

双频信号作用下耦合双稳系统的双共振特性^{*}

林 敏[†] 方利民 朱若谷

(中国计量学院计量技术工程学院 杭州 310018)
(2007 年 9 月 23 日收到 2007 年 10 月 20 日收到修改稿)

两个单一双稳系统经非线性耦合而成为耦合系统,将其中一个双稳系统当作参数固定的被控系统,而另一个则作为参数可调的控制系统,通过调节耦合系数和控制系统的参数能产生随机共振.给控制系统外加单一频率信号,改变其频率大小能使控制系统产生共振.由于耦合的作用,控制系统的共振将影响被控制系统的随机共振,从而在耦合系统中形成双共振现象,实现了用一个共振去影响另一个共振,并能使被控制系统的随机共振更加强烈.经计算机仿真实证了它的有效性.

关键词:耦合系统,双频信号,随机共振,双共振

PACC: 0250, 0540, 0545

1. 引 言

一个系统受到外界作用时,如果作用与系统的固有振动合拍,就会使之产生大幅度的振动,而所谓合拍就是频率相等或相近.随机共振^[1,2]是以噪声作为媒介引起微弱周期信号与非线性系统协同作用的非线性现象.它描述了在一定量的噪声背景中,非线性系统对微弱的周期信号能产生强烈的输出响应,存在着噪声能量向信号能量转移的机理^[3-5].传统的随机共振现象局限于单一系统产生的单峰情形,直到 1997 年 Vilar 等人发现在一定条件下,有些体系输出信号的信噪比(SNR)会在不同的噪声值处呈现出多个极大峰,从而产生随机多重共振现象(SMR)^[6,7].这些现象表明,随机共振可以在不同条件下产生,且共振的强烈程度也不相同.

为了增强系统输出功率谱在输入信号频率处的谱值,Gammaitoni 等人提出了控制随机共振的方法^[8].随后,Löcher 等针对不同的系统相继提出了各种不同的随机共振控制方法^[9-11].作为自然科学研究的成果其最终目的,总是为了成功的应用,而随机共振的控制则是随机共振应用的关键环节.随机共振控制或控制随机共振就是要通过控制手段而有目的地强化或者产生随机共振,从而产生所需要的具

有特定性质的输出响应.

本文将两个单一双稳系统通过非线性方式耦合为一耦合系统^[12],并将其中一个双稳系统当作参数固定的被控系统,而另一个则作为参数可调的控制系统.在耦合系统中,通过调节耦合系数和控制系统的参数能产生随机共振,给控制系统外加单一频率信号,改变其频率大小能使控制系统产生共振.由于耦合的作用,控制系统的共振将影响被控制系统的随机共振,从而在耦合系统中形成双共振现象,被控制系统的随机共振与控制系统的共振相互影响,可实现用一个控制共振去影响另一个被控共振,并能使被控制系统的随机共振更加强烈.

2. 耦合系统及其特性

2.1 耦合系统模型

单一双稳系统的经典模型为

$$\dot{x} = a_0 x - b_0 x^3 + A \cos(\omega t) + \xi(t), \quad (1)$$

式中 a_0 和 b_0 是双稳系统固有的参数, $A \cos(\omega t)$ ($A \ll 1$ 是幅值, ω 是频率)是作用到系统的弱周期信号, $\xi(t)$ 是均值为零、自相关函数 $\xi(t)\xi(0) = 2D\delta(t)$ 的高斯白噪声, D 代表噪声强度.将两个双稳系统采用非线性耦合方式构成一耦合系统,并将

^{*} 国家自然科学基金(批准号:50675214)资助的课题.

[†] E-mail: linm@cjluc.edu.cn

其中一个参数固定的双稳系统 $a_0x - b_0x^3$ 作为被控系统,而另一个参数可调的 $(ay - y^3)$ 作为控制系统,耦合过程中各变量与参数之间的关系可用如下的耦合方程来表示:

$$\dot{x} = a_0x - b_0x^3 - \gamma xy^2 + A \cos(\omega t) + \xi(t) \quad (2a)$$

$$\dot{y} = ay - y^3 - \gamma x^2 y, \quad (2b)$$

式中, γ 是两双稳系统之间的耦合系数, a 是可变的双稳系统参数, $x(t)$ 和 $y(t)$ 是双稳系统变量。

2.2. 耦合系统特性分析

(2) 式可改写为

$$\dot{x} = (a_0 - \gamma y^2)x - b_0x^2 + A \cos(\omega t) + \xi(t), \quad (3a)$$

