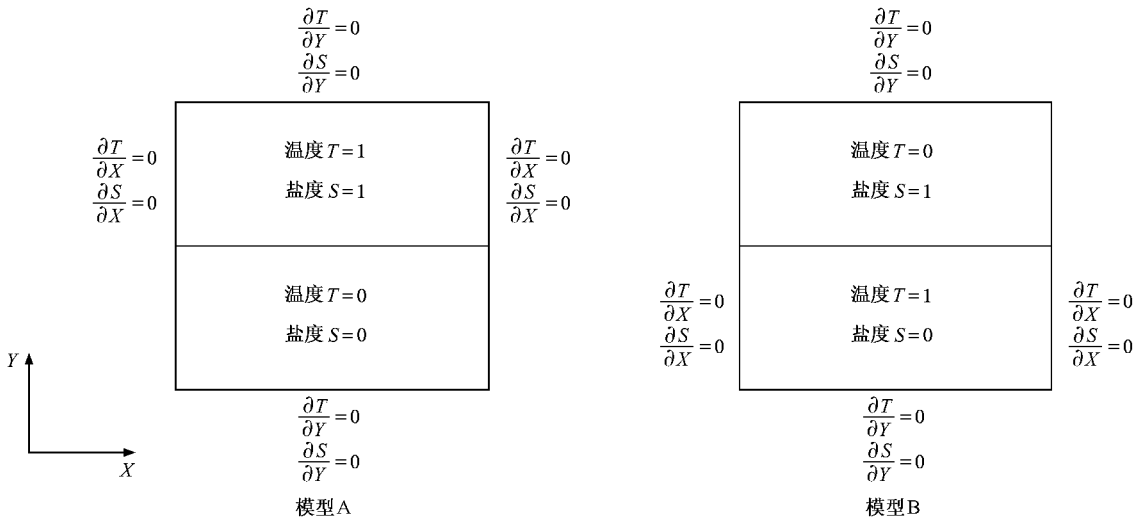


图 1 计算模型及初始条件

温度方程

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + U \frac{\partial T}{\partial X} + V \frac{\partial T}{\partial Y} = \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2}, \quad (4)$$

盐度方程

$$\epsilon \frac{\partial S}{\partial \tau} + U \frac{\partial S}{\partial X} + V \frac{\partial S}{\partial Y} = \frac{1}{Le} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial Y^2} \right). \quad (5)$$

这里 U 和 V 分别为水平速度和垂直速度分量, X 和 Y 分别为横坐标和纵坐标, τ 为时间, T 为温度, S 为盐度, P 为压力; $\epsilon = \phi/\sigma$ 为多孔介质标准孔隙率,是一个无量纲参数,其中 ϕ 为孔隙率, $\sigma = (\rho C)_p/(\rho C)_f$ 为热容比, Pr 为 Prandtl 数, Ra_T 为温度 Rayleigh 数, λ 为浮力比, Le 为 Lewis 数.

对于二维不可压缩流体流动,引入流函数 ψ ,使得速度分量

$$U = -\frac{\partial \psi}{\partial Y},$$

$$V = \frac{\partial \psi}{\partial X}.$$

将其代入连续性方程和动量方程,得到如下形式:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = Ra_T \left(\frac{\partial T}{\partial X} - \lambda \frac{\partial S}{\partial X} \right). \quad (6)$$

3. 数值方法

为了真实准确地反映盐指现象这一小尺度的流动特征,本文采用 Zhan 等^[12]提出的基于杂交网格的高精度数值方法进行模拟.该算法采用结合了四阶精度紧致有限差分离散和快速傅里叶变换的泊松方程求解器 DFPS2H^[13]在均匀网格上求解连续性方程,基于边界拟合坐标下的高精度有限差分法^[14,15]

求解非非常的对流扩散方程,并通过多项式插值实现不同网格之间的数据传递,从而达到提高整体的计算精度、计算效率和稳定性的目的.计算结果表明,该算法能有效模拟多种稳态和非稳态的复杂流动(包括方腔环流、自然对流和双扩散对流),显示其中小尺度结构的演化过程,并且对于提高整体的计算精度、计算效率和稳定性十分有效.算法的详细说明及可靠性检验可参见文献[12],这里不再赘述.

