

广义混沌同步中的多稳定同步流形^{*}

俞 翔[†] 朱石坚 刘树勇

(海军工程大学振动噪声研究所, 武汉 430033)

(2007 年 8 月 11 日收到, 2007 年 10 月 18 日收到修改稿)

从构造驱动系统和响应系统之间的函数关系出发, 一般性地研究了广义混沌同步中同步流形的多值性问题, 并对同步流形的稳定性进行了分析, 提出了多稳定同步流形存在的条件. 利用该稳定性条件对两个实例进行了分析, 一个为 Genesio-Rössler 耦合系统, 另一个为具有二次、三次非线性的耦合 Duffing 系统. 结果表明前者仅有唯一的稳定同步流形, 而后者随着耦合强度的增加, 从具有两个稳定的同步流形变为只存在一个稳定同步流形.

关键词: 混沌同步, 多稳定性, 同步流形

PACC: 0545

1. 引 言

混沌同步的研究由来已久, 自 Pecora 和 Carroll^[1]在两相同系统中实现混沌同步以来, 精确同步的研究得到了迅速发展^[2-5]. 精确同步要求参与同步的各子系统间结构、参数完全相同, 然而在激光、生物等实际系统中, 这一条件很难得到满足, 这使得精确同步的应用大为受限. Rulkov^[6]等提出在异构系统之间也能实现混沌同步, 即广义混沌同步, 并通过电路系统验证了该思想. Kocarev 和 Parlitz^[7]利用稳定性理论研究了在单向耦合系统中实现广义混沌同步的充要条件. Hunt 等^[8]给出了广义混沌同步时, 驱动与响应信号之间函数的可微性条件. 这些文献基本勾勒出了广义混沌同步的理论框架. 此后, 广义混沌同步受到了各国学者的广泛关注, 并在机理^[9-12]、控制方法^[13-15]及应用^[16-19]等方面对其进行了大量研究.

关于广义混沌同步的研究, 大多针对单一稳定同步流形情况. 实际上, 和大多数非线性系统一样, 广义混沌同步系统也可能存在多个稳定的混沌吸引子, 或者说存在多稳定同步流形. González-Miranda^[20-22]是最先关注广义同步混沌中多稳定混沌吸引子现象的学者之一, 他提出若同步系统具有某种对称性, 那么在系统相空间中可能共存多个

稳定的同步混沌吸引子, 每个吸引子都有其吸引域, 他还指出利用广义混沌同步这种多稳定流形特性, 可以将吸引子的吸引域也当作密钥之一, 从而进一步增强通讯的保密性. Guan 等^[23]认为对称性并非多稳定同步流形存在的必要条件, 他研究了非对称系统中的多稳定混沌, 并与对称性情况进行了比较. 我们知道, 混沌吸引子中的不稳定周期轨道(UPO)是构成混沌吸引子的骨架, 而 UPO 的锁相在耦合混沌系统中起着非常重要的作用. Parlitz 等^[24]利用这一原理, 分析了驱动 UPO 的周期与响应周期轨道的周期之比为 $1:p$ ($p > 1$) 时的情况, $p > 1$ 即意味着驱动吸引子上的一点将映射到响应吸引子的多个点, 即广义同步存在多值映射. 同样, Rulkov 等^[25]也将多个混沌吸引子共存表述为驱动系统和响应系统之间的多值映射, 得出了随着耦合强度的减小, 所研究的系统将出现两个不同的同步区域, 在第一个区域中, 系统只存在一个同步混沌吸引子, 在出现短暂的非同步区域后, 系统出现了两个不同的混沌吸引子, 并通过分析驱动吸引子中周期小于 10 的 UPO 在响应吸引子中的形态, 具体研究了这种多值性形成的机理. Rulkov 和 Lewis^[26]还分析了存在多值映射时, 驱动系统微小的变化就能使得响应系统丧失同步的原因. Pisarchik 等^[27]数值和实验研究了单向耦合系统中的双稳定同步混沌, 得出随着耦合强度的加大, 系统在两个共存的吸引子之间跳动.

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 50675220)资助的课题.

[†] E-mail: yuxiang_nue@sina.com

以上的研究均基于单个系统进行,所研究的某些系统还仅具有数学意义,并无实际的物理意义,没有于一般意义上研究多稳定混沌同步流形存在的原因,也没有给出多个响应吸引子共存的条件.因此,本文试图从构造驱动系统和响应系统之间的函数关系出发,一般性地研究广义混沌同步中同步流形的多值性问题,并通过对同步流形的稳定性进行分析得到多稳定同步流形存在的条件,利用该条件对两个实例进行分析,一个为 Genesio-Rössler 耦合系统,另一个为具有二次、三次非线性的耦合 Duffing 系统.

2. 同步流形的多值性

考虑如下单向耦合系统:

$$\dot{X} = F(X), \quad (1a)$$

$$\dot{Y} = G(Y) + kP(X, Y), \quad (1b)$$

其中 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_d\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_r\}$ 分别为 R^d 和 R^r 中的状态向量, F 和 G 为向量场, 分别表示驱动和响应系统, $F: R^d \rightarrow R^d$, $G: R^r \rightarrow R^r$, P 表示驱动系统和响应系统之间的耦合, k 为表示耦合强度的标量系数. 本文假设 $F(\cdot)$, $G(\cdot)$ 和 $P(\cdot)$ 均可微.

当 $k \neq 0$ 时, 若存在映射 $H: R^d \rightarrow R^r$ 、流形 $M = \{(X, Y): Y = H(X)\}$ 以及流形 M 的邻域 $B = B_x \times B_y \subset R^d \times R^r$, 使得系统 (1) 的任何初值在 B 中的轨迹随时间趋近于流形 M , 那么称在 X 和 Y 之间实现了广义同步, M 称为同步流形. 本文要考虑的是, 当初值不处于 B 中, 是否存在另一个映射 $H': R^d \rightarrow R^r$ 、流形 $M' = \{(X, Y): Y = H'(X)\}$ 以及流形 M' 的邻域 $B' = B'_x \times B'_y \subset R^d \times R^r$, 同样也能使系统实现广义同步.

