

# 一种基于周期轨道统计的混沌信号 不可预测性强弱的检测方法<sup>\*</sup>

晋建秀<sup>†</sup> 丘水生 谢丽英 冯明库

(华南理工大学电子与信息学院, 广州 510640)

(2007 年 7 月 26 日收到, 2007 年 9 月 18 日收到修改稿)

论述了对混沌信号不可预测程度进行检测的基本原理,在此基础上提出了一种对混沌信号不可预测性强弱进行检测的方法.分别对硬件电路和数值仿真产生的混沌时间序列的周期轨道进行了统计分析,寻找热鞍周期轨道(SPO)并对其回归谱和回归频度等特性进行了研究.实验结果表明了该方法用于检测混沌信号不可预测性强弱的有效性.

关键词:不可预测性,检测,回归,混沌

PACC: 0545

## 1. 引 言

20 世纪 90 年代以来,混沌理论及其应用研究获得了空前的发展.混沌信号产生<sup>[1]</sup>、混沌机理<sup>[2,3]</sup>及其混沌同步、控制<sup>[4,5]</sup>等各个方面的研究成果为混沌早日走向实用系统奠定了坚实的基础.在国外,基于混沌的光纤通信系统已经走向商业化<sup>[6]</sup>.混沌系统在通信领域的应用都是基于其初值敏感性、长期不可预测性及宽谱特性等特点<sup>[7]</sup>.因此,凡涉及混沌通信的文献都会提到混沌运动的长期不可预测性,其中有少数文献简要指出了不可预测信号的产生<sup>[8,9]</sup>,但鲜见对不可预测性的具体论述,更没有有关混沌系统不可预测程度检测的文献.文献[10,11]中对混沌运动的不可预测性进行了专门论述,并从理论上指出了不可预测性检测的探索方向.根据其基本思想,基于文献[12,13]中的混沌吸引子细胞模型及其周期轨道理论,本文提出了采用回归谱及其回归频度分析来检测混沌信号不可预测程度的方法.该方法对混沌系统的工程实际应用具有重要的理论意义和参考价值.

## 2. 关于不可预测性

混沌系统的不可预测性,简言之是指过去和未来没有什么关系的性质,在许多文献中都有明确的叙述.文献[14]中指出“由于小的不确定性被放大,导致系统行为短期可以预测,但长期不可以预测”;“混沌吸引子局部地起着噪声放大器的作用”;并且“外部随机因素的作用是系统随机行为的来源”.文献[15]中对随机(random)和混沌(chaos)进行了比较研究,指出“数学上的随机是指无法用公式或算法根据以前的结果写出下一个数,混沌动力系统是产生随机数的最实际的方法.文献[8]中指出:真正随机的序列是不可预测和不可再生的,这样的序列只能由物理过程产生.所有这些说法在文献[10]中得到了总结和进一步的分析:

1)由于算法混沌也具有类随机性,混沌的不可预测性是比类随机性更重要的特性;

2)由硬件电路组成的物理系统产生的连续混沌信号是不可预测的;

3)硬件电路产生的混沌信号不可预测的原因在于随机扰动(比如噪声效应)的存在,使系统具有初值的复杂性,而数值仿真混沌系统丧失了初值复杂

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号:60372004)、广东省自然科学基金(批准号:06025729)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: jxjin@scut.edu.cn

性,必然输出可预测序列;

4)混沌系统测量误差的有限精度效应与算法仿真产生的伪混沌具有本质的不同.

### 3. 混沌吸引子可预测性强弱程度的检测方法

#### 3.1. 混沌预测的基本概念

产生混沌吸引子的数学方程称为混沌系统.由一个混沌系统产生的混沌吸引子可分为算法混沌和物理混沌两类.利用没有随机扰动的数值计算装置(例如计算机)所产生的混沌吸引子属于算法混沌,而利用具有随机扰动的物理实现装置(例如模拟电路)所产生的混沌吸引子属于物理混沌.由于随机扰动的存在而初始条件随时改变,物理混沌吸引子是不可预测的(即时域不可预测的).但是,其周期轨道的回归特性是可以利用统计预测来表征的.因此,可以把物理混沌的这种统计特性称为统计可预测性.容易理解,在进行比较时,如果一个物理混沌的统计可预测性较强,则其不可预测性较弱.另一方面,对于算法混沌来说,由于没有随机扰动,其轨道完全确定于初值,因而是可预测的;自然,也具有统计可预测性.综上所述,物理混沌的预测性具有时域不可预测性和统计可预测性两个方面(两面性),而两者是统一的.另外,利用混沌的统计可预测性,既可以比较两个物理混沌或两个算法混沌,也可以比较一个物理混沌和一个算法混沌.

