第 57 卷 第 5 期 2008 年 5 月
1000-3290/2008/57(05)/2643-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.57, No.5, May, 2008

事件空间中 Birkhoff 系统的 Noether 理论*

张 毅†

(苏州科技学院土木工程学院,苏州 215011)

(2007 年 10 月 11 日收到;2007 年 10 月 28 日收到修改稿)

研究事件空间中 Birkhoff 系统的 Noether 对称性与 Noether 守恒量. 首先,建立了事件空间中 Birkhoff 系统的参数方程;其次,基于 Pfaff 作用量在无限小变换下的不变性,给出了事件空间中 Birkhoff 系统的 Noether 定理及其逆定理;最后,举例说明结果的应用.

关键词:事件空间, Birkhoff 系统, Pfaff 作用量, Noether 对称性

PACC:0320

1. 引 言

1918 年,Noether 研究了 Hamilton 作用量在无限小变换下的不变性质[1],即 Noether 对称性. Noether 理论揭示了力学系统的守恒量与其动力学对称性之间的关系. Djukić和 Vujanović[2] 将 Noether 理论推广到无限小变换包含广义速度的情形,从而解决了完整非保守系统的对称性与守恒量问题. 李子平[3—5] 将 Noether 理论进一步推广到线性非完整系统,这一结果比 Bahar[6] 的同类结果早了六年. Mei[7] 应用 Pfaff 作用量在无限小变换下的不变性建立了 Birkhoff 系统的 Noether 理论. 近 30 年来,对 Noether 对称性与守恒量的研究取得了一系列重要成果[2—21]. 本文进一步研究事件空间中 Birkhoff 系统的 Noether 理论. 首先,建立了系统的运动方程;其次,基于事件空间中 Pfaff 作用量的变分公式,给出了系统的 Noether 对称变换、准对称变换和广义准对称变换的定义和判据;最后,建立了事件空间中 Birkhoff 系统的 Noether 定理及其逆定理.

2. 事件空间中 Birkhoff 系统的参数方程

研究事件空间中 Birkhof 系统,其 Birkhof 变量为 $a^\mu(\mu=1,\cdots,2n)$. 建立 $(2n+1)$ 维事件空间,此空间中点的坐标为 $a^\mu(\mu=1,\cdots,2n)$ 和时间 t. 引入记号

$$x_1=t, x_{\mu+1}=a^\mu, (\mu=1,\cdots,2n), \tag{1}$$

那么,所有变量 $x_\alpha(\alpha=1,\cdots,2n+1)$ 可作为某参数 τ 的已知函数,令 $x_\alpha=x_\alpha(\tau)$ 是 C^2 类曲线,使得

$$\frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}\tau}=x'_\alpha \tag{2}$$

不同时为零,有

$$\dot{x}_\alpha=\frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}t}=\frac{x'_\alpha}{x'_1}. \tag{3}$$

假设系统在位形空间中的 Birkhoff 函数为 $B=B(t,a^\mu)$,Birkhoff 函数组为 $R_\nu=R_\nu(t,a^\mu)(\nu=1,\cdots,2n)$,则事件空间中的 Birkhoff 函数组 $B_\beta(x_\alpha)(\beta=1,\cdots,2n+1$ 为

$$\begin{aligned}B_1(x_\alpha)&=-B(x_1,x_2,\cdots,x_{2n+1}),\\ B_{\mu+1}(x_\alpha)&=R_\mu(x_1,x_2,\cdots,x_{2n+1}),\\ &(\mu=1,\cdots,2n).\end{aligned} \tag{4}$$

事件空间中 Birkhoff 系统的参数方程可表为

$$\left(\frac{\partial B_\beta}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial B_\alpha}{\partial x_\beta}\right)x'_\beta=0, (\alpha=1,\cdots,2n+1). \tag{5}$$

3. 事件空间中 Pfaff 作用量的变分

事件空间中 Pfaff 作用量可表为

$$A=\int_{\tau_1}^{\tau_2}B_\beta(x_\alpha)x'_\beta\mathrm{d}\tau. \tag{6}$$

引入参数 τ 和事件空间中坐标 x_α 的群的无限小

* 国家自然科学基金(批准号:10572021)资助的课题.