多值性是非线性系统普遍存在的一种现象, 对于非线性动力系统来说, 在某些参数下, 系统可能有多个吸引子共存, 每个吸引子都有其各自的吸引域. 同样, 广义混沌同步也存在多稳定响应的情况. 事实上, 在广义同步情况下, 映射 H 表示的是驱动系统在混沌吸引子上的 X 轨迹与响应系统渐近混沌行为 Y 轨迹之间的泛函关系, 它包含了一类不显含时间 t 的连续函数 (不一定可微, 但本文仅考虑可微情况), 每个函数均对应于一个同步流形, 因而使得广义同步系统中可能存在多个同步流形. Brown^[11] 提出了一种近似于中心流形的方法来求解广义混沌同

步时 Y 和 X 之间的这种泛函关系, 利用该方法, 可以一般性地分析广义混沌同步系统中同步流形多值性存在的原因.

若在 Y 和 X 之间存在可微映射 $H: R^d \rightarrow R^r$, 那么有

$$\dot{Y} = D_x H(X) \dot{X}. \quad (2)$$

将 (1a) 和 (1b) 式代入 (2) 式, 可以得到

$$G(H(X)) + kP(X, H(X)) - D_x H(X)F(X) = 0, \quad (3)$$

(3) 式在同步流形 $M = \{(X, Y): Y = H(X)\}$ 上成立, 其中 $D_x H(X)$ 为 Jacobi 矩阵. (3) 式可以看作以 $H(X)$ 为未知函数的偏微分方程, 在求解中心流形时也可得到类似方程. 要精确求解上式通常很困难, 可以通过将 $Y = H(X)$ 展开成幂级数进行求解.

$$H(X) = A + BX + X^T LX + \dots \quad (4)$$

将 (4) 式代入 (3) 式, 令同次项系数为零, 可以得到一系列代数方程. 这些代数方程包含了 $F(\cdot)$, $G(\cdot)$ 和 $P(\cdot)$ 的各个系数以及 A, B, L 的各个元素, 通过求解这些代数方程可以得到 A, B, L 中各个元素, 从而得到 H 的良好近似解. 从求解过程来看, 由于 F, G 和 P 中的一个或多个为非线性函数, 因而各个代数方程组中也必然存在非线性项, 这些非线性项的存在将导致解具有多个可能值, 若没有别的边界条件限制, 这样求得的 H 近似解也必然存在多个解, 同样的多值性也会出现在求解中心流形的过程中. 由此可见, 广义混沌同步中存在多个同步流形源于其非线性因素, 而非线性正是混沌系统所必须的, 因此, 多值性是广义混沌同步系统中普遍存在的.

上述方法能求得多个同步流形, 但这些同步流形并非全部稳定, 因而需要对这些流形的稳定性进行判断, 从而给出多稳定同步流形存在的条件.

3. 同步流形的稳定性

若 H 在驱动系统轨迹上满足 $Y = H(X)$, 要判断同步流形 $M = \{(X, Y): Y = H(X)\}$ 的稳定性, 首先对 H 进行微扰, 令 $Y' = H(X) + r$, 因为 $Y = H(X)$ 满足 (1b) 式, 所以有

$$\dot{H}(X) = G(H(X)) + kP(X, H(X)). \quad (5)$$

将 $Y' = H(X) + r$ 代入 (1b) 式, 且利用 (5) 式得

$$\begin{aligned} \dot{r} = & G(H(X) + r) + kP(X, H(X) + r) \\ & - G(H(X)) - kP(X, H(X)). \end{aligned} \quad (6)$$

由上式可得

$$\dot{r} = (D_H G(H(X)) + kD_H P(X, H(X)))r + \alpha(\|r\|^2), \quad (7)$$

其中 $D_H G(H(X)), D_H P(X, H(X))$ 为 Jacobi 矩阵. 令 $(D_H G(H(X)) + kD_H P(X, H(X))) = A(X)$, 根据一次近似稳定性定理, 若 $A(X)$ 的特征值实部均为负, 那么扰动方程(7)有渐近稳定的零解, 从而同步流形 $M = \{(X, Y) : Y = H(X)\}$ 稳定. 但注意到 $X = \varphi(X_0, t)$, 其中 φ 为驱动系统的解, X_0 为初始值, t 为时间, 因此 $A(X)$ 可以写成 $A(t)$, 其特征值随时间变化. 此时将无法通过某单一时刻时 $A(t)$ 的特征值来判断扰动方程(7)零解的稳定性. 而 Lyapunov 指数 (LCE) 正是刻画这种相邻轨迹随时间演化规律的特征量, 可以通过计算系统的条件 LCE 来判断 $Y = H(X)$ 的稳定性: 若所有条件 LCE 小于零, 那么同步流形 $M = \{(X, Y) : Y = H(X)\}$ 渐近稳定, 若存在大于零的条件 LCE, 则同步流形不稳定. 为此, 引入局部 LCE 定义.