4. 算例及讨论

4.1. 计算模型和条件

如果温盐水置于冷淡水之上,在两层的交界处

就可以观察到盐指现象.为了观察盐指的产生和演化过程并讨论不同条件对其发展的影响,本文在计算中选取强梯度分层的温盐初始条件,计算了图1所示的两组工况.模型A是产生盐指现象的典型条件,在高宽比为2:1的长方形腔体中,初始时刻热盐水置于相同体积的冷淡水之上.在模型B中,冷盐水置于热淡水之上,这时温盐同时处于不稳定状态,系统的高度不稳定性对算法提出了更高的要求,这也是采用高精度算法的原因之一.两层之间存在的微小扰动在计算上表示为将盐度交界面定义为 $[0, 1]$ 的一组随机数.系统的各无量纲参数取值如下: Prandtl 数 $Pr = 7$, Lewis 数 $Le = 3.03$, 温度 Rayleigh 数 $Ra_T = 26460$, 浮力比 $\lambda = 0.82$.所有边界均设置为绝热及不可穿透条件,计算网格为 200×200 .

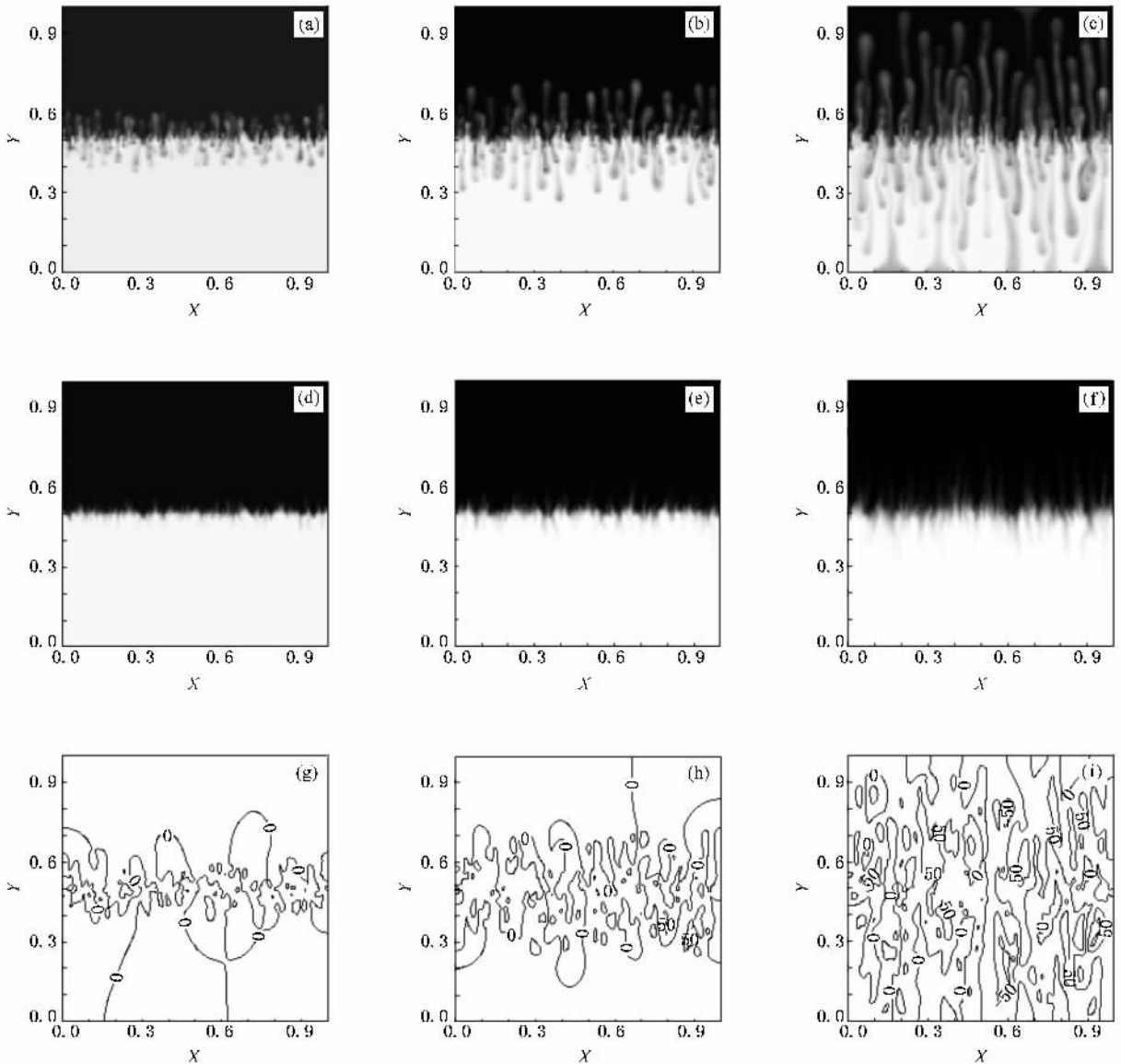