† E-mail:weidiezh@pub.sz.jsinfo.net

变换

$$\tau^* = \tau + \Delta\tau, x_\alpha^*(\tau^*) = x_\alpha(\tau) + \Delta x_\alpha,$$
$$(\alpha = 1, \cdots, 2n+1), \tag{7}$$

或其展开式

$$\tau^* = \tau + \varepsilon_\sigma \xi_0^\sigma(\tau, x_\beta),$$
$$x_\alpha^*(\tau^*) = x_\alpha(\tau) + \varepsilon_\sigma \xi_\alpha^\sigma(\tau, x_\beta),$$
$$(\alpha = 1, \cdots, 2n+1; \sigma = 1, \cdots, r), \tag{8}$$

其中 $\varepsilon_\sigma(\sigma = 1, \cdots, r)$ 为无限小参数，ξ_0^σ，ξ_α^σ 为无限小变换的生成函数.

作用量(6)的变分为

$$\Delta A = \delta A + A'\Delta\tau \tag{9}$$

以及

$$\Delta A = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\left\{\Delta[B_\beta(x_\alpha)x'_\beta] + B_\beta(x_\alpha)x'_\beta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\Delta\tau)\right\}\mathrm{d}\tau. \tag{10}$$

(9)式可表为

$$\Delta A = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(B_\beta x'_\beta\Delta\tau + B_\beta\delta x_\beta) + \left(\frac{\partial B_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial B_\alpha}{\partial x_\beta}\right)x'_\beta\delta x_\alpha\right]\mathrm{d}\tau. \tag{11}$$

这里已用到交换关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\delta x_\alpha = \delta x'_\alpha. \tag{12}$$

注意到

$$\delta x_\alpha = \varepsilon_\sigma(\xi_\alpha^\sigma - x'_\alpha\xi_0^\sigma) = \varepsilon_\sigma\bar{\xi}_\alpha^\sigma, \tag{13}$$

$$\left(\frac{\partial B_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial B_\alpha}{\partial x_\beta}\right)x'_\beta x'_\alpha = 0, \tag{14}$$

则(11)式可表为

$$\Delta A = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\varepsilon_\sigma\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(B_\beta\xi_\beta^\sigma) + \left(\frac{\partial B_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial B_\alpha}{\partial x_\beta}\right)x'_\beta\xi_\alpha^\sigma\right]\mathrm{d}\tau. \tag{15}$$

(10)式可表为

$$\Delta A = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\left\{B_\beta x'_\beta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\Delta\tau) + \frac{\partial B_\beta}{\partial x_\alpha}x'_\beta\Delta x_\alpha + B_\alpha\Delta x'_\alpha\right\}\mathrm{d}\tau. \tag{16}$$

(15)，(16)式为事件空间中 Pfaff 作用量变分的基本公式.

4. 事件空间中对称变换，准对称变换和广义准对称变换

首先，研究事件空间中 Birkhoff 系统的 Noether 对称变换.

定义 1 如果事件空间中 Pfaff 作用量是群的无限小变换下的不变量，即对每一个无限小变换，始终成立

$$\Delta A = 0, \tag{17}$$

则称无限小变换是 Noether 意义下的对称变换.

由定义 1 和(15)，(16)式，得到如下判据.

判据 1 对于事件空间中的 Birkhoff 系统(5)，如果无限小变换(7)满足条件

$$B_\beta x'_\beta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\Delta\tau) + \frac{\partial B_\beta}{\partial x_\alpha}x'_\beta\Delta x_\alpha + B_\alpha\Delta x'_\alpha = 0, \tag{18}$$

则变换(7)为系统的 Noether 对称变换.