局部 LCE^[28] 为

$$l_i(\tau) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\xi} \ln \frac{\|p_i(\tau + \xi)\|}{\|p_i(\tau)\|} \right), \quad (8)$$

其中 $p_i(t)$ 为 t 时刻超球面的第 i 个主轴. 在局部 LCE 基础上, LCE 定义为

$$L_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t l_i(\tau) d\tau. \quad (9)$$

对于(7)式, $\dot{r} = A(t)r$, 由于 $\xi \rightarrow 0$, 因而可以在 $[\tau, \tau + \xi]$ 这个区间中, 令 $A(t) \cong A(\tau)$, 这样 $\dot{r} = A(\tau)r$ 为常系数线性微分方程, 其通解为^[28]

$$r(t) = \sum_{i=1}^n [c_i e^{a_i t} w_i], \quad (10)$$

其中 $w_i = u_i \cos(b_i t) + v_i \sin(b_i t)$, 并且有 $w_i^T w_j = \delta_{ij}$ ($i \neq j$), $w_i^T w_i = 1$ ($i = j$), $a_i = \text{Re}(\lambda_i)$, $b_i = \text{Im}(\lambda_i)$, λ_i 为 $A(\tau)$ 的特征值, 且有 $\text{Re}(\lambda_1) \geq \dots \geq \text{Re}(\lambda_n)$, u_i, v_i 为常数向量, c_i 为依赖于初始条件的常数, 这里仅考虑最大 LCE, 因此选取为 $c_1 = 1$, 其余为 0, 因此有 $p_1(\tau) = r(\tau) = e^{a_1(\tau)\tau} w_1(\tau)$, $p_1(\tau + \xi) = r(\tau + \xi) = e^{a_1(\tau)\tau + \xi} w_1(\tau + \xi)$, 所以有

$$\begin{aligned} l_1(\tau) &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\xi} \ln \frac{\|p_1(\tau + \xi)\|}{\|p_1(\tau)\|} \right) \\ &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\xi} \ln \frac{\sqrt{p_1(\tau + \xi)^T p_1(\tau + \xi)}}{\sqrt{p_1(\tau)^T p_1(\tau)}} \right) \\ &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\xi} \ln(e^{a_1(\tau)\xi}) \right) = a_1(\tau), \quad (11) \end{aligned}$$

也就是说, 在 $[\tau, \tau + \xi]$ 区间中的最大局部 LCE 为

常数矩阵 $A(\tau)$ 特征值的最大实部. 将(11)式代入(9)式, 可以得到最大 LCE 为

$$L_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t a_1(\tau) d\tau, \quad (12)$$

因此可以得到如下定理.

定理 1 对于单向耦合系统(1), 若在映射 $H : R^d \rightarrow R^r$ 下, 存在同步流形 $M = \{(X, Y) : Y = H(X)\}$, 使得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t a_1(\tau) d\tau < 0$, 那么该同步流形渐近稳定. 若 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t a_1(\tau) d\tau > 0$, 那么该流形不稳定. 其中 $a_1(\tau)$ 为 τ 时刻响应系统的 Jacobi 矩阵 $(D_H G(H(X)) + kD_H P(X, H(X)))$ 特征值的最大实部.

驱动系统(1a)为混沌运动, 由于混沌吸引子有界, 所以存在一个有界闭集 V , 使得驱动系统轨迹上的点组成的集合 $\{X \in R^d : X = \varphi(X_0, t)\} \subset V$. 另设 $U = \{X \in R^d : \text{Re}(\lambda_{\max}(A)) < 0\}$, 即 U 为在 d 维相空间中能使响应系统 Jacobi 矩阵 A 的特征值的最大实部小于零的点组成的集合. 根据上述定理, 易得如下推论.

推论 若在映射 $H : R^d \rightarrow R^r$ 下, 有 $U \cap V = \emptyset$, 且对于任意 $X \in V$, $A(X)$ 不存在零实部特征值, 那么同步流形 $M = \{(X, Y) : Y = H(X)\}$ 不稳定; 若有 $V \subset U$, 那么同步流形 $M = \{(X, Y) : Y = H(X)\}$ 稳定.

由上述分析可以看出, 对于一般同步系统来说, 同步流形的多值性由系统本身的非线性因素决定, 但并非近似求解得到的每个同步流形都稳定, 而且, 同步流形的稳定性还与耦合函数 P 以及耦合强度 k 有关. 从定理 1 可知, 流形的稳定性主要取决于响应系统的 Jacobi 矩阵 $(D_H G(H(X)) + kD_H P(X, H(X)))$ 而耦合函数 P 以及耦合强度 k 均会对该矩阵产生影响, 更重要的是, H 也将随 P 以及 k 而变化, 这使得同步流形的稳定性随 P 以及 k 的变化规律相当复杂. 本文将在实例 2 中利用数值方法对同步流形的稳定性随着耦合强度 k 的变化趋势进行分析.

下面对两个实例进行分析, 一为 Genesio-Rössler 系统, 另一个为耦合 Duffing 系统.

4. 实 例

以上分析均假设 H 可微, Pyragas^[10] 根据映射

H 是否可微, 将广义同步分为弱同步 (WS) 和强同步 (SS) 并提出了 H 可微的条件: 若整个同步系统的 Lyapunov 维数 d_L 等于驱动系统的 Lyapunov 维数 d_L^D , 那么该系统为强同步系统, 映射 H 可微. 根据赫尔德 (Hölder) 指数进行判断也可以得到类似的结论^[8]. 下面将利用该判据来保证同步系统处于强同步状态.

4.1. Genesio-Rössler 耦合系统

驱动系统为 Genesio 系统, 它由三个简单的微分方程构成, 含有三个正的实参数, 该动力系统的微分方程表达式如下:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{x}_2, \\ \dot{x}_2 &= \dot{x}_3, \\ \dot{x}_3 &= -cx_1 - bx_2 - ax_3 + x_1^2, \end{aligned} \tag{13}$$

其中 a, b, c 满足关系式 $ab < c$, 当 $a = 1.2, b =$

$2.92, c = 6$ 时, 系统的 LCE 为 $0.0183, 0.0003, -1.2187$, Lyapunov 维数 $d_L^D = 2.0153$, 此时系统为混沌的, 其相图如图 1 所示. 从相图可以看出, 驱动系统 (13) 的轨迹被限定在有界闭集 $V = \{-3 \leq x_1 \leq 6, -6 \leq x_2 \leq 8, -11 \leq x_3 \leq 13.5\}$ 中.

