

# 磁流体中 Helmholtz 和 Kelvin 力的界定\*

刘桂雄<sup>†</sup> 蒲尧萍 徐 晨

(华南理工大学机械工程学院, 广州 510640)

(2007 年 8 月 13 日收到, 2007 年 8 月 28 日收到修改稿)

磁流体磁彻体力的两种简化形式 Helmholtz 力和 Kelvin 力具有一定的适用范围. 在推导磁流体中的磁彻体力表达式基础上, 分析 Helmholtz 力和 Kelvin 力在磁流体中的起源, 得出两种形式的成立条件. 计算结果表明: 当磁流体磁导率与外磁场强度无关时, 磁流体磁彻体力可由 Helmholtz 力表示; 当磁流体中磁性颗粒的平均磁矩与磁流体比体积无关时, Kelvin 力为磁彻体力的简化形式; 在磁流体磁化系数与其密度成正比情况下, Helmholtz 力可转换为 Kelvin 力.

关键词: 磁流体, 磁彻体力, Helmholtz 力, Kelvin 力

PACC: 7550M, 7540B

## 1. 引 言

磁流体是一种兼具磁性物体和流体特性的纳米功能材料, 表现出许多特殊性质, 受到从事基础及应用研究者的广泛关注<sup>[1-3]</sup>. 其中磁流体在静磁场作用下的流体静力学问题是研究焦点之一, 且磁流体磁彻体力的简化形式(Kelvin 力和 Helmholtz 力)引起了许多学者的兴趣. Liu<sup>[4]</sup>认为 Kelvin 力起源于更通用的 Helmholtz 力, 仅当磁流体的磁化系数与其密度成正比时 Kelvin 力才有效. Luo 等<sup>[5]</sup>则认为文献[4]提出的 Kelvin 力有效使用范围仅适用于传统的顺磁流体和抗磁流体中<sup>[5]</sup>. 随后, Odenbach 和 Liu 在文献[6]中声称 Helmholtz 力推导过程中引入了磁化系数小的条件, 故怀疑强磁化系统中 Kelvin 力的有效性, 并证实磁流体中的 Kelvin 力无效, 但 Liu 又在文献[7]中说明证实过程中忽略了表面力的影响. Engel 在文献[8]中也指出, 文献[6]由于没有考虑相应表面力的贡献因而 Kelvin 力无效性观点的证明没有完成. 同时, 文献[9, 10]均认为磁彻体力的 Helmholtz 形式适用于线性磁流体.

本文由磁流体中的应力张量, 系统讨论磁流体中 Helmholtz 和 Kelvin 力的有效范围以及两者相互关系. 文中阐述的物理量均采用国际单位制.

## 2. 磁流体中的磁彻体力

根据热力学及能量守恒定理, 磁流体中的应力张量  $T_{mf}$  表达式如下<sup>[11]</sup>:

$$T_{mf} = - \left[ p(\rho, T) + \mu_0 \int_0^H \left( \frac{\partial \lambda M}{\partial \lambda} \right)_{H, T} dH + \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \right] \mathbf{I} + \mathbf{B} \mathbf{H}, \quad (1)$$

式中  $p(\rho, T)$  为普通热力学压力(即磁流体在其磁化强度为零时所受的压力),  $T$  为磁流体内的温度,  $\rho$  和  $\lambda$  分别为磁流体的密度和比体积,  $\mu_0$  为真空磁导率,  $\mathbf{I}$  为单位张量,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{H}$  和  $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{M} + \mathbf{H})$  分别表示磁流体中的磁化强度、磁场强度和磁感应强度. 为便于书写, 本文以  $(\cdot)_{H, T}$  表示下标量  $H$  和  $T$  为常数的情况.

为强调磁场对磁流体的影响, 引入磁应力张量  $T_m$ <sup>[11]</sup>:

$$T_m = T_{mf} + p(\rho, T) \mathbf{I} = - \left[ \mu_0 \int_0^H \left( \frac{\partial \lambda M}{\partial \lambda} \right)_{H, T} dH + \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \right] \mathbf{I} + \mathbf{B} \mathbf{H}. \quad (2)$$

根据彻体力与应力张量之间关系, 由(2)式可得磁彻体力  $f_m$  的表达式, 即

\* 国家自然科学基金(批准号: 50775077), 高等学校博士学科点专项科研基金(批准号: 20060561003)和广东省自然科学基金(批准号: 06025670)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: megxliu@scut.edu.cn

$$\begin{aligned} f_m &= \nabla \cdot \mathbf{T}_m \\ &= -\nabla \cdot \left[ \mu_0 \int_0^H \left( \frac{\alpha \lambda M}{\partial \lambda} \right)_{H,T} dH + \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \right] \mathbf{I} \\ &\quad + \nabla \cdot (\mathbf{HB}). \end{aligned} \quad (3)$$