判据 2 对于事件空间中的 Birkhoff 系统(5)，如果无限小变换(8)满足 r 个方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(B_\beta\xi_\beta^\sigma) + \left(\frac{\partial B_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial B_\alpha}{\partial x_\beta}\right)x'_\beta\xi_\alpha^\sigma = 0,$$
$$(\sigma = 1, \cdots, r), \tag{19}$$

则变换(8)为系统的 Noether 对称变换.

(18)式还可简化为 r 个方程

$$\frac{\partial B_\beta}{\partial x_\alpha}x'_\beta\xi_\alpha^\sigma + B_\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\xi_\alpha^\sigma = 0, (\sigma = 1, \cdots, r). \tag{20}$$

(20)式亦可作为系统 Noether 对称变换的判据. 当 $\sigma = 1$ 时，(20)式给出 Noether 等式

$$\frac{\partial B_\beta}{\partial x_\alpha}x'_\beta\xi_\alpha + B_\alpha\xi'_\alpha = 0. \tag{21}$$

利用判据 1 和判据 2 可以判断事件空间中 Birkhoff 函数组为 B_β 的系统的 Noether 对称性.

其次，研究事件空间中 Birkhoff 系统的 Noether 准对称变换.

定义 2 如果事件空间中 Pfaff 作用量是群的无限小变换下的准不变量，即对每一个无限小变换，始终成立

$$\Delta A = -\int_{\tau_1}^{\tau_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\Delta G)\mathrm{d}\tau, \tag{22}$$

其中 $G = G(\tau, x_\alpha)$，则称无限小变换是 Noether 意义下的准对称变换.

由定义 2 和(15)，(16)式，得到如下判据.

判据 3 对于事件空间中的 Birkhoff 系统(5)，如果无限小变换(7)满足条件

$$B_\beta x'_\beta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\Delta\tau) + \frac{\partial B_\beta}{\partial x_\alpha}x'_\beta\Delta x_\alpha + B_\alpha\Delta x'_\alpha = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\Delta G), \tag{23}$$

则变换(7)为系统的 Noether 准对称变换.

判据 4 对于事件空间中的 Birkhoff 系统(5)，如果无限小变换(8)满足 r 个方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(B_\beta\xi_\beta^\sigma) + \left(\frac{\partial B_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial B_\alpha}{\partial x_\beta}\right)x'_\beta\xi_\alpha^\sigma = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}G^\sigma,\quad (\sigma = 1,\cdots,r),\tag{24}$$

其中

$$\Delta G = \varepsilon_\sigma G^\sigma,\tag{25}$$

则变换(8)为系统的 Noether 准对称变换.

(23)式还可写成 r 个方程

$$\frac{\partial B_\beta}{\partial x_\alpha}x'_\beta\xi_\alpha^\sigma + B_\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\xi_\alpha^\sigma = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}G^\sigma,\tag{26}$$

(26)式亦可作为系统 Noether 准对称变换的判据.当 $\sigma = 1$ 时,(26)式给出 Noether 等式

$$\frac{\partial B_\beta}{\partial x_\alpha}x'_\beta\xi_\alpha + B_\alpha\xi'_\alpha = -G'.\tag{27}$$

利用判据 3 或判据 4 可以判断事件空间中 Birkhoff 函数组为 B_β 的系统的 Noether 准对称性.

最后,研究事件空间中 Birkhoff 系统的 Noether 广义准对称变换.

定义 3　如果事件空间中 Pfaff 作用量是群的无限小变换下的广义准不变量,即对每一个无限小变换(7),始终成立

$$\Delta A = -\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\Delta G) + \Lambda_\alpha\delta x_\alpha\right\}\mathrm{d}\tau,\tag{28}$$

其中 $\Lambda_\alpha = \Lambda_\alpha(x_\beta)$,则称变换(7)是 Noether 意义下的广义准对称变换.