因此,一种有效的统计可预测性(程度)检测方法可以用来检测物理混沌系统不可预测性或算法混沌可预测性的强弱.注意到,文中的“混沌”是指上述两类混沌中的任一类(其具体含义由上下文确定).

混沌的统计可预测性特性应该同时包含混沌吸引子的确定性和不可预测性的基本信息.根据文献[10]的理论,混沌吸引子的周期轨道的分层结构包含了吸引子的主要确定性性质,而热周期轨道组合则大致地表现了吸引子结构的基本特征(热周期轨道在本文中是指回归频度较高的周期轨道).至于不可预测性的表示,则应与不可预测性定义[11]相一致.根据这些概念,本文提出的统计可预测性检测方法包括混沌吸引子热周期轨道的直方图(或一组数据列表)和一组热周期轨道回归谱(重现谱).后者是

根据热周期轨道的回归性质[16]和不可预测性定义[11]来构造的.混沌系统热周期轨道的回归频度越高,或者这种回归频度一定时,周期轨道回归谱越窄、越不均匀,则该混沌吸引子的统计可预测性就越强,即是可预测性较强或不可预测性较弱(后者指比较两个不可预测混沌信号的情况).

#### 3.2. 周期轨道回归谱

周期轨道回归谱即是周期轨道重现谱,它表示混沌信号相图的周期轨道重现的频度.

第  $i$  个 SPO 回归谱的示意图如图 1 所示.

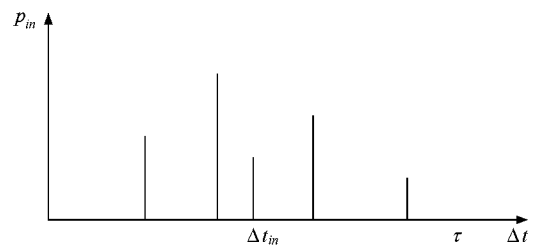


图 1 第  $i$  个 SPO 回归谱示意图

图中,第  $i$  个 SPO 的第  $n$  条重现谱线表示的意义为:在统计时间  $\tau$  内,第  $i$  个周期轨道在经过时间间隔  $\Delta t_{in}$  后重现的频度(回归频度)为  $p'_{in}$ .这一测度定义为该 SPO 经过  $\Delta t_{in}$  后重现的次数对于统计时间  $\tau$  内所有 SPO 重现总次数的比率.为了方便,在实际应用中采用归一化回归谱

$$p_{in} = p'_{in} / p'_{in(\max)}, \quad (1)$$

式中,  $p'_{in(\max)}$  为一组  $p'_{in}$  的最大值.注意到,  $p'_{in(\max)}$  对于不同的 SPO 具有相同的取值(相关统计是对所有 SPO 进行的).注意到,对  $n$  个不同的混沌吸引子进行比较时,  $p'_{in(\max)}$  取值也是唯一的.作为回归谱的重要参数,单个 SPO 回归频度反映了周期轨道的回归程度.定义  $p'_i = \sum p'_{in}$ .  $p'_i$  值越大, SPO 回归频度越高,则统计可预测程度越强.一个混沌吸引子的热 SPO 回归频度则定义为  $p' = \sum p'_i$ .

当某一个周期轨道的重现时间间隔  $\Delta t_{in}$  等于其周期  $T_i$  时,意味着这一周期轨道是稳定的周期轨道.此时,应增加多个时段进行统计并画出多统计时段回归谱,如图 2 所示.由图 2 可见,周期信号相应于一个等间隔的均匀谱线图.