$$\dot{y} = (a - \gamma x^2)y - y^3, \quad (3b)$$

由于作用到耦合系统的周期信号 $A \cos(\omega t)$ 和噪声 $\xi(t)$ 都是沿 x 方向的,因而能产生随机共振的运动也只能是沿着 x 方向的,而不同的 y 值将对应着不同的势函数曲线和势阱高度.当(3a)式中的参数 $A \ll 1$, $\omega \ll 1$ 和 $D \ll 1$ 时,根据随机共振的线性响应理论^[13,14] (3a) 式稳态解可表示为

$$x(t) = X \cos(\omega t + \varphi), \quad (4)$$

式中 X 是耦合系统输出在频率 ω 处的幅值大小,它反映了随机共振的强烈程度.由于 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是随机变量,采用 $x(t)$ 的统计平均 $\langle x(t) \rangle$ 来刻画其特性,将(4)式代入(3b)式,并用 $y(t)$ 代替 y ,则有

$$\dot{y}(t) = [a - \gamma X^2 \cos^2(\omega t + \varphi)] y(t) - y(t)^3. \quad (5)$$

(5) 式属 Bernoulli 类型方程,可严格求解,其解当 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$y(t) \rightarrow \pm \sqrt{a - \gamma X^2 [1 + \cos(2\omega t + 2\varphi)]} / 2. \quad (6)$$

若用 P_s 表示耦合系统输出 $x(t)$ 的功率谱,则 P_s 在频率 ω 处值的大小为 $P_s(\omega) = X^2/2$ (6) 式可表示为

$$y(t) \rightarrow \pm \sqrt{a - \gamma P_s(\omega) [1 + \cos(2\omega t + 2\varphi)]}, \quad (7)$$

由于作用到系统的弱周期信号幅值 $A \ll 1$,系统所产生的输出响应 $x(t)$ 的幅值 X 也较小,因此,在较小的耦合系数 γ 作用下,经足够长时间后, $y(t)$ 的统计均值可表示为

$$y(t) \approx \sqrt{a - \gamma P_s(\omega)} - \frac{\gamma P_s(\omega)}{2\sqrt{a - \gamma P_s(\omega)}} \cos(2\omega t + 2\varphi) \quad (8)$$

$y(t)$ 将趋于在 $\sqrt{a - \gamma P_s(\omega)}$ 附近作频率为 2ω 的小幅波动.参数 γ 和 a 的变化将影响 $y(t)$ 波动的均值. $y(t)$ 的波动频率 2ω 是由作用到被控制系统的输入信号的频率 ω 决定的,这是该耦合系统所固有的特性。

3. 双频信号作用下的双共振

$y(t)$ 对耦合系统输出 $x(t)$ 的影响是以 $y(t)$ 平方的形式出现在被控双稳系统的线性项系数中,即 $\hat{a}_0 = a_0 - \gamma y^2$,由于 $y(t)$ 的波动是小幅的,参数 γ 和 a 的变化将使系统的势垒高度和 Kramers 逃逸率发生变化^[2,15],从而影响被控双稳系统的固有特性,经适当调节总能使被控双稳系统、输入信号和噪声的相互作用协同而产生随机共振.由于耦合的作用,当被控系统处于共振状态时,控制系统变量 $y(t)$ 则是以频率为 2ω 作小幅波动, $y(t)$ 的波动频率由作用到被控制系统的输入信号的频率 ω 决定的,是该耦合系统所固有的.那么,给控制系统外加单一频率信号 $B \cos(\Omega t + \phi)$,当频率 Ω 等于或接近 2ω 时,外加的作用与系统固有的振动合拍,就会在控制系统中产生共振并使 $y(t)$ 以较大的幅值振动.控制系统的共振必将影响被控制系统的随机共振.因此,当耦合系统受到双频信号作用时,在耦合系统中存在着控制系统的共振和被控制系统的随机共振,且两个共振互有影响,这一现象称之为双共振现象.为此,构建如图 1 所示的双频信号作用下的耦合系统.控制系统的变量、参数与外作用信号间的关系为