响应系统为 Rössler 系统:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \sigma - y_2 - y_3, \\ \dot{y}_2 &= \sigma(y_1 + 0.2y_2) - k(y_2 - x_2), \\ \dot{y}_3 &= \sigma(0.2 + y_3y_1 - 5.7y_3), \end{aligned} \tag{14}$$

其中 σ 为特征时间比例因子, 这里取 $\sigma = 6$. 采用变量反馈的方法实现驱动、响应系统之间的混沌同步, 为了保证实现强同步, 选取耦合强度 $k = 5$, 此时系统的条件 LCE 为 $-1.9479, -1.9480, -31.0426$, 计算得到整个同步系统的 Lyapunov 维数 $d_L = d_L^D = 2.0153$, 因此该系统为强同步系统, 映射 H 可微.

根据 Brown 方法可以求得映射 H 的两组解:

$$H_1(X) = \begin{bmatrix} 5.7221 \\ 9.0350 \\ -9.0350 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0440 & 0.7527 \times 10^{-2} & 0.0310 \\ -0.5311 & 1.1751 & -0.3804 \\ 0.5621 & -1.1674 & 0.3854 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \dots \tag{15a}$$

$$H_2(X) = \begin{bmatrix} -0.0221 \\ -0.0350 \\ 0.0350 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.1079 & -0.8581 & 0.0788 \\ 0.0793 & 0.0615 & 0.1581 \\ -0.5446 \times 10^{-3} & -0.5170 \times 10^{-2} & 0.6546 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \dots \tag{15b}$$

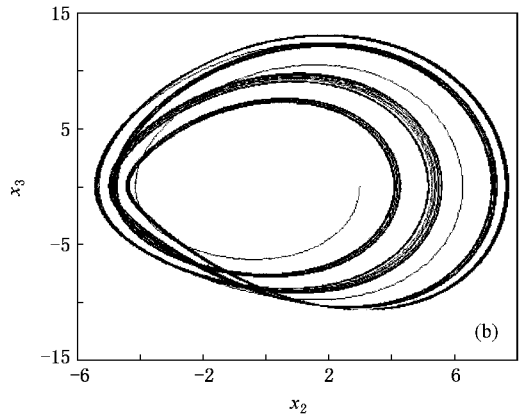
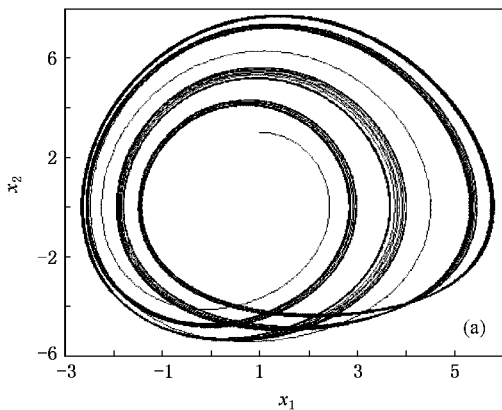


图 1 Genesio 系统相图 (a) $x_1 - x_2$ 平面 (b) $x_2 - x_3$ 平面

对映射 H 两组解对应的同步流形的稳定性进行分析. 根据推论, 需要得到将 $H_1(X)$ 和 $H_2(X)$ 代入 (7) 式后 $A(X)$ 在有界闭集 $V = \{-3 \leq x_1 \leq 6, -6 \leq x_2 \leq 8, -11 \leq x_3 \leq 13.5\}$ 中的特征值特性. 采用 Maple 等符号计算软件计算后的结果如图 2、3 所示. 图 2 为 $H_1(X)$ 作用下, $A(X)$ 的特征值实部的最大

值 $\text{Re}(\lambda_{\max})$ 在 V 中的情况, 其中图 2(a) 为 $x_3 = 0$ 时, $\text{Re}(\lambda_{\max})$ 随 x_1, x_2 变化的趋势, 图 2(b) 为 $x_1 = 0$ 时, $\text{Re}(\lambda_{\max})$ 随 x_2, x_3 变化的趋势. 图 3 为在 H_2 作用下所对应的情况. 从图中可以看出, 在 H_1 作用下, $\text{Re}(\lambda_{\max})$ 在有界闭集 V 中均大于零, 即 $U \cap V = \Phi$, 其中 $U = \{X \in R^d : \text{Re}(\lambda_{\max}(A)) < 0\}$, 且对于任意 X

$\in V, \mathcal{A}(X)$ 不存在零实部特征值, 因此根据推论可以得到同步流形 $M_1 = \{(X, Y) : Y = H_1(X)\}$ 不稳定. 而在 H_2 作用下, $\text{Re}(\lambda_{\max})$ 在 V 中均小于零, 即 $V \subset U$, 因此可以得到同步流形 $M_2 = \{(X, Y) : Y = H_2(X)\}$ 稳定.

根据上面的分析可知, 该混沌同步系统仅有一个稳定的同步流形 $M_2 = \{(X, Y) : Y = H_2(X)\}$, 以相空间任意一点为初始条件的轨迹都将最终吸引到该同步流形上. 数值计算也验证了该结论.

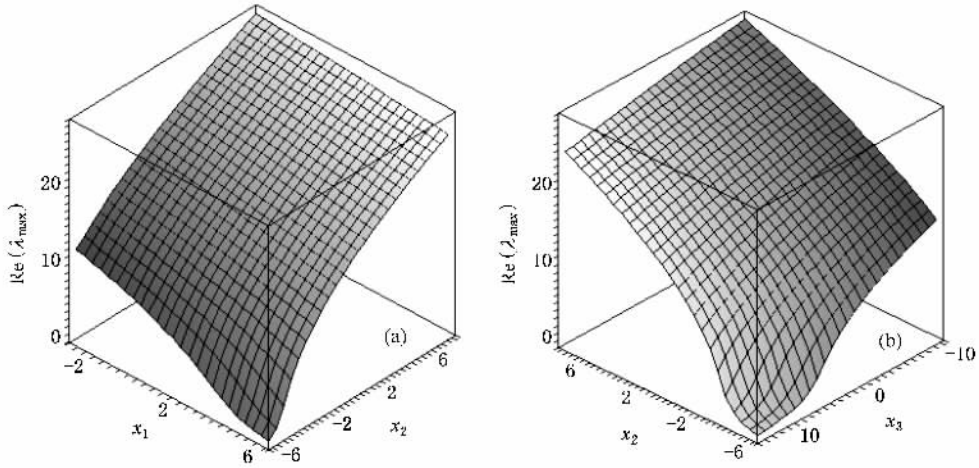


图 2 $H_1(X)$ 作用下 $\mathcal{A}(X)$ 的特征值实部的最大值 $\text{Re}(\lambda_{\max})$ 在 V 中的情况