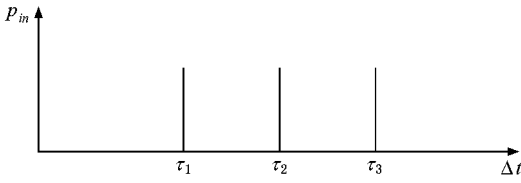


图 2 稳定周期轨道回归谱示意图

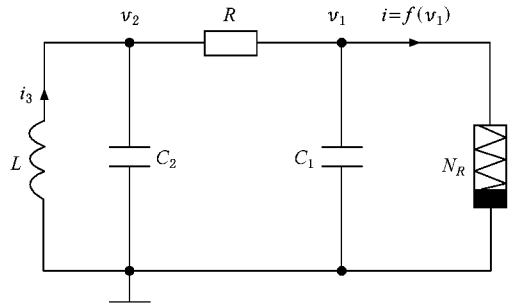


图 3 蔡氏电路

## 4. 实 验

根据上述原理和方法,我们对 Chua 混沌系统进行了实验分析,对物理 Chua 系统和算法 Chua 系统的统计可预测性进行了比较研究.两类信号比较的前提条件是:硬件 Chua 电路元件参数值确定数值仿真 Chua 系统方程的参数,并且数值仿真中的步长由示波器对电路数据采集的采样频率确定.对这样所得两类序列进行统计分析,标准一致,结论可信.实验内容包括软、硬件 Chua 系统时间序列的产生、采集和处理.

### 4.1. 物理混沌系统

图 3 所示为 Chua 系统的基本电路.

由图 3 可得蔡氏电路的动力学方程为

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dt} &= \frac{v_2 - v_1}{RC_1} - \frac{f(v_1)}{C_1}, \\ \frac{dv_2}{dt} &= \frac{v_1 - v_2}{RC_2} + \frac{i_3}{C_2}, \\ \frac{di_3}{dt} &= \frac{-v_2}{L}, \end{aligned} \quad (2)$$

其中非线性电阻  $N_R$  的特性为

$$f(v_1) = G_b v_1 + 0.5(G_a - G_b)$$

$$\times (|v_1 + E| - |v_1 - E|), \quad (3)$$

分段线性转折点电压  $E$  及斜率  $G_a, G_b$  与元件参数关系可表示为

$$\begin{aligned} E &= \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}, \\ G_a &= \frac{-1}{R_1} - \frac{1}{R_4}, \\ G_b &= \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4}, \end{aligned} \quad (4)$$

式中  $V_{sat}$  为运放的输出饱和电压.

电感  $L$  采用里奥登模拟电感,蔡氏二极管  $N_R$  的实现参考文献 [17],硬件实现电路及其参数选择如图 4 所示.采用 TDS5104B 示波器对硬件电路数据进行采集.

### 4.2. 算法混沌系统

令  $x = \frac{v_1}{E}, y = \frac{v_2}{E}, z = \frac{i_3 R}{E}, \tau = \frac{t}{RC_2}, \alpha = \frac{C_2}{C_1}, \beta = \frac{R^2 C_2}{L}, m_0 = RG_a, m_1 = RG_b$ ,对电路方程(2)进行归一化处理,原方程变为