对于磁性液体,固相颗粒磁化后较易与外磁场方向一致,故可认为  $\mathbf{B}$  与  $\mathbf{H}$  同向,则(3)式可简化为

$$f_m = -\nabla \left[ \mu_0 \int_0^H \left( \frac{\alpha \lambda M}{\partial \lambda} \right)_{H,T} dH \right] + \mu_0 M (\nabla H). \quad (4)$$

(3)式为磁流体中通用的磁彻体力表达式。

在实际应用中,Helmholtz 力和 Kelvin 力是磁彻体力常见的简化形式。

### 3. 磁流体中的 Helmholtz 力

磁流体中磁彻体力  $f_m$  的通用表达式(4)可变换为

$$\begin{aligned} f_m &= -\nabla \left\{ \mu_0 \int_0^H \lambda \left( \frac{\partial M}{\partial \lambda} \right)_{H,T} dH + \mu_0 \int_0^H M dH \right\} \\ &\quad + \mu_0 M (\nabla H). \end{aligned} \quad (5)$$

当磁流体的磁导率  $\mu$  (磁化系数  $\chi$ ) 仅与其密度  $\rho$ 、温度  $T$  有关,与  $H$  无关时,有

$$\begin{aligned} \mu_0 \int_0^H \lambda \left( \frac{\partial M}{\partial \lambda} \right)_{H,T} dH &= -\frac{H^2}{2} \rho \left( \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)_T, \\ \mu_0 \int_0^H M dH &= (\mu - \mu_0) \frac{H^2}{2}, \\ \mu_0 M (\nabla H) &= (\mu - \mu_0) \nabla \left( \frac{H^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

将(6)式代入(5)式可得

$$f_m = \nabla \left[ \frac{H^2}{2} \rho \left( \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)_T \right] - \frac{H^2}{2} \nabla \mu, \quad (7)$$

式中  $\nabla \left[ \frac{H^2}{2} \rho \left( \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)_T \right] - \frac{H^2}{2} \nabla \mu$  称为 Helmholtz 力。

由以上分析过程及推导结果可以看出,只要磁流体满足磁导率  $\mu$  与磁场强度  $H$  无关这一条件,磁彻体力  $f_m$  可简化为 Helmholtz 力。

对于传统的顺磁流体和抗磁流体,其磁化系数  $\chi$  通常远小于 1,可近似看作其磁导率  $\mu$  与磁场强度  $H$  无关,磁彻体力可简化为 Helmholtz 力的形式。对于非线性磁流体,当其磁化曲线中的某些部分可视为直线段且外加磁场强度在直线段所对应磁场强度范围内时,磁流体相应的磁导率  $\mu$  亦与磁场强度  $H$  无关,磁彻体力也可由 Helmholtz 力表示。

### 4. 磁流体中的 Kelvin 力

设变量  $n_v$  为单位体积磁流体中的磁性微粒数,

$m_a$  为磁流体中磁性颗粒的平均磁矩,  $n_m$  为单位质量磁流体中的磁性微粒数,  $n_m = n_v \lambda = C$  ( $C$  为常数)。对于(4)式中单位质量磁流体中的磁矩  $\lambda M$ ,由  $M = n_v m_a$  得

$$\lambda M = n_m m_a,$$

则

$$\frac{\alpha \lambda M}{\partial \lambda} = n_m \frac{\partial m_a}{\partial \lambda}. \quad (8)$$

当  $\frac{\partial m_a}{\partial \lambda} = 0$  时,

$$-\nabla \left[ \mu_0 \int_0^H \left( \frac{\alpha \lambda M}{\partial \lambda} \right)_{H,T} dH \right] = 0,$$

则(4)式可简化为

$$f_m = \mu_0 M (\nabla H), \quad (9)$$

式中  $\mu_0 M (\nabla H)$  称为 Kelvin 力。

从以上推论可以看出,只要磁流体满足磁性颗粒平均磁矩  $m_a$  与比体积  $\lambda$  无关这一条件,磁彻体力  $f_m$  可由 Kelvin 力表示。

当磁流体工作在饱和磁化状态时,  $m_a$  为恒值。对于稀释磁流体,载液的可压缩性远大于磁性颗粒的压缩性,可认为磁流体的变形不引起磁性颗粒形状的改变,从而近似认为磁性颗粒的平均磁矩  $m_a$  与磁流体比体积  $\lambda$  无关。上述两种情况均满足

$$\frac{\partial m_a}{\partial \lambda} = 0,$$

故磁彻体力  $f_m$  可简化为 Kelvin 力。

### 5. Helmholtz 力与 Kelvin 力的转换

由以上分析可知,Helmholtz 力和 Kelvin 力起源于通用式(4),是磁彻体力在各自条件下的不同简化形式。若磁流体磁化系数  $\chi$  与其密度  $\rho$  成正比,对 Helmholtz 力表达式(7)进行推导,可得

$$\begin{aligned} f_m &= \nabla \left[ \frac{H^2}{2} \rho \left( \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)_T \right] - \frac{H^2}{2} \nabla \mu \\ &= \mu_0 \left[ \nabla \left( \frac{H^2}{2} \chi \right) - \frac{H^2}{2} \nabla \chi \right] \\ &= \mu_0 M \nabla H. \end{aligned} \quad (10)$$