$$\dot{y} = ay - y^3 - \gamma x^2 y + B \cos(\Omega t + \phi), \quad (9)$$

式中 B , Ω 和 ϕ 分别是外加周期信号幅值、频率和相位.本文采用如下的数值仿真来研究耦合系统中的双共振现象。

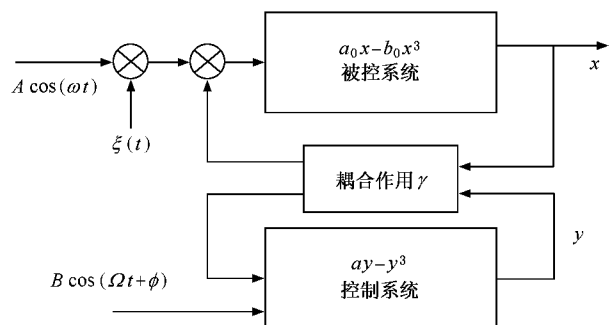


图 1 双频信号作用下的耦合系统

4. 数值仿真结果与分析

对于如图 1 所示的耦合双稳系统,不同的参数取值,将呈现出各不相同的共振特性.

1)被控系统的参数若为 $a_0 = 0.5, b_0 = 1$,当作用到被控系统的周期信号幅值 $A = 0.05$,频率 $\omega =$

$2\pi \cdot 0.01$ 噪声强度 $D = 0.18$ 时,由于被控系统势垒高度太高 $x(t)$ 只能在一个势阱内的点 $\sqrt{a_0/b_0} = 0.707$ 附近波动,如图 3(a) 所示,由于被控系统与输入信号、噪声之间不满足匹配条件而不能产生随机共振,也无法实现噪声与信号之间的能量转换, $x(t)$ 在输入信号频率处的功率谱值非常小,只有 $P_s(2\pi \cdot 0.01) = 0.0011$,如图 3(b) 所示.

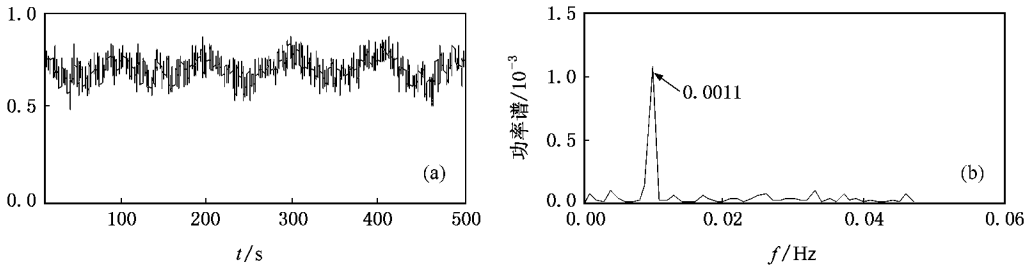


图 2 $x(t)$ 只在单一势阱内波动 (a) 时域波形 (b) 功率谱

采用图 1 所示的耦合方法,设定参数 $a = 1$,通过调节耦合系数 γ 能使系统产生随机共振,如图 3(a) 所示为 $\gamma = 0.35$ 时,耦合系统两个变量 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的时间波形,可见 $y(t)$ 在略小于 $\sqrt{a} = 1$ 附近作小幅波动,而 $x(t)$ 围绕着 $x = 0$ 点在两势阱之间振动,功率谱显著放大, $P_s(2\pi \cdot 0.01) = 0.1205$. $y(t)$ 和 $x(t)$ 的曲线如图 4(a) 所示,图中虚线是仿真曲线(即图 3(a) 中 $y(t)$ 的放大),实线是由(8)式绘制的理论曲线.当采用图 1 所示的方式外加单一频率信号,参数 $B = 0.3, \Omega = 2\omega = 0.02, \phi = 0.4\pi$ 时,外加作用与 $y(t)$ 同步,控制系统达到共振.如图 4(b) 所示,实线是外作用信号、虚线是 $y(t)$.控制系统的共

振极大地影响了被控系统的随机共振.如图 5 所示,耦合系统输出 $x(t)$ 的信噪比和功率谱明显增大, $P_s(2\pi \cdot 0.01) = 0.1930$. 输出信号 $x(t)$ 有更高的品质.仿真结果表明,在耦合系统中存在着双共振现象,且能使随机共振更加强烈.

2) 输入信号和噪声,被控系统与控制系统的参数取值均不变,只改变外加单一频率信号的频率 Ω .随着频率 Ω 的变化,被控系统输出 $x(t)$ 的功率谱 P_s 在频率 ω 处值的大小 $P_s(\omega)$ 也随之而变,如图 6 所示,当 $\Omega = 2\omega (\omega = 0.01)$ 时, P_s 具有最大值,表明耦合双稳系统处于双共振状态.数值仿真结果与理论分析结论完全一致.