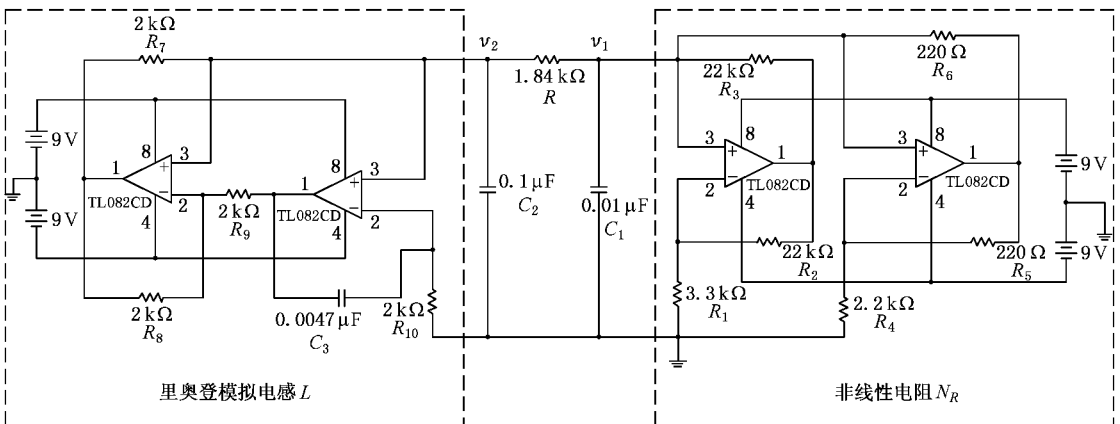


图 4 Chua 系统电路图

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \alpha(-x + y - g(x)), \\ \frac{dy}{d\tau} &= x - y + z, \\ \frac{dz}{d\tau} &= -\beta y, \end{aligned} \quad (5)$$

其中

$$g(x) = m_1 x + 0.5(m_0 - m_1) \times (|x + 1| - |x - 1|). \quad (6)$$

根据硬件电路中元件参数值计算得

$\alpha = 10, \beta \approx 18.0085, G_a \approx -0.76\text{ms}, G_b \approx -0.41\text{ms}, m_0 \approx -1.3984, m_1 \approx -0.7527$ , 仿真步长  $\Delta t$  根据示波器数据采样率 500 kHz 经过归一化计算得  $\Delta t = 0.0109 \text{ s}$ .

### 4.3. 实验结论

#### 4.3.1. 回归谱分析

本实验中分别对 Chua 系统数值仿真和模拟电路两类混沌系统随机选取(或采样)10 组数据,每组包含 10 万个序列,即 10 万个信号瞬时值(每一计算

步长或采样间隔相应一个值).热 SPO 的确定和周期轨道的统计分类方法参考文献 [18].在本文中热 SPO 的选定标准为:热 SPO 包括了  $p'_i/p'_{\kappa_{\max}} > m$  的所有 SPO.此式中  $p'_{\kappa_{\max}}$  为  $p'_i$  的最大值,而  $m$  为给定值(例如  $m = 0.1$ ).本实验中选取  $m = 0.5$ .本实例的回归谱分析以最热 SPO 为例.经统计确定数值仿真系统中最热 SPO 为(4+4)周期轨道,模拟电路系统中则为(3+3)轨道.以  $\Delta t/T$  为横轴(即统计所得时间间隔对系统基频周期  $T$  进行归一化处理,回归谱图中记为  $\text{det}(t)$ ),  $p_{in}$  为纵轴,即得最热 SPO 的回归谱.

分别随机选取 4 组数据用于说明实际回归谱的具体意义. Chua 算法系统 4 组数据分别记为 a, b, c 和 d,见表 1. Chua 模拟电路系统 4 组数据见表 2. 表 1 中 a 组数据表明 10 万个序列中(4+4)轨道 14 次回归,故有 13 个归一化时间间隔  $\Delta t/T$ ,分别为 8, 31, 8, 109, 20, 16, 31, 8, 8, 16, 158, 44, 46, \* 表示无数据.回归谱图分别如图 5、图 6 所示.

表 1 Chua 算法系统(4+4)SPO 回归时间

组别	$\Delta t/T$															
a	8	31	8	109	20	16	31	8	8	16	158	44	46	*	*	*
b	51	8	95	23	56	8	33	49	20	32	8	14	8	26	8	*
c	8	9	40	8	29	72	97	13	71	110	8	8	*	*	*	*
d	29	26	71	9	8	11	8	9	111	22	56	12	11	55	31	45