由定义 3 和(15),(16)式得到如下判据.

判据 5　对于事件空间中的 Birkhoff 系统(5),如果无限小变换(7)满足条件

$$B_\beta x'_\beta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\Delta\tau) + \frac{\partial B_\beta}{\partial x_\alpha}x'_\beta\Delta x_\alpha + B_\alpha\Delta x'_\alpha + \Lambda_\alpha(\Delta x_\alpha - x'_\alpha\Delta\tau) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\Delta G),\tag{29}$$

则变换(7)为系统的 Noether 广义准对称变换.

判据 6　对于事件空间中的 Birkhoff 系统(5),如果无限小变换(8)满足 r 个方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(B_\beta\xi_\beta^\sigma) + \left(\frac{\partial B_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial B_\alpha}{\partial x_\beta}\right)x'_\beta\xi_\alpha^\sigma + \Lambda_\alpha(\xi_\alpha^\sigma - x'_\alpha\xi_0^\sigma) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}G^\sigma,\tag{30}$$

则变换(8)为系统的 Noether 广义准对称变换.

(29)式还可写成 r 个方程

$$\frac{\partial B_\beta}{\partial x_\alpha}x'_\beta\xi_\alpha^\sigma + B_\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\xi_\alpha^\sigma + \Lambda_\alpha(\xi_\alpha^\sigma - x'_\alpha\xi_0^\sigma) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}G^\sigma.\tag{31}$$

(31)式亦可作为系统 Noether 广义准对称变换的判据.当 $\sigma = 1$ 时,(31)式给出 Noether 等式

$$\frac{\partial B_\beta}{\partial x_\alpha}x'_\beta\xi_\alpha + B_\alpha\xi'_\alpha + \Lambda_\alpha(\xi_\alpha - x'_\alpha\xi_0) = -G'.\tag{32}$$

利用判据 5 或判据 6 可以判断事件空间中 Birkhoff 函数组为 B_β,附加项为 Λ_β 的系统的 Noether 广义准对称性.

5. 事件空间中 Birkhoff 系统的 Noether 定理

定理 1　对于事件空间中的 Birkhoff 系统(5),如果无限小变换(8)是系统的 Noether 对称变换,则系统存在 r 个线性独立的 Noether 守恒量,形如

$$I^\sigma = B_\beta\xi_\beta^\sigma = c_\sigma,(\sigma = 1,\cdots,r).\tag{33}$$

证明　因无限小变换(8)是系统的 Noether 对称变换,故按定义 1 有

$$\Delta A = 0,$$

将(15)式代入上式,得

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2}\varepsilon_\sigma\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(B_\beta\xi_\beta^\sigma) + \left(\frac{\partial B_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial B_\alpha}{\partial x_\beta}\right)x'_\beta\xi_\alpha^\sigma\right\}\mathrm{d}\tau = 0.$$

将方程(5)代入上式,由 ε_σ 的独立性和积分区间 $[\tau_1,\tau_2]$ 的任意性,得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(B_\beta\xi_\beta^\sigma) = 0,$$

积分之,便得(33)式.证毕.

定理 2　对于事件空间中的 Birkhoff 系统(5),如果无限小变换(8)是系统的 Noether 准对称变换,则系统存在 r 个线性独立的 Noether 守恒量,形如

$$I^\sigma = B_\beta\xi_\beta^\sigma + G^\sigma = c_\sigma,(\sigma = 1,\cdots,r).\tag{34}$$

在参数方程(5)的右端添加一项 $-\Lambda_\alpha(x_\beta)$,得到

$$\left(\frac{\partial B_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial B_\alpha}{\partial x_\beta}\right)x'_\beta = -\Lambda_\alpha,\quad (\alpha = 1,\cdots,2n+1).\tag{35}$$

称方程(35)为事件空间中的广义 Birkhoff 方程.