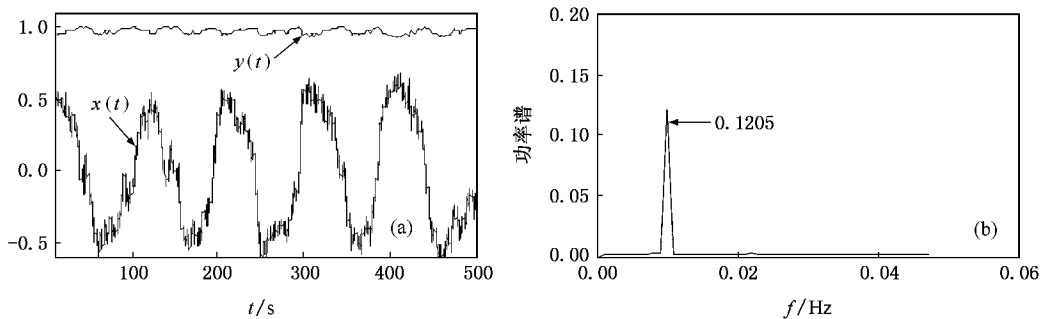


图 3 耦合系统变量 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的时域波形及功率谱 (a) 时域波形 (b) $x(t)$ 的功率谱

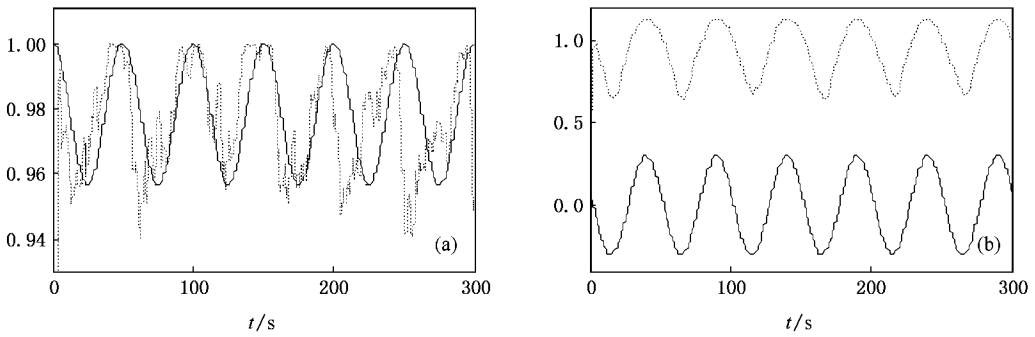


图4 耦合系统变量 $y(t)$ 的时域波形 (a)实线为理论曲线,虚线为仿真曲线 (b)外作用(实线)与响应曲线(虚线)