(10)式的结果正是 Kelvin 力的表达形式。由此可知,当满足一定条件时 Helmholtz 力可转换为 Kelvin 力。

对于传统的顺磁流体和抗磁流体,若符合磁导率  $\mu$  与磁场强度  $H$  无关,同时在实际应用中又满足磁化系数  $\chi$  与密度  $\rho$  成正比,则磁彻体力  $f_m$  可由

Helmholtz 力转换为 Kelvin 力.

## 6. 结 论

1) 磁流体中磁彻体力的计算通常在适当假设下简化进行, Helmholtz 和 Kelvin 力是两种常见的简化形式.

2) 当磁流体磁导率  $\mu$  与磁场强度  $H$  无关时, 磁彻体力可简化为 Helmholtz 力. 对于传统的顺磁流体、抗磁流体以及工作在磁化曲线线性部分的非线性磁流体, 其磁彻体力均可由 Helmholtz 力表示.

3) 当磁性颗粒的平均磁矩  $m_a$  与磁流体比体积  $\lambda$  无关时, 磁彻体力可简化为 Kelvin 力. 对于稀释磁流体或工作在饱和磁化状态下的磁流体, 磁彻体力可由 Kelvin 力表示.

4) 在磁流体磁化系数  $\chi$  正比于其密度  $\rho$  的情况下, Helmholtz 力可转换为 Kelvin 力. 对于传统的顺磁流体和抗磁流体, 磁彻体力可由 Helmholtz 力转换为 Kelvin 力的形式.

感谢华南理工大学机械工程学院曾德长教授和黄平教授参与本文的讨论.

- 
- [ 1 ] Rheinländer T, Priester T, Thommes M 2003 *J. Magn. Magn. Mater.* **256** 252
- [ 2 ] Yang W H, Hu X W 1996 *Acta Phys. Sin.* **45** 595 ( in Chinese )  
[ 杨维、胡希伟 1996 物理学报 **45** 595 ]
- [ 3 ] Xie H Q, Xi T G, Wang J C 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1444 ( in Chinese ) [ 谢华清、奚同庚、王锦昌 2003 物理学报 **52** 1444 ]
- [ 4 ] Liu M 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 2762
- [ 5 ] Luo W, Du T, Huang J 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 2763
- [ 6 ] Odenbach S, Liu M 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 328
- [ 7 ] Liu M 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 4979
- [ 8 ] Engel A 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 4978
- [ 9 ] D'Aquino M, Miano G, Serpico C, Zamboni W, Coppola G 2003 *IEEE Trans. Magn.* **39** 2657
- [ 10 ] Zamboni W, Coppola G, D'Aquino M, Miano G, Serpico C 2004 *J. Magn. Magn. Mater.* **272—276** 657
- [ 11 ] Rosensweig R E 1997 *Ferrohydrodynamic* ( New York : Cambridge University Press )

# Definition of Helmholtz and Kelvin forces in magnetic fluids <sup>\*</sup>

Liu Gui-Xiong<sup>†</sup> Pu Yao-Ping Xu Chen

( College of Mechanical Engineering , South China University of Technology , Guangzhou 510640 , China )

( Received 13 August 2007 ; revised manuscript received 28 August 2007 )

## Abstract

The Helmholtz and Kelvin forces for volume force density in magnetic fluids are valid only in some situations. Based on calculation of the volume force density in magnetic fluids , the origin for the Helmholtz and Kelvin forces in magnetic fluids is suggested , and the range of validity of them is analyzed in this paper. The calculation results show that the volume force density can be expressed in the form of Helmholtz force when the permeability of magnetic fluid is independent of the applied magnetic field , while the Kelvin force is valid when the average magnetic moment of magnetic particles in the magnetic fluid is independent of the specific volume of magnetic fluid. When the susceptibility is proportional to the density of magnetic fluid , the Helmholtz force is reduced to the Kelvin force.

**Keywords** : magnetic fluids , volume force density , Helmholtz force , Kelvin force

**PACC** : 7550M , 7540B

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 50775077 ) , the Doctoral Program Foundation of Institution of Higher Education of China ( Grant No. 20060561003 ) and the Natural Science Foundation of Guangdong Province , China ( Grant No. 06025670 ).

<sup>†</sup> E-mail : megxliu@scut.edu.cn