图2 模型A在标准孔隙率 $\epsilon = 0.5$ 的多孔介质中的盐指现象 (a)(b)(c)分别为无量纲时间 $\tau = 2 \times 10^{-5}, 4 \times 10^{-5}, 10 \times 10^{-5}$ 的盐度分布 (d)(e)(f)为对应时刻的温度分布 (g)(h)(i)为对应时刻的流线

4.2. 计算结果及讨论

图 1 中的模型 A 采用了产生盐指现象的典型初始条件. 在这种条件下, 交界面由高扩散量(热)控制保持稳定, 由低扩散量(盐)作用产生失稳, 交界面附近将形成丰富的盐指现象. 图 2 和图 3 分别展示了标准孔隙率 $\epsilon = 0.5$ 和 $\epsilon = 0.7$ 的多孔介质中盐指交界面的发展过程. 由于盐度交界面存在小扰动, 交界面上的流体微团在浮力作用下具有初始加速度. 热盐扩散效应的显著差异, 使得下沉的温盐水的盐量迅速扩散到周围流体中, 但其盐度仍然比周围的淡水大, 因此加速了其下沉的趋势. 与此相反, 下层的淡水进入上层后温度升高, 密度变小, 由此产

生的热浮力加速了其上升的趋势, 从而发生上下对流. 在热盐性质不同的水层界面上以簇状小水柱的形式出现, 形成丰富的盐指现象. 计算结果显示, 盐指是狭长而无序的, 其形状与非多孔介质中的盐指现象类似.