定理 3　对于事件空间中的广义 Birkhoff 系统(35),如果无限小变换(8)是系统的 Noether 广义准对称变换,则系统存在 r 个线性独立的 Noether 守恒量,形如(34)式.

定理 1—定理 3 称为事件空间中 Birkhoff 系统的 Noether 定理.利用这些定理可由已知 Noether 对称性找到系统的 Noether 守恒量.

6. 事件空间中 Birkhoff 系统的 Noether 逆定理

假设事件空间中 Birkhoff 系统(5)有 r 个线性独立的守恒量

$$I^\sigma = I^\sigma(\tau, x_\alpha) = c_\sigma, (\sigma = 1, \cdots, r), \tag{36}$$

求相应的 Noether 对称变换. 由(36)式知

$$\frac{\mathrm{d}I^\sigma}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\partial I^\sigma}{\partial \tau} + \frac{\partial I^\sigma}{\partial x_\alpha} x'_\alpha = 0. \tag{37}$$

将方程(5)两端同时乘以 $\bar{\xi}^\sigma_\alpha$ 并对 α 求和,再将结果与上式相加,得

$$\frac{\partial I^\sigma}{\partial \tau} + \frac{\partial I^\sigma}{\partial x_\alpha} x'_\alpha + \left(\frac{\partial B_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial B_\alpha}{\partial x_\beta}\right) x'_\beta \bar{\xi}^\sigma_\alpha = 0, \tag{38}$$

(38)式中含 $x'_\alpha x'_\beta$ 的项显然为零. 由(38)式中 x'_β 的系数为零,得到

$$\frac{\partial I^\sigma}{\partial x_\beta} + \left(\frac{\partial B_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial B_\alpha}{\partial x_\beta}\right) \xi^\sigma_\alpha = 0,$$
$$(\beta - 1, \cdots, 2n + 1). \tag{39}$$

令守恒量(36)等于守恒量(33),即

$$B_\beta \xi^\sigma_\beta = I^\sigma, \tag{40}$$

这样,由方程(39),(40)在已知规范函数 G^σ 下可以求得 Noether 对称变换的生成函数 ξ^σ_α. 于是有

定理 4 如果已知事件空间中 Birkhoff 系统(5)的 r 个线性独立的守恒量(36),那么由(39),(40)式所确定的无限小变换是系统的 Noether 对称变换.

为使变换为 Noether 准对称变换,需令守恒量(36)等于守恒量(34),即

$$B_\beta \xi^\sigma_\beta + G^\sigma = I^\sigma, \tag{41}$$

于是有

定理 5 如果已知事件空间中 Birkhoff 系统(5)的 r 个线性独立的守恒量(36),那么由(39),(41)式所确定的无限小变换是系统的 Noether 准对称变换.

对于广义 Birkhoff 系统(35),(39)式需要下式替代:

$$\frac{\partial I^\sigma}{\partial x_\beta} + \left(\frac{\partial B_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial B_\alpha}{\partial x_\beta}\right) \xi^\sigma_\alpha - \Lambda_\beta \xi^\sigma_0 = 0,$$
$$(\beta = 1, \cdots, 2n + 1), \tag{42}$$

于是有

定理 6 如果已知事件空间中的广义 Birkhoff 系统(35)的 r 个线性独立的守恒量(36),那么由(42),(41)式所确定的无限小变换是系统的 Noether 广义准对称变换.

定理 4—定理 6 是事件空间中 Birkhoff 系统的 Noether 逆定理. 利用这些定理可由系统的已知守恒量求出与其相应的 Noether 对称性.

7. 算 例

例 4 阶 Birkhoff 系统为

$$B = a^2 + \frac{1}{2}[(a^3)^2 + (a^4)^2],$$
$$R_1 = a^3, R_2 = a^4, R_3 = R_4 = 0, \tag{43}$$

试研究系统在事件空间中的 Noether 对称性与 Noether 守恒量.