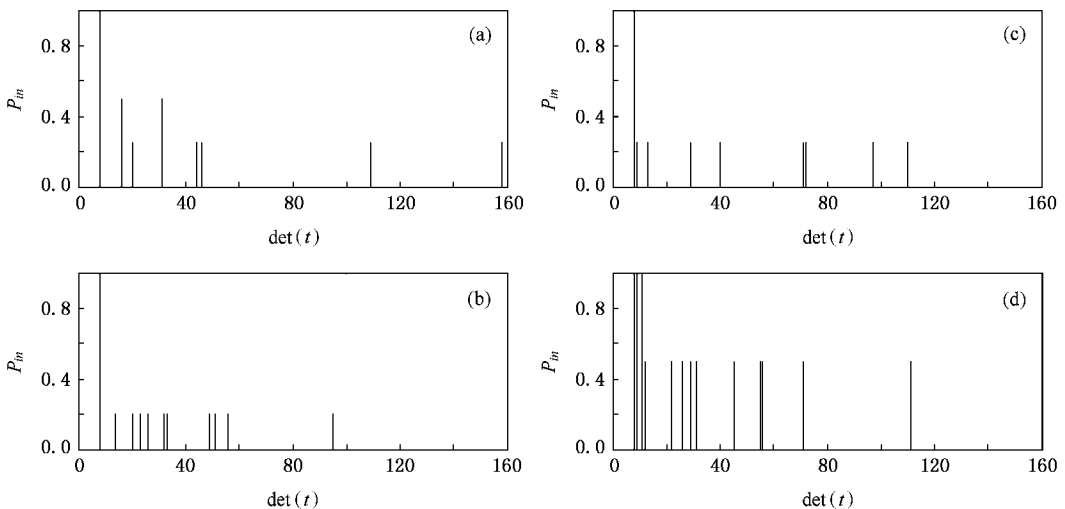


图 5 Chua 算法系统(4+4)SPO 回归谱

表 2 Chua 模拟电路系统(3+3)SPO 回归时间

组别	$\Delta t/T$															
A	45	107	20	32	90	50	28	32	22	61	*	*	*	*	*	*
B	11	6	21	84	70	19	53	47	42	15	*	*	*	*	*	*
C	11	46	15	137	63	33	6	6	14	8	124	9	*	*	*	*
D	6	31	68	16	30	40	9	30	111	23	45	79	15	6	*	*

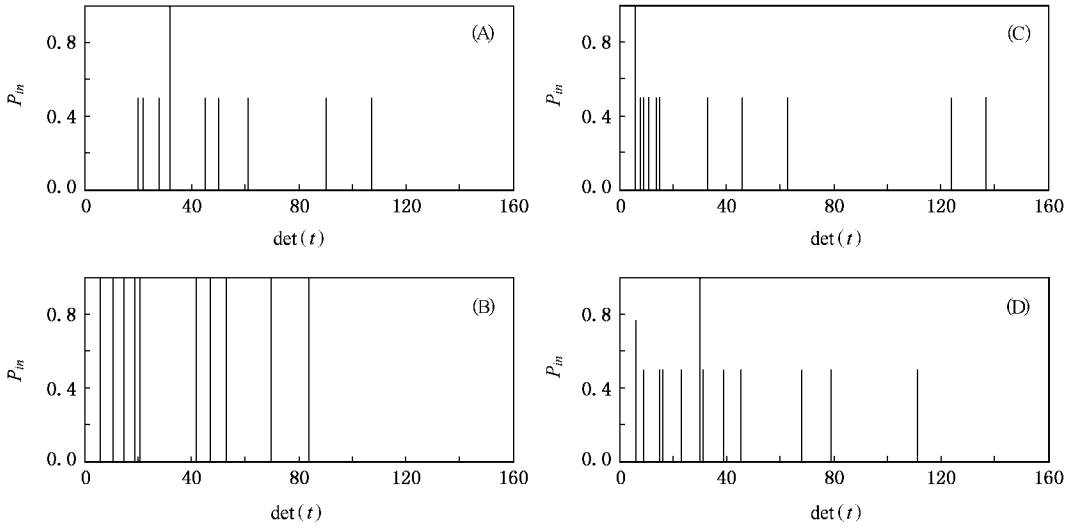


图 6 Chua 模拟电路系统(3+3)SPO 回归谱

比较两类信号的回归谱图,可以看出数值仿真混沌系统其谱线不均匀程度远远大于模拟电路混沌系统.在图 5 中, a 组  $p_{in(\min)}$  为 0.25,从其他各谱线  $p_{in}$  值可以确定(4+4)SPO 轨道以(8,16,31)的时间间隔分别(4,2,2)次回归. b 组、c 组中此 SPO 回归次数则分别为 5 和 4; d 组的回归则主要集中在  $\Delta t/T$  为(8—11)附近,而图 6 中,等间隔回归频度远远低于图 5 中各组,甚至 B 组中其等间隔回归频度为 0.