计算每一时刻水平方向的平均温度和平均盐度

$$\bar{T} = \frac{1}{\Delta x} \sum T_i, \quad (7)$$

$$\bar{S} = \frac{1}{\Delta x} \sum S_i, \quad (8)$$

得到标准孔隙率 $\epsilon = 0.5$ 和 $\epsilon = 0.7$ 的多孔介质中平均温度和平均盐度随时间变化的曲线分别如图 4 和

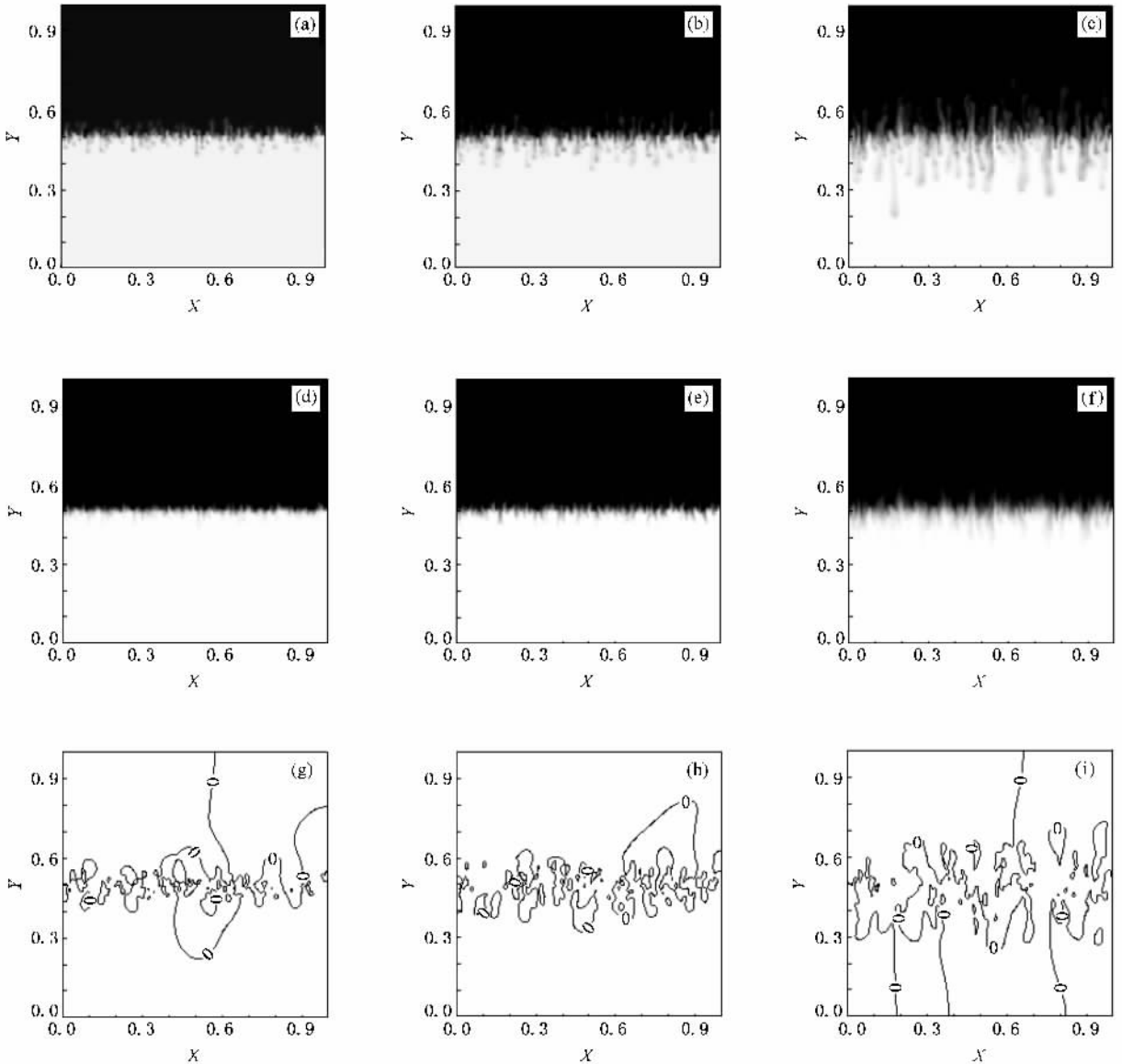


图 3 模型 A 在标准孔隙率 $\epsilon = 0.7$ 的多孔介质中的盐指现象 (a)(b)(c)分别为无量纲时间 $\tau = 2 \times 10^{-5}$, 4×10^{-5} , 10×10^{-5} 的盐度分布 (d)(e)(f)为对应时刻的温度分布 (g)(h)(i)为对应时刻的流线