首先,应用本文给出的 Noether 定理由事件空间中的已知 Noether 对称性求 Noether 守恒量. 第一步,建立事件空间中的运动方程. (4)式给出

$$B_1 = -x_3 - \frac{1}{2}(x_4^2 + x_5^2),$$
$$B_2 = x_4, B_3 = x_5, B_4 = B_5 = 0. \tag{44}$$

方程(5)给出

$$x'_3 + x_4 x'_4 + x_5 x'_5 = 0, \; -x'_4 = 0,$$
$$-x'_1 - x'_5 = 0, \; -x_4 x'_1 + x'_2 = 0,$$
$$-x_5 x'_1 + x'_3 = 0. \tag{45}$$

第二步,求系统的 Noether 准对称变换. Noether 等式(27)给出

$$-x'_1 \xi_3 + (x'_2 - x_4 x'_1)\xi_4 + (x'_3 - x_5 x'_1)\xi_5$$
$$- \left[x_3 + \frac{1}{2}(x_4^2 + x_5^2)\right]\xi'_1 + x_4 \xi'_2 + x_5 \xi'_3 = -G'. \tag{46}$$

方程(46)有如下解:

$$\xi^1_1 = -1, \xi^1_2 = \xi^1_3 = \xi^1_4 = \xi^1_5 = 0, G^1 = 0, \tag{47}$$

$$\xi^2_1 = 0, \xi^2_2 = 1, \xi^2_3 = \xi^2_4 = \xi^2_5 = 0, G^2 = 0, \tag{48}$$

$$\xi^3_1 = 0, \xi^3_2 = x_1, \xi^3_3 = x_1, \xi^3_4 = 1,$$
$$\xi^3_5 = 1, G^3 = \frac{1}{2}x_1^2 - x_2 - x_3. \tag{49}$$

这里对 ξ_0 没有限制. 生成函数(47),(48)相应于系统的 Noether 对称变换,生成函数(49)相应于系统的 Noether 准对称变换. 第三步,利用 Noether 定理求 Noether 守恒量. 对生成函数和规范函数(47)—(49),由定理 1 和定理 2 得到系统的 Noether 守恒量

$$I^1 = x_3 + \frac{1}{2}(x_4^2 + x_5^2) = c_1, \tag{50}$$

$$I^2 = x_4 = c_2, \tag{51}$$

$$I^3 = x_1 x_4 + x_1 x_5 + \frac{1}{2}x_1^2 - x_2 - x_3 = c_3. \tag{52}$$

其次，应用本文给出的 Noether 逆定理，由已知守恒量求相应的 Noether 准对称变换. 假设系统有守恒量(52)，此时(39)，(41)式给出

$$\begin{aligned}&x_4+x_5+x_1-\xi_3-x_4\xi_4-x_5\xi_5=0,\\&-1+\xi_4=0,\\&-1+\xi_1+\xi_5=0,\\&x_1+x_4\xi_1-\xi_2=0,\\&x_1+x_5\xi_1-\xi_3=0,\end{aligned}\tag{53}$$

$$-\left[x_3+\frac{1}{2}(x_4^2+x_5^2)\right]\xi_1+x_4\xi_2+x_5\xi_3+G=x_1x_4+x_1x_5+\frac{1}{2}x_1^2-x_2-x_3.\tag{54}$$

方程(53)的系数行列式为零，因此方程(53)中的五个方程不是彼此独立的. 若取 $\xi_1=0$，则有

$$\xi_1=0,\xi_2=x_1,\xi_3=x_1,\xi_4=1,\xi_5=1,$$

$$G=\frac{1}{2}x_1^2-x_2-x_3,\tag{55}$$

取 $\xi_1=1$，则有

$$\xi_1=1,\xi_2=x_1+x_4,\xi_3=x_1+x_5,\xi_4=1,$$

$$\xi_5=0,G=\frac{1}{2}x_1^2-x_2-\frac{1}{2}(x_4^2+x_5^2).\tag{56}$$

生成函数(55)，(56)都是相应于守恒量(52)的 Noether 准对称变换. 这也表明，同一守恒量可以对应不同的 Noether 对称性.

