

# 一类机电耦合非线性动力系统的混沌动力学特征\*

张琪昌<sup>1)†</sup> 田瑞兰<sup>1)†</sup> 王 炜<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> 天津大学机械学院力学系, 天津 300072)

<sup>2)</sup> 天津大学内燃机燃烧学国家重点实验室, 天津 300072)

(2007 年 8 月 17 日收到, 2007 年 9 月 27 日收到修改稿)

利用 Silnikov 定理, 讨论了具有自动频率跟踪功能电磁振动机械系统的混沌特性. 借助卡尔达诺公式和微分方程组级数解分别讨论了该系统的特征值问题和同宿轨道的存在性, 进而比较严密地证明了该系统 Silnikov 型 Smale 混沌的存在性, 并给出发生 Silnikov 型 Smale 混沌所需条件. 利用数值模拟得到该类机电耦合系统的相轨迹图、Lyapunov 指数谱和 Lyapunov 维数, 进一步验证了该非线性系统存在奇怪吸引子.

关键词: 混沌系统, Lyapunov 指数, Silnikov 定理, 耦合

PACC: 0545, 0540

## 1. 引 言

目前, 混沌系统的运动具体特性<sup>[1-4]</sup>及混沌系统的构造<sup>[5-11]</sup>等研究得到越来越多的关注. 文献 [1] 借助规范形理论研究了具有三重零特征根非对称向量场在原点附近的 Silnikov 轨道, 进而研究了 Smale 混沌. 文献 [2] 利用高维 Melnikov 法和不变流形上的纤维丛理论研究了 4 维 Duffing 系统的 Silnikov 轨道存在性以及 Smale 混沌. 文献 [3] 在规范形理论基础上, 利用能量相位法讨论了变张力黏弹性传动带空间运动时的 Silnikov 型轨道和 Smale 混沌运动. 文献 [4] 以耦合 Duffing 振子为对象, 研究了混沌系统进入完全同步态时的一些动力学行为. 文献 [5-8] 分别构造了新的三维混沌系统, 其中文献 [5] 和文献 [6] 分别基于 Silnikov 定理构造了一个三维二次多项式 Smale 混沌系统. 文献 [9] 在每个方程中加上三次非线性交叉乘积项, 构造了一个新的四维自治混沌系统. 文献 [10] 构建了一类关联且有多种切换方式的四维超混沌系统. 文献 [11] 利用 Silnikov 定理比较严密地证明了改进的 Lorenz 系统 Smale 混沌的存在性.

本文考虑具有自动频率跟踪功能的电磁振动机械(见图 1 和图 2).

此系统的数学模型为

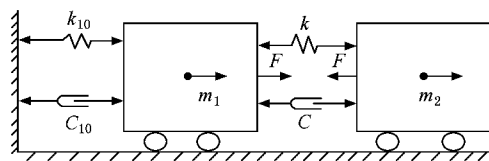


图 1 电磁振动给料机的力学模型

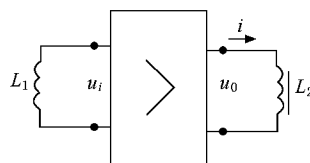


图 2 电路部分

$$\begin{aligned} \ddot{u} + \frac{c_{10}}{m_1} \dot{u} + \frac{k_{10}}{m_1} u &= \frac{k}{m_1} v + \frac{c}{m_1} \dot{v} + \frac{F}{m_1}, \\ \ddot{v} + \frac{c}{m} \dot{v} + \frac{k}{m} v &= \frac{k_{10}}{m_1} u + \frac{c_{10}}{m_1} \dot{u} - \frac{F}{m}, \\ F &= \epsilon \left( \frac{i}{\delta} \right)^2, \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $u$ 、 $v$  分别表示  $m_1$  位移和  $m_2$  相对  $m_1$  的位移,  $m_1$ 、 $m_2$  表示系统质量,  $k$  和  $c$  为主振簧的刚度和阻尼,  $k_{10}$  和  $c_{10}$  为隔振簧的刚度与阻尼.  $F$  为电磁力,  $L_1$  为磁电式速度传感器线圈,  $L_2$  为电磁铁绕组.  $u_i$  和  $u_0$  分别是放大器的输入和输出电压,  $i = \bar{i} + \tilde{i}$ ,  $\bar{i}$

\* 国家自然科学基金(批准号: 30372068)和高等学校博士学科点专项科研基金(批准号: 20060056005)资助的课题.

† E-mail: yxwtrl@tju.edu.cn

为绕组的直流电流,  $\tilde{i}$  为绕组的交流电流.  $\epsilon = \frac{\mu_0 SN^2}{4}$ ,  $\mu_0$  为空气磁导率,  $S$  为磁路横截面积,  $N$  为绕组的匝数,  $\delta$  为原始气隙、平均相对位移和相对振动位移之和.

由文献 [12] 可知, 考虑绕组的直流输出电压、交流输出电压, 要求交流输出电压与相对振动速度的频率相同而相位相反. 再考虑负载绕组  $L_2$  中流过电流时会产生反电势  $e$ , 并令  $y_1 = u$ ,  $y_2 = \dot{u}$ ,  $y_3 = v$ ,  $y_4 = \dot{v}$ ,  $y_5 = \frac{\tilde{i}}{\delta}$ , 重新改写 (1) 式如下:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \\ \dot{y}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -d_1 & -d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ d_1 & d_2 & -\sigma d_3 & -\sigma d_4 & -\sigma d_5 \\ 0 & 0 & 0 & -d_6 & -d_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ e_1 y_5^2 \\ 0 \\ -\sigma e_1 y_5^2 \\ -e_2 y_3 y_4 - e_3 y_3 y_5 \end{bmatrix},$$

其中  $d_1 = \frac{k_{10}}{m_1}$ ,  $d_2 = \frac{k_{10}}{m_1}$ ,  $\sigma = \frac{m_1 + m_2}{m_2}$ ,  $d_4 = \frac{c}{m_1}$ ,  $e_1 = \frac{\epsilon}{m_1}$ ,  $d_5, d_7, e_2$  为与  $i$  有关的系数,  $e_3$  为与  $\epsilon$  有关的系数,  $d_3, d_6$  为与  $k, i$  和交流输出电压幅值有关的系数.

对于电磁振动机械,  $d_1$  与  $\sigma d_1, d_2$  与  $\sigma d_2$  相比通常要小两个数量级左右, 文献 [12] 忽略  $d_1$  和  $d_2$  诸项, 得到该类机电耦合系统的无量纲状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -c_1 & -c_2 & -c_3 \\ 0 & -c_5 & -c_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -c_4 z^2 \\ -c_7 xy - c_8 xz \end{bmatrix}, \quad (2)$$

其中  $c_2 > 0, c_3 > 0, c_4 > 0, c_6 > 0, c_7 > 0, c_8 > 0, c_1 \geq 0, c_5$  可取任意值.

文献 [12] 应用中心流形定理和规范形理论讨论了系统 (2) 的 Hopf 分岔, 利用实测值验证了忽略  $d_1$  和  $d_2$  诸项的正确性以及计算方法的有效性. 但是, 文献 [12] 没有进一步展示系统 (2) 的其他丰富的动

力学特性. 本文利用 Silnikov 定理比较严谨地证明了系统 (2) 存在 Smale 混沌, 并利用数值模拟得到了该类机电耦合系统的二维、三维混沌图、Lyapunov 指数谱和 Lyapunov 维数, 进一步验证了该系统 Smale 混沌的存在性