图5所示. 由于盐指对流引起交界面上下发生局部混合, 交界层内的温盐呈线性分布. 随着盐指高度的不断增长, 局部混合的区域逐渐扩大, 说明盐指现象引起的传热传质效应均有所增强. 特别是在标准孔隙率较低($\epsilon = 0.5$)的多孔介质中, 盐度扩散的速度明显比热扩散的速度快, 盐指很快触及上下壁面, 导致上下层的盐度梯度迅速减小. 进一步比较了不同孔隙率的多孔介质中的传质效应, 发现孔隙率越小的工况中, 盐指对流越强烈(图6).

给出了在标准孔隙率 $\epsilon = 0.5$ 的多孔介质中不同时刻的盐度、温度分布和对应的流线. 图8显示了该工况中平均盐度、温度随时间的变化曲线. 模型B的初始条件比模型A更不稳定, 由于高扩散量(热)和低扩散量(盐)都处于失稳状态, 系统在热和盐度共同作用下引起剧烈的盐指对流. 文中进一步比较了模型A与模型B在相同标准孔隙率($\epsilon = 0.5$)的多孔介质中由盐指现象产生的传质效应. 由图9可见, 模型B的传质效应明显比模型A有所增强, 说明模型B工况中的盐指对流更为剧烈.

图1模型B的计算结果如图7和图8所示. 图7

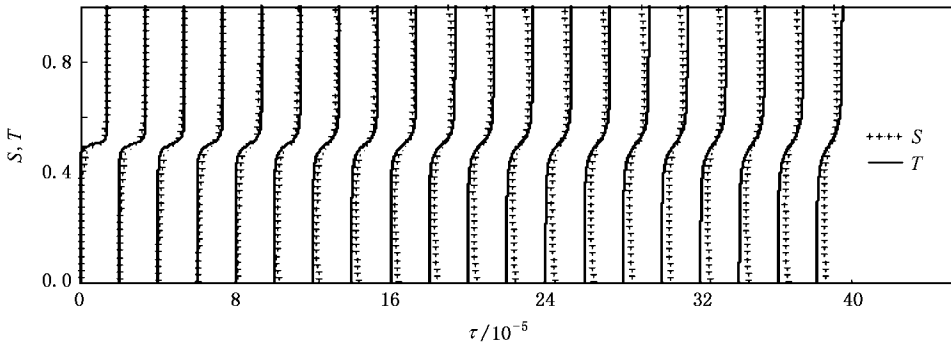


图4 模型A在标准孔隙率 $\epsilon = 0.5$ 的多孔介质中的传热传质效应

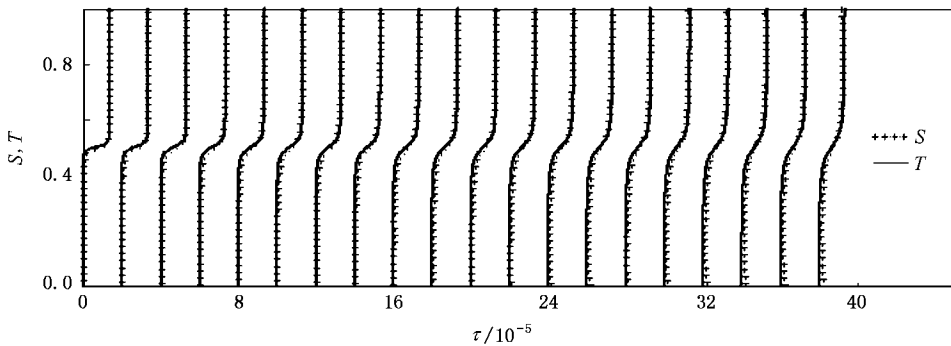


图5 模型A在标准孔隙率 $\epsilon = 0.7$ 的多孔介质中的传热传质效应

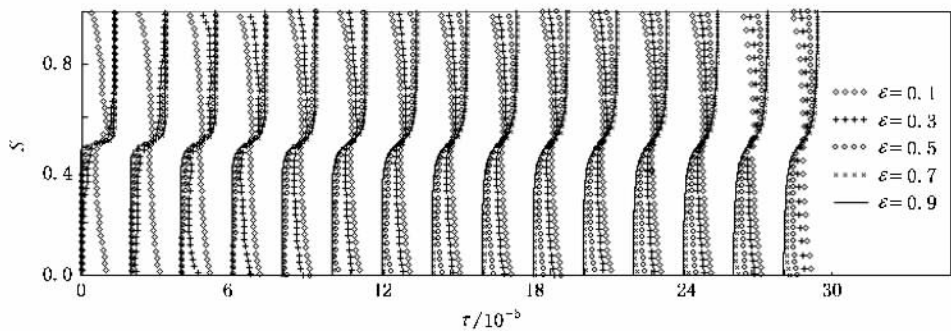


图6 模型A在不同孔隙率 ϵ 的多孔介质中的传质效应对比

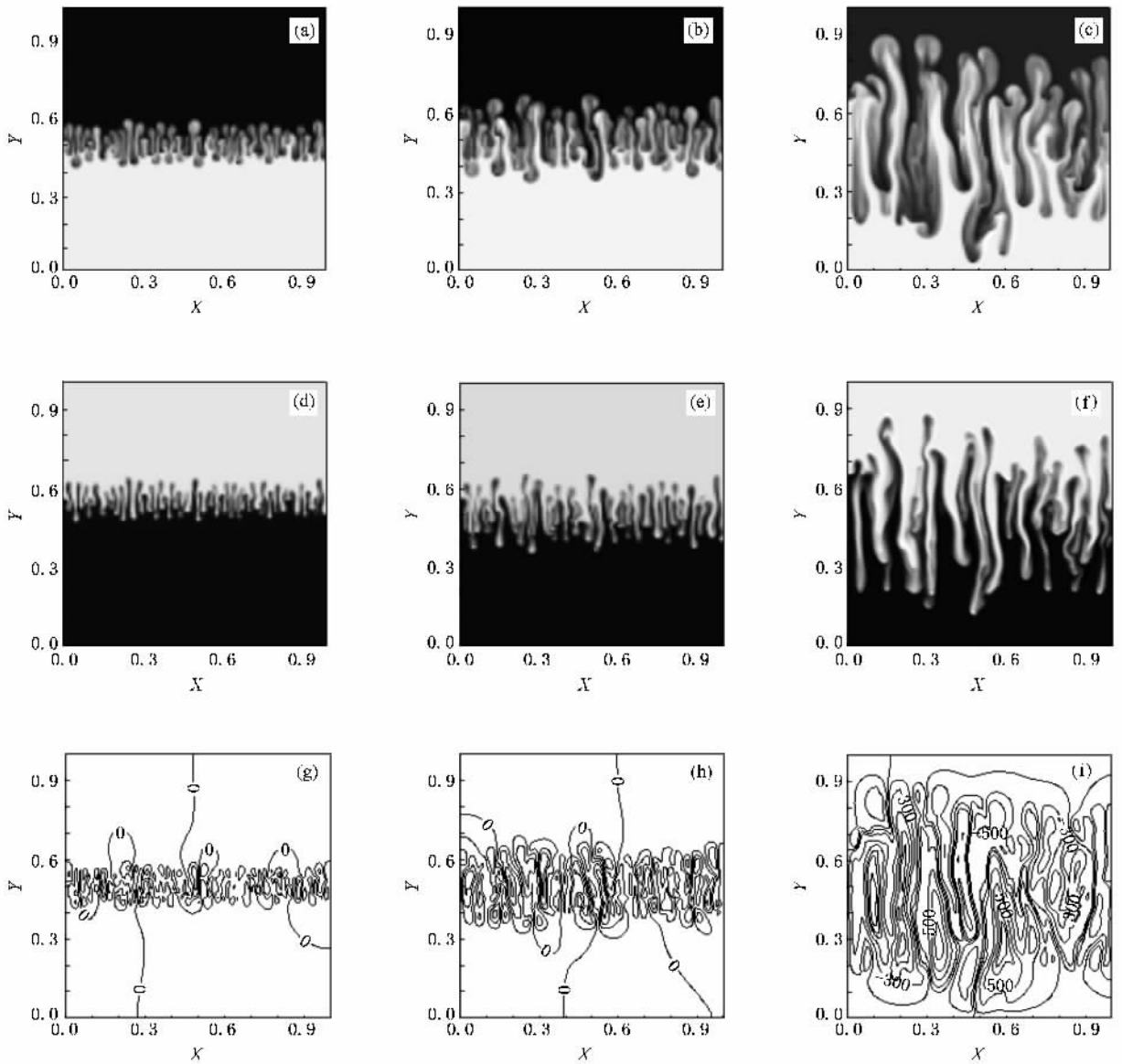