4.3.2. 回归频度分析

单个 SPO 回归频度  $p'_i$  仍以最热 SPO 为例具体说明,从左到右分别为 10 组数据的统计结果,见表 3.

表 3 单个 SPO 回归频度

系统	$p'_i/1\%$									
算法混沌	26.4	31.4	26	34	30	31.4	30.6	25.5	25	32
物理混沌	10.9	21.1	12.9	12.5	16.1	15.8	11.5	11.3	14.8	17.9

整个混沌吸引子的热 SPO 总回归频度  $p'$  见表 4,从左到右分别为 10 组数据的统计结果.

表 4 吸引子热 SPO 总回归频度

系统	$p'/1\%$									
算法混沌	79.2	74.5	80	56	74	68.6	75.5	80.4	73.1	90
物理混沌	28.3	21.1	34.1	39.8	38.3	15.8	30.2	23.7	30.7	38.1

从表 3、表 4 可以看出,不论单个 SPO 的回归频度还是整个吸引子的热 SPO 总回归频度,算法混沌系统的都远大于物理混沌系统的,说明算法混沌系统的统计可预测性明显较强,而物理混沌系统的则较弱.

为了更为直观,将表 4 统计结果画成直方图,见图 7.横轴代表所统计的 10 组数据,纵轴为总回归频度.

另外,统计中还发现两类混沌系统在相同统计时间  $\tau$  内,SPO 类型数有很大差异.10 组数据的 SPO 类型数统计见表 5.

表 5 SPO 类型数

系统	SPO 类型数									
算法混沌	14	11	6	12	8	14	9	12	18	9
物理混沌	28	26	31	26	23	29	26	25	28	28

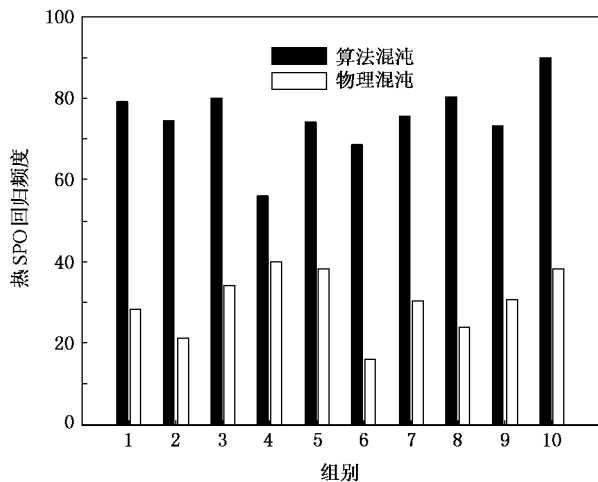


图7 热 SPO 总回归频度比较直方图

从上述统计分析中得出两个结论：

1. 不论算法混沌还是物理混沌系统,其热 SPO 都存在周期性的回归,但对于物理混沌系统其回归的频度远小于算法混沌,且规律性(定时回归)远远弱于算法混沌,说明了物理混沌系统的统计可预测

性较弱.

2. 物理混沌系统信号在众多类型轨道间随机跳跃,而算法混沌信号则集中在较少数几种轨道中运动,这是物理混沌信号统计可预测性较弱而算法混沌信号的较强的原因.

## 5. 结 论

提出了一种对于混沌信号不可预测性强弱进行检测的方法.该方法基于混沌吸引子细胞模型及其周期轨道理论.利用混沌的统计可预测性,既可以比较两个物理混沌或两个算法混沌,也可以比较一个物理混沌和一个算法混沌.本文中的实验对一个物理混沌和一个算法混沌进行了比较研究,通过热 SPO 回归谱及其回归频度等相关分析,说明硬件电路产生的混沌信号统计可预测性较弱,从而实践上证实了真混沌信号统计可预测性弱于伪混沌信号的理论.另外,本文方法具有计算量较小、容易编程和直观性强等优点,是一种适用于混沌信号不可预测程度检测的较简便的方法.