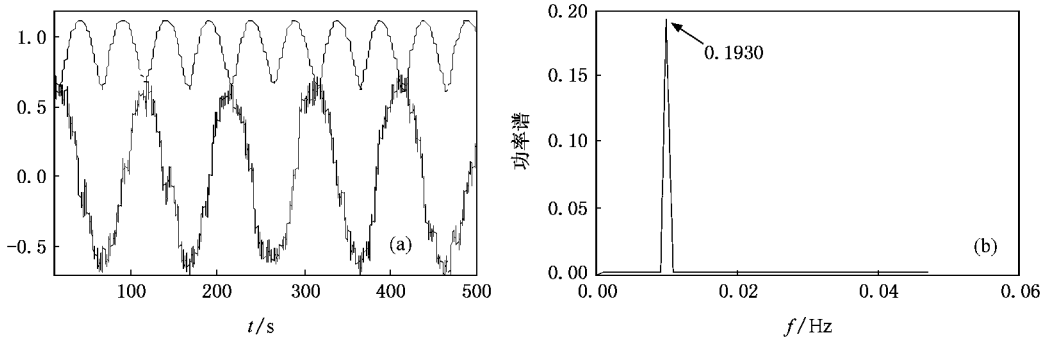


图5 双频信号作用下耦合系统的两个变量 $x(t)$ 和 $y(t)$ (a) $x(t)$ 和 $y(t)$ 的时域波形 (b) $x(t)$ 的功率谱

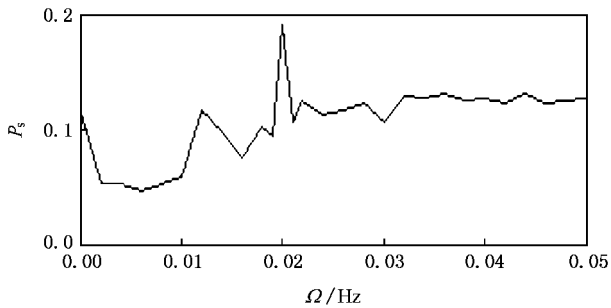


图6 P_s 随 Ω 的变化

5. 结 论

由两个双稳系统构成耦合系统,并将其中一个双稳系统当作参数固定的被控系统,而另一个则作

为参数可调的控制系统,控制系统与被控系统之间的耦合关系是非线性的.在耦合系统中,通过调节耦合系数和控制系统的参数能产生随机共振,给控制系统外加单一频率信号,改变其频率大小能使控制系统产生共振.由于耦合的作用,控制系统和被控制系统的振动频率有着固有的关系,控制系统的共振极大地影响着被控制系统的随机共振,从而在耦合系统中形式了双共振现象.被控制系统的随机共振与控制系统的共振相互影响,实现了用一个共振去影响另一个共振,并能有效地控制被控制系统的随机共振.

共振就是利用合拍来有效积聚能量,使微弱的作用产生显著的效果.耦合系统的双共振大大增强了被控制系统的随机共振效应,能达到单一共振难以达到的程度,可使微弱的作用产生更加显著的效果,并且有助于人们获得更多的信息.



- [1] Benzi R ,Sutera A , Vulpiana A 1981 *Phys. A* **14** 1453
- [2] Gammaitoni L ,Hanggi P ,Jung P , Marchesoni F 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 223
- [3] Qin G R , Gong D C , Hu G , Wen X D 1992 *Acta Phys. Sin.* **41** 360 (in Chinese) 秦光戎、龚德纯、胡 岗、温孝东 1992 物理学报 **41** 360]
- [4] Zhu H J , Li R , Wen X D 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2404 (in Chinese) 祝恒江、李 蓉、温孝东 2003 物理学报 **52** 2404]
- [5] Lin M , Huang Y M 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3277 (in Chinese) [林 敏、黄咏梅 2006 物理学报 **55** 3277]
- [6] Vilar J M G ,Rubi J M 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 2882
- [7] Li Q S , Wang P 2004 *Chem. Phys. Lett.* **387** 383
- [8] Gammaitoni L , Löcher M , Bulsara A R , Hanggi P , Neff J , Wiesenfeld K , Ditto W L , Inchiosa M E 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 4574
- [9] Löcher M , Inchiosa M E , Neff J , Bulsara A R , Wiesenfeld K , Gammaitoni L , Hanggi P , Ditto W L 2000 *Phys. Rev. E* **62** 317
- [10] Schmid G ,Hanggi P 2005 *Physica A* **351** 95
- [11] Lin M , Mao Q M , Zheng Y J , Li D S 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5021 (in Chinese) 林 敏、毛谦敏、郑永军、李东升 2007 物理学报 **56** 5021]
- [12] Gandhimathi V M , Rajasekar S , Kurths J 2006 *Phys. Lett. A* **360** 279
- [13] Dykman M I , Luchinsky D G , McClintock P V E and Mannella R 1993 *J. Stat. Phys.* **70** 463
- [14] Dykman M I , Mannella R , McClintock P V E , Stocks N G 1990 *Phys. Rev. Lett.* **65** 2606
- [15] Hu G 1994 *Stochastic Forces and Nonlinear Systems* (Shanghai : Shanghai Science & Technology Education Press) [in Chinese] 胡 岗 1994 随机力与非线性系统(上海 :上海科技教育出版社)]

The dual-resonance characteristic of coupled bistable system affected by two-frequency signal*

Lin Min[†] Fang Li-Min Zhu Ruo-Gu

(College of Metrology Technology and Engineering , China Jiliang University ,Hangzhou 310018 ,China)

(Received 23 September 2007 ; revised manuscript received 20 October 2007)

Abstract

Two single bistable systems were constituted into a coupling system by means of nonlinear coupling. One of the bistable systems was considered as controlled system with fixed parameters , and the other as control system with adjustable parameters. Adjusting the coupling coefficients and parameters of the control system can produce stochastic resonance. With a single-frequency signal added to the control system , changing the signal frequency can produce the resonance. Due to the effect of coupling , the resonance of control system will affect the stochastic resonance of the controlled system , and the dual-resonance phenomenon happens in the coupled system , which realizes the usage of one resonance to influence another and make the stochastic resonance of controlled system more intense. This also has been verified using computer simulation.

Keywords : coupling system , two-frequency signal , stochastic resonance , dual-resonance

PACC : 0250 , 0540 , 0545

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 50675214).

[†] E-mail : linn@cjl.u.edu.cn