图7 模型 B 在标准孔隙率 $\epsilon = 0.5$ 的多孔介质中的盐指现象 (a)(b)(c) 分别为无量纲时间 $\tau = 2 \times 10^{-5}, 4 \times 10^{-5}, 10 \times 10^{-5}$ 的盐度分布 (d)(e)(f) 为对应时刻的温度分布 (g)(h)(i) 为对应时刻的流线

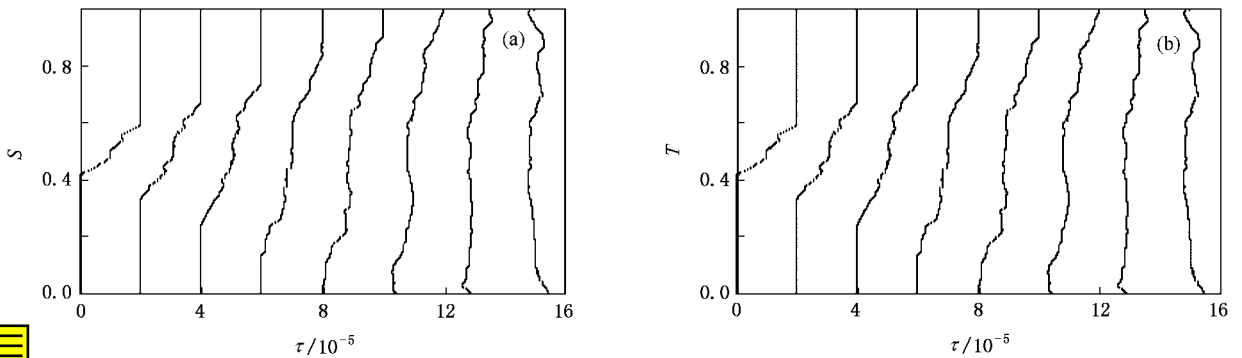


图8 模型 B 在标准孔隙率 $\epsilon = 0.5$ 的多孔介质中的传热传质效应 (a) 平均盐度随时间的变化 (b) 平均温度随时间的变化



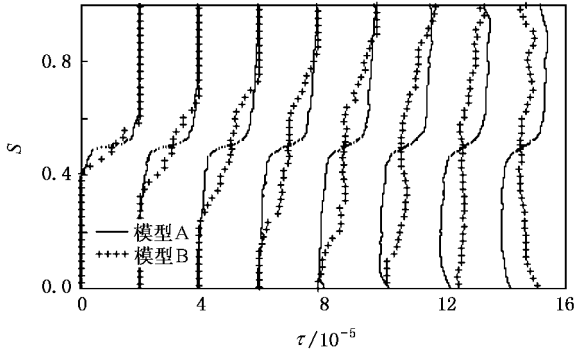


图9 模型A与模型B在相同标准孔隙率($\epsilon = 0.5$)的多孔介质中的传质效应对比

5. 结 论

本文运用基于杂交网格的高精度数值方法研究多孔介质中的盐指现象. 计算结果表明, 该算法不仅能有效地模拟盐指的不稳定对流运动, 而且有利于提高整体的计算精度、计算效率和稳定性.