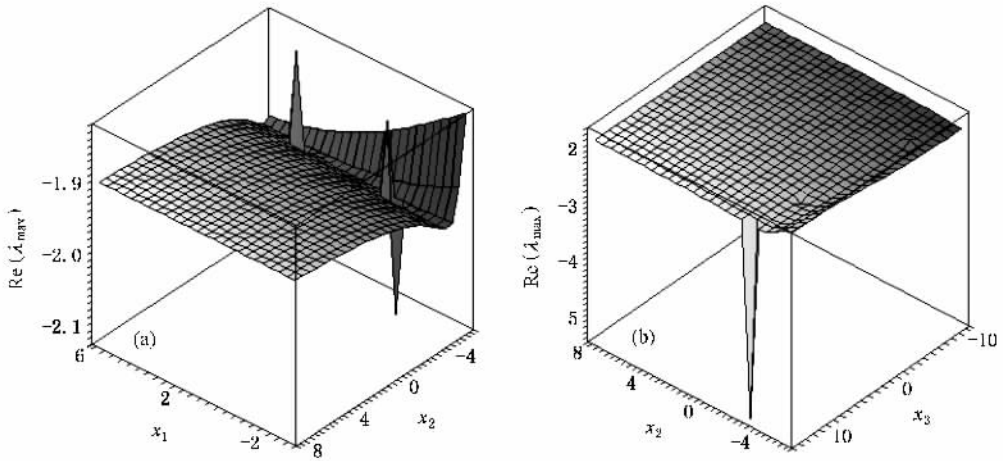


图 3 $H_2(X)$ 作用下 $\mathcal{A}(X)$ 的特征值实部的最大值 $\text{Re}(\lambda_{\max})$ 在 V 中的情况

4.2. 耦合 Duffing 系统

驱动系统为如下简谐激励下的单自由度振子 :

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -px_1 - ux_1^2 - x_1^3 - vx_2 + f\cos(\omega t), \quad (16)$$

该驱动系统在参数 $p = 4, u = 3, v = 0.15, f = 9, \omega = 3.9311$ 下为混沌运动状态, 相图如图 4 所示. 驱动系统的 LCE 为 $0.146652, -0.296652$, Lyapunov 维数 $d_L^D = 1.4944$.

响应系统为具有二、三次非线性项的两自由度

振动系统 :

$$\dot{y}_1 = y_2$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_2 = & -\delta_1(y_2 - y_4) - kx_2(y_1 - y_3) \\ & + \xi_1(y_1 - y_3)^2 - (y_1 - y_3)^3 \\ & + d\cos(\omega t), \end{aligned}$$

$$\dot{y}_3 = y_4,$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_4 = & -\mu\delta_2 y_4 - \mu p_2 y_3 - \mu\delta_1(y_2 - y_4) \\ & + \mu\xi_1(y_1 - y_3)^2 - \mu\xi_2(y_1 - y_3)^3 \\ & + \mu\xi_3(y_1 - y_3)^3, \end{aligned} \quad (17)$$

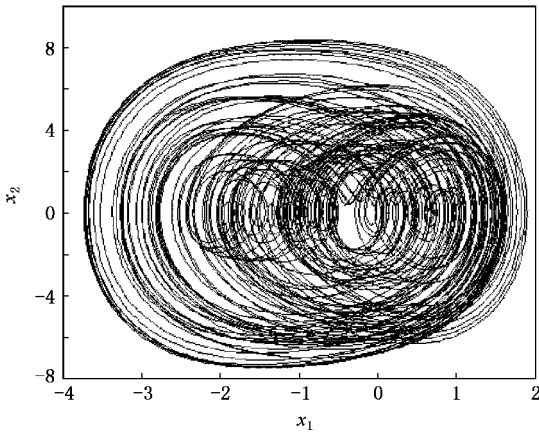


图 4 单自由度振动系统相图

驱动系统通过驱动该响应系统的线性刚度实现混沌同步, k 为驱动强度, 这里取为 0.1, 其余参数为 $\delta_1 = \delta_2 = 0.8, \xi_1 = 1, d = 20, \mu = 0.2, p_2 = 2$.

将驱动系统、响应系统均变换为自治系统, 令 $\cos(\omega t) = x_3, \sin(\omega t) = x_4$, 因此, 驱动系统增加两维 $\dot{x}_3 = -\omega x_4, \dot{x}_4 = \omega x_3$, 同样, 响应系统也增加两维 $\dot{y}_5 = -\omega y_6, \dot{y}_6 = \omega y_5$. 为了应用 Brown 方法, 先假设 H 可微, 并令 $y_5 = x_3, y_6 = x_4$ 以消除简并情况而引入的系统多值性, 可以得到 H 存在两组解.