[1] Noether A E 1918 *Nachr kgl Ges Wiss Göttingen. Math. Phys.* **KI II** 235

[2] Djukić Dj S，Vujanović B 1975 *Acta Mech.* **23** 17

[3] Li Z P 1981 *Acta Phys. Sin.* **30** 1659(in Chinese)[李子平 1981 物理学报 **30** 1659]

[4] Li Z P 1981 *Acta Phys. Sin.* **30** 1699(in Chinese)[李子平 1981 物理学报 **30** 1699]

[5] Li Z P 1993 *Classical and Quantal Dynamics of Constrained Systems and Their Symmetrical Properties* (Beijing: Beijing Polytechnic University Press) p1 (in Chinese)[李子平 1993 经典和量子约束系统及其对称性质(北京 北京工业大学出版社)第 1 页]

[6] Bahar L Y，Kwatny H G 1987 *Int. J Non-Linear Mech.* **22** 125

[7] Mei F X 1993 *Sci. China* (Series A) **36** 709

[8] Vujanovic B 1986 *Acta Mech.* **65** 63

[9] Zhang J F 1989 *Chin. Sci. Bull.* **34** 1756

[10] Liu D 1991 *Sci. China* (Series A) **34** 419

[11] Luo S K 1991 *Chin. Sci. Bull.* **36** 1930

[12] Mei F X，Liu D，Luo Y 1991 *Advanced Analytical Mechanics* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) p483 (in Chinese) [梅凤翔、刘　端、罗　勇 1991 高等分析力学(北京 北京理工大学出版社)第 483 页]

[13] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) p90 (in Chinese)[梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用(北京 科学出版社)第 90 页]

[14] Zhao Y Y，Mei F X 1999 *Symmetries and Invariants of Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) p1 (in Chinese)[赵跃宇、梅凤翔 1999 力学系统的对称性与守恒量(北京 科学出版社)第 1 页]

[15] Zhang R C，Chen X W，Mei F X 2000 *Chin. Phys.* **9** 801

[16] Ge W K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1156(in Chinese)[葛伟宽 2002 物理学报 **51** 1156]

[17] Zhang Y，Mei F X 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 661(in Chinese)[张 毅、梅凤翔 2004 物理学报 **53** 661]

[18] Luo S K，Guo Y X，Mei F X 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1271(in Chinese)[罗绍凯、郭永新、梅凤翔 2004 物理学报 **53** 1271]

[19] Zhang Y，Mei F X 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2419(in Chinese)[张 毅、梅凤翔 2004 物理学报 **53** 2419]

[20] Wu H B，Mei F X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3825(in Chinese)[吴惠彬、梅凤翔 2006 物理学报 **55** 3825]

[21] Shang M，Chen X W 2006 *Chin. Phys.* **15** 2788

Noether's theory for Birkhoffian systems in the event space*

Zhang Yi†

(*College of Civil Engineering, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou 215011, China*)

(Received 11 October 2007; revised manuscript received 28 October 2007)

Abstract

In this paper, the Noether symmetries and the Noether conserved quantities for Birkhoffian systems in the event space is studied. Firstly, the parametric equations for the Birkhoffian systems are established; secondly, the Noether's theorem and its inverse theorem for the systems are given, which are based upon the invariant properties of the Pfaffian action with respect to the action of the infinitesimal transformation; and finally, an examples is given to illustrate the application of the results.

Keywords: event space, Birkhoffian system, Pfaffian action, Noether symmetry

PACC: 0320

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10572021).

† E-mail: weidiezh@pub.sz.jsinfo.net