通过比较不同孔隙率的多孔介质对盐指对流的传热传质效应的影响, 发现在标准孔隙率较低的多孔介质中, 盐度扩散的速度明显比热扩散的速度快, 盐指很快触及上下壁面, 使得上下层的盐度梯度迅速减小, 这是与非多孔介质具有明显差异之处. 另外, 当温盐同时处于非稳定状态的工况中, 盐指运动发展得更为剧烈.

[1] Yu C W 2003 *Earth Sci. J. China Univ. Geo.* **28** 31 (in Chinese)
[於崇文 2003 地球科学——中国地质大学学报 **28** 31]

[2] Chen F 1992 *J. Appl. Phys.* **71** 5222

[3] Zhao P, Chen C F 2001 *Int. J. Heat Mass Trans.* **44** 4625

[4] Chen F, Chen C F 1993 *Int. J. Heat Mass Trans.* **36** 793

[5] Mamou M, Vasseur P, Bilgen E A 1998 *Int. J. Heat Mass Trans.* **41** 1513

[6] Schoofs S, Trompert R A, Hansen U 2000 *Phys. Earth Planet. Inter.* **118** 205

[7] Otero J, Dontcheva L, Johnston H, Worthing R, Kurganov A, Petrova G, Doering C 2004 *J. Fluid Mech.* **500** 263

[8] Kalliadasis S, Yang J 2004 *Phys. Fluids* **16** 5

[9] Dong P, Feng S D, Zhao Y 2004 *Chin. Phys.* **13** 434

[10] Hughes J D, Vacher H L, Sanford W E 2005 *Water Resour. Res.* **41** 1

[11] Pringle S E, Glass R J, Cooper C A 2002 *Transp. Porous Med.* **47** 195

[12] Zhan J M, Luo Y Y, Li Y S 2008 *Appl. Math. Model.* **32** 873

[13] Boisvert R A 1984 *Elliptic Problem Solvers II* (Florida: Academic Press) p35

[14] Zhan J M, Li Y S 2003 *Int. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow* **13** 1031

[15] Zhan J M, Li Y S 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 825 (in Chinese) [詹杰民、李毓湘 2002 物理学报 **51** 825]

Numerical simulation of salt finger convection in porous media ^{*}

Luo Ying-Ying^{1, B)} Zhan Jie-Min^{1, B)†} Li Yok-Sheung²⁾

1) *Department of Applied Mechanics and Engineering, Sun Yet-Sen University, Guangzhou 510275, China*

2) *Department of Civil and Structural Engineering, Hong Kong Polytechnic University, Hong Kong, China*

3) *Key Laboratory of Coastal Ocean Engineering of Guangdong Province, Sun Yet-Sen University, Guangzhou 510275, China*

(Received 22 July 2007 ; revised manuscript received 13 November 2007)

Abstract

The dual-mesh hybrid numerical method is used to investigate the salt finger convection, as well as the heat and mass transfer, in saturated porous media. It is found that at low normalized porosity of porous media, saline diffusion is much faster than thermal diffusion. The fingers grow straightly to the top and bottom walls, which would lessen the saline gradient of stratified system. Also, it is indicated that the hybrid method is perfect for dealing with small scale convection in porous media because of its great veracity, efficiency and stability.

Keywords : porous media, double diffusive convection, salt finger

PACC : 4725Q, 4755M

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 40476012).

[†] Corresponding author. E-mail : stszjm@mail.sysu.edu.cn