H_1 :

$$\begin{aligned} y_1 &= -1.2689x_3 + 0.1628x_4 + \dots \\ y_2 &= 0.6399x_3 + 4.9881x_4 + \dots \\ y_3 &= 0.0109x_3 - 0.0363x_4 + \dots \\ y_4 &= -0.1429x_3 + 0.0427x_4 + \dots \end{aligned}$$

H_2 :

$$\begin{aligned} y_1 &= 1.5 - 0.0258x_1 + 0.0250x_2 \\ &\quad - 1.3256x_3 + 0.2366x_4 + \dots \end{aligned}$$

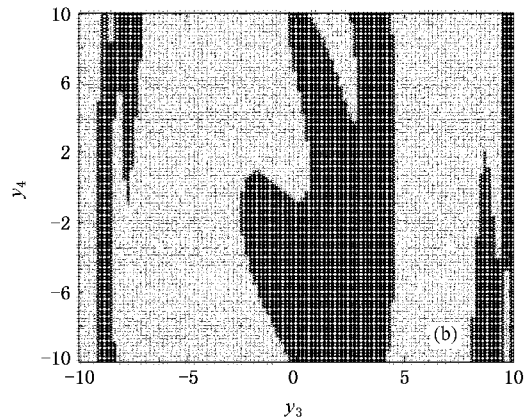
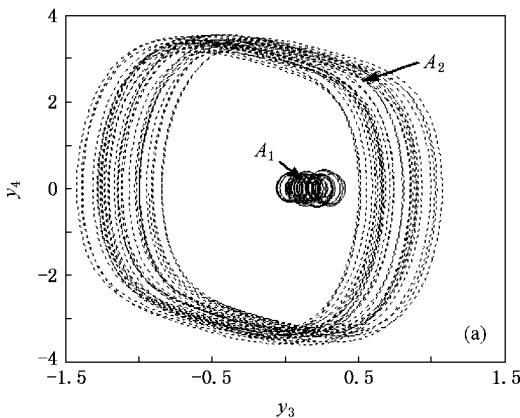


图 5 $k = 0.1$ 时共存的两同步混沌吸引子及其吸引域

$$\begin{aligned} y_2 &= -0.1001x_1 - 0.0295x_2 \\ &\quad + 1.1552x_3 + 5.2111x_4 + \dots \\ y_3 &= 0.5 + 0.8480 \times 10^{-2}x_1 - 0.1191 \times 10^{-2}x_2 \\ &\quad + 0.0233x_3 - 0.0625x_4 + \dots \\ y_4 &= 0.4764 \times 10^{-2}x_1 + 0.8659 \times 10^{-2}x_2 \\ &\quad - 0.2563x_3 - 0.0916x_4 + \dots \end{aligned}$$

在映射 H_1 作用下, 根据 (12) 式计算得到最大条件 LCE 为 $L_{H_1} = -0.25356$; 在 H_2 作用下, 计算得到的系统最大条件 LCE 为 $L_{H_2} = -0.23652$. 分别计算在 H_1, H_2 作用下整个同步系统的 Lyapunov 维数, 得 $d_{L_1}^H = 1.5784, d_{L_2}^H = 1.6200$. 因为 $d_{L_1}^H, d_{L_2}^H, d_L^D$ 三者相差不大, 且考虑到 H_1, H_2 仅为 H 的近似解, 可认为 H 可微的假设是成立的. L_{H_1}, L_{H_2} 均为负, 根据定理 1 可知 H_1, H_2 对应的同步流形均是稳定的, 即对于该耦合 Duffing 系统来说, 存在两个稳定的同步流形.

通过数值模拟可以验证该混沌同步系统确实存在两个同步混沌吸引子. 图 5(a) 所示即为这两个混沌吸引子在 y_3-y_4 平面上的投影, 实线所示吸引子记为 A_1 , 虚线所示吸引子为 A_2 , 可以清楚地看出, A_2 吸引子包围在 A_1 吸引子之外. 共存的两吸引子均有其吸引域, Guan^[23] 以及 González-Miranda^[20] 均对多稳定同步流形吸引域的特征进行了研究. 为了研究该混沌同步流形的吸引域, 我们选取响应系统相空间的一个区域 $\Sigma = \{y_1 = 0, y_2 = -5, -10 < y_3 \leq 10, -10 < y_4 \leq 10\}$ 作为分析平面, 利用点映射方法得到两混沌吸引子的吸引域如图 5(b) 所示, 黑色区域为吸引子 A_1 的吸引域, 灰色区域为吸引子 A_2 的吸引域, 由于计算精度所限, 吸引域边界的分形结构

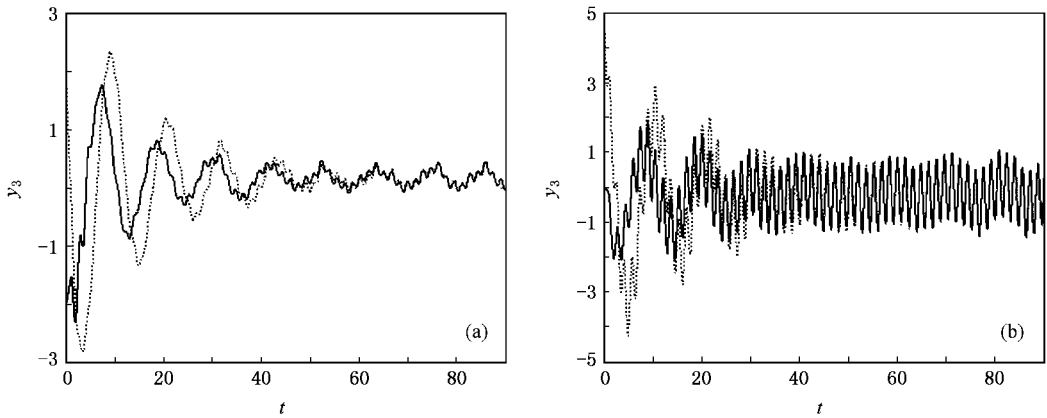


图 6 不同初始条件的时间历程曲线

并不明显. 以吸引域中任何点为初始条件出发的轨迹都将趋向于该吸引域所属的吸引子, 图 6(a) 所示为响应系统初始条件分别为 $(0, -5, -2, 0)$ (实线) 以及 $(0, -5, 2, -1)$ (虚线) 时 y_3 的时间历程图, 这两条轨迹吸引于 A_1 吸引子; 图 6(b) 所示两条时间历程曲线的初始条件分别为 $(0, -5, 0, 0)$ (实线) 以及 $(0, -5, 5, 0)$ (虚线), 这两条轨迹吸引于另一吸引子 A_2 , 因而, 吸引域的大小反映了吸引子稳定性的强弱.

下面分析同步混沌吸引子及其吸引域随耦合强度 k 增大的变化趋势. 图 7 所示为耦合强度 $k = 0.5$ 时, 同步混沌吸引子及其吸引域. 图 8 为 $k = 0.56$ 时的情况. 比较图 5(a), 7(a), 8(a) 可以看出, 随着 k 的增大, A_1 吸引子在 y_3-y_4 平面上占据的空间变大, 而 A_2 吸引子逐渐填充其中间部分, 这使得原本在 y_3-y_4 平面上截然分开的两个吸引子, 变得互相交织. 这里需要说明的是, 图 5(a), 7(a), 8(a) 所示只是共存的两个吸引子在 y_3-y_4 平面上的投影, 而在实

际相空间中, 共存的两个吸引子是不可能相交的. 再比较不同耦合强度下吸引子的吸引域可以看出, 随着耦合强度的加大, A_1 吸引子的吸引域正在逐渐变小, 这说明其稳定性正在减弱, 并且当 $k = 0.563$ 时, 完全丧失了其稳定性, 整个相空间中只有一个 A_2 吸引子. 这一变化过程正好与文献 [25] 的研究结果类似. 在文献 [25] 中, 随着耦合强度的减弱, 驱动系统与响应系统之间从单值映射变成了多值映射.

另外, 通过比较图 5, 7, 8 还可以发现一个有趣的现象, 当 k 从 0.1 增大到 0.5 时, 共存吸引子的形态变化很大, 而其吸引域的变化则不明显, 但当 k 继续增大到 0.56 时, 共存吸引子的形态变化不大, 而其吸引域的变化则很大. 这或许能用混沌吸引子的边界激变 (chaotic boundary crisis) [29, 30] 来解释. 当 k 从 0.1 增大到 0.5 时, 吸引子 A_1 在相空间中不断膨胀, 但仍与其吸引域边界保持了一定距离, 因而其稳定性没有发生太大变化, 当 k 继续增大, 吸引子 A_1 与其吸引域边界相当接近了, 而在 $k = 0.563$ 时,

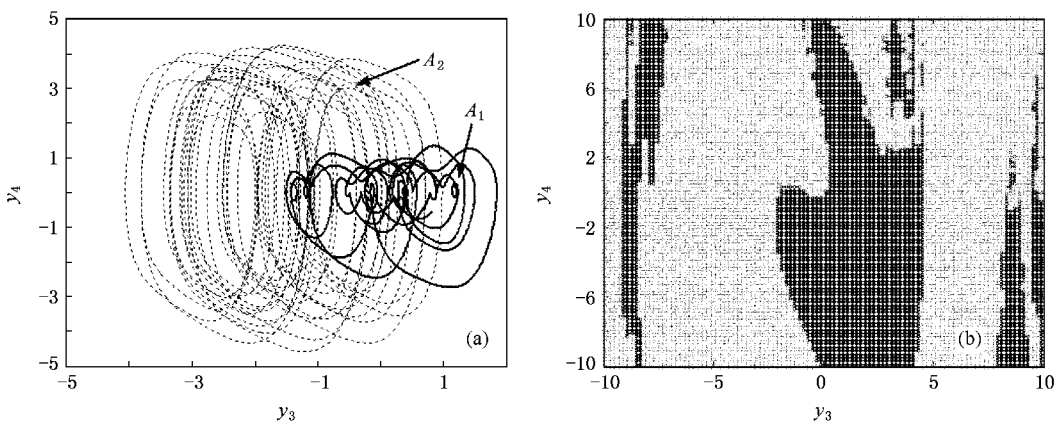


图 7 $k = 0.5$ 时共存的两同步混沌吸引子及其吸引域

完全碰撞到其吸引域边界而产生激变,因而混沌吸引子 A_1 连同其吸引域突然消失.洪灵和徐建学^[31]利用广义胞映射图论方法对低维系统混沌吸引子的

边界激变进行了分析,但本文所讨论的吸引子处于四维相空间中,胞映射方法很难进行,因而对于该现象还需要进一步研究.

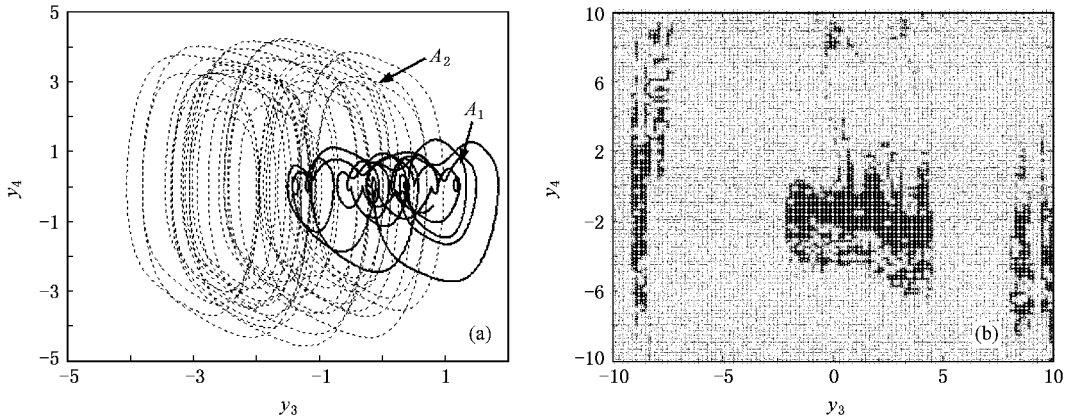


图 8 $k = 0.56$ 时共存的两同步混沌吸引子及其吸引域

González-Miranda^[20]提出了将对称系统中的多稳定同步流形特性应用于通信中,可以进一步提高通信的保密性.本文试图提出另一种可能应用.从图中可以看出, A_1 吸引子的振幅要远小于 A_2 吸引子,甚至小于未受驱动时的振幅,而响应系统(17)实际上为一两自由度非线性隔振系统动力学方程,若按照本文的控制方法将外加振动信号施加于非线性隔振系统中,并能将同步混沌控制在 A_1 同步流形上,那么系统的振幅将显著减小,从而获得出优异的隔振效果.

5. 结 论

本文从构造驱动系统和响应系统之间的函数关系出发,一般性地研究了广义混沌同步中同步流形

的多值性问题,给出了多稳定同步流形存在的条件,并利用该条件对两个实例——Genesio-Rössler 耦合系统和具有二次、三次非线性的耦合 Duffing 系统——进行了分析.基于本文的研究,可以得到如下结论:

1. 根据(12)式可以计算得到各个同步流形下的最大条件 LCE,通过判断该条件 LCE 的正负特征,可以得到同步流形的稳定性条件.
2. 在本文参数以及控制规律下,Genesio-Rössler 耦合系统仅具有唯一稳定的同步流形.
3. 当耦合强度 $k = 0.1$ 时,具有二次、三次非线性的耦合 Duffing 系统具有两个稳定的同步流形.随着耦合强度的增大,其中一个同步流形的稳定性逐渐变弱,最后失稳,系统相空间中变成只存在一个同步流形.

[1] Pecora L M, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
 [2] Pecora L M, Carroll T L 1991 *Phys. Rev. A* **44** 2374
 [3] Kapitaniak T 1994 *Phys. Rev. E* **50** 1642
 [4] Li G H, Xu D M, Zhou S P 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 379 (in Chinese) [李国辉、徐得名、周世平 2004 物理学报 **53** 379]
 [5] Wang X F, Si S K, Shi G R 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 6261 (in Chinese) [王校锋、司守奎、史国荣 2006 物理学报 **55** 6261]
 [6] Rulkov N F, Sushchik M M, Tsimring L S, Abarbanel H D I 1995 *Phys. Rev. E* **51** 980
 [7] Kocarev L, Parlitz U 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 1816
 [8] Hunt B R, Ott E, Yorke J A 1997 *Phys. Rev. E* **55** 4029

[9] Abarbanel H D I, Rulkov N F, Sushchik M M 1996 *Phys. Rev. E* **53** 4528
 [10] Pyragas K 1996 *Phys. Rev. E* **54** R4508
 [11] Brown R 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 4935
 [12] Zheng Z G, Wang X G, Cross M C 2002 *Phys. Rev. E* **65** 056211
 [13] Li S, Xu W, Li R H, Li Y P 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5681 (in Chinese) [李爽、徐伟、李瑞红、李玉鹏 2006 物理学报 **55** 5681]
 [14] Chen Z S, Sun K H, Zhang T S 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2580 (in Chinese) [陈志盛、孙克辉、张泰山 2005 物理学报 **54** 2580]
 [15] Wu X J, Wang X Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 6261 (in Chinese)

- [武相军、王兴元 2006 物理学报 **55** 6261]
- [16] Liu Y Z, Fei S M 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1035 [in Chinese] 刘扬正、费树岷 2006 物理学报 **55** 1035]
- [17] Jia F L, Xu W, Du L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5640 [in Chinese] [贾飞蕾、徐伟、都林 2007 物理学报 **56** 5640]
- [18] Yu X, Zhu S J, Liu S Y 2007 *J. Sound and Vibration* **306** 835
- [19] Guan X P, Fan Z P, Chen C L, Hua C C 2002 *Chaos control and its application in secure communications* (Beijing : National Defense Industry Press) [in Chinese] 关新平、范正平、陈彩莲、华长春 2002 混沌控制及其在保密通信中的应用(北京 : 国防工业出版社)]
- [20] González-Miranda J M 1996 *Phys. Rev. E* **53** 5656
- [21] González-Miranda J M 1999 *Phys. Lett. A* **251** 115
- [22] González-Miranda J M 1999 *Computer Physics Communications* **121** 429
- [23] Guan S G, Lai C H, Wei G W 2005 *Phys. Rev. E* **71** 036209
- [24] Parlitz U, Junge L, Kocarev L 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 3158
- [25] Rulkov N F, Afraimovich V S, Lewis C T 2001 *Phys. Rev. E* **64** 016217
- [26] Rulkov N F, Lewis C T 2001 *Phys. Rev. E* **63** 065204
- [27] Pisarchik A N, Jaimes-Reategui R, Villalobos-Salazar J R 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 244102
- [28] Bartler T A 1999 *Doctoral Dissertation* (Cincinnati : University of Cincinnati)
- [29] Grebogi C, Ott E, Yorke J A 1982 *Phys. Rev. Lett.* **48** 1507
- [30] Grebogi C, Ott E, Yorke J A 1983 *Physica D* **7** 181
- [31] Hong L, Xu J X 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 612 [in Chinese] 洪灵、徐建学 2001 物理学报 **50** 612]

Multi-stable synchronization manifold in generalized synchronization of chaos^{*}

Yu Xiang[†] Zhu Shi-Jian Liu Shu-Yong

(*Institute of Noise and Vibration, Naval University of Engineering, Wuhan 430033, China*)

(Received 11 August 2007 ; revised manuscript received 18 October 2007)

Abstract

The phenomenon of multi-stable synchronization manifold (SM) in generalized synchronization (GS) refers to the coexistence of multiple chaotic response attractors , which all synchronize with the same driving dynamics in the sense of GS. In this paper , the multivalued characteristic of SM is investigated in the general sense on the basis of establishing the functional relationship between the driving and response systems . The stability of SM is studied and the conditions ensuring the existence of the multi-stable SM are deduced. A Genesio-Rössler coupled system and a coupled Duffing system with quadric and cubic nonlinear terms are analyzed as examples and the results show that there exist only one stable SM in the former , while the bifurcation evolves from bistable SM to single-stable SM with the increase of coupling strength in the latter.

Keywords : synchronization of chaos , multi-stability , synchronization manifold

PACC : 0545

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 50675220).

[†] E-mail : yuxiang_nue@sina.com