- [ 1 ] Wang F Z , Qi G Y , Chen Z Q et al 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4005 ( in Chinese ) [ 王繁珍、齐国元、陈增强等 2006 物理学报 **55** 4005 ]
- [ 2 ] Gong Z Q , Feng G L , Dong W J et al 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3180 ( in Chinese ) [ 龚志强、封国林、董文杰等 2006 物理学报 **55** 3180 ]
- [ 3 ] Yu J J , Cao H F , Xu H B et al 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 29 ( in Chinese ) [ 于津江、曹鹤飞、许海波等 2006 物理学报 **55** 29 ]
- [ 4 ] Jin H Y , Xi H S 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 2488 ( in Chinese ) [ 金辉宇、奚宏生 2007 物理学报 **56** 2488 ]
- [ 5 ] Chen J , Zhang T P , Lv L X 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 686 ( in Chinese ) [ 陈 晶、张天平、闫立新 2007 物理学报 **56** 686 ]
- [ 6 ] Argyris A , Syvridis D , Larger L et al 2005 *Nature* **437** 343
- [ 7 ] Xie K , Lei M , Feng Z J 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1267 ( in Chinese ) [ 谢 鲲、雷 敏、冯正进 2005 物理学报 **54** 1267 ]
- [ 8 ] Phatak S C , Suresh Rao S 1995 *Physical Review E* **51** 3670
- [ 9 ] O 'Donnell C W , Edward Suh G , Devadas S 2004 *MIT CSAIL CSG Technical Memo* 481
- [ 10 ] Qiu S S , Chen Y F , Wu M et al 2002 *J. of South China Univer. of*

*Tech. ( Natural Science Edition )* **30** 75 ( in Chinese ) [ 丘水生、陈艳峰、吴敏等 2002 华南理工大学学报(自然科学版) **30** 75 ]

- [ 11 ] Qiu S S , Chen Y F , Wu M et al 2006 *J. of Circuits and Systems* **11** 98 ( in Chinese ) [ 丘水生、陈艳峰、吴敏等 2006 电路与系统学报 **11** 98 ]
- [ 12 ] Qiu S S 2000 *J. of South China Univer. of Tech. ( Natural Science Edition )* **28** 18
- [ 13 ] Qiu S S 2001 *J. of South China Univer. of Tech. ( Natural Science Edition )* **29** 1
- [ 14 ] Crutchfield J P , Doynne Farmer J , Packard N H et al 1986 *Chaos. Sci. Amer.* **255** 46
- [ 15 ] Brown R , Chua L O 1996 *Int. J. Bifurcation Chaos* **6** 219
- [ 16 ] Shil 'nikov L P 1994 *Int. J. Bifur. Chaos* **4** 489
- [ 17 ] Kennedy M P 1993 *IEEE Trans. Circuits & Systems- I : Fundamental Theory and Applications* **40** 657
- [ 18 ] Qiu S S , Lan J F , Peng W et al 2000 *J. of South China Univer. of Tech. ( Natural Science Edition )* **28** 6 ( in Chinese ) [ 丘水生、蓝俊锋、彭巍等 2000 华南理工大学学报(自然科学版) **28** 6 ]



# A method of detecting the unpredictability of chaotic signals based on periodic orbit statistics<sup>\*</sup>

Jin Jian-Xiu<sup>†</sup> Qiu Shui-Sheng Xie Li-Ying Feng Ming-Ku

( School of Electronic and Information , South China University of Technology , Guangzhou 510640 , China )

( Received 26 July 2007 ; revised manuscript received 18 September 2007 )

## Abstract

A method of detecting the unpredictability of chaotic signals is put forward based on periodic orbit statistics. Chaotic time sequences come from analog circuit and numerical simulation respectively. Hot saddle periodic orbits are found and its regression spectrum and regression frequency are investigated. The results show that the method is adequate for detecting the unpredictability of chaotic systems.

**Keywords** : unpredictability , detection , regression , chaos

**PACC** : 0545

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 60372004 ) and the Natural Science Foundation of Guangdong Province , China ( Grant No. 06025729 ).

<sup>†</sup> E-mail : jxjin@scut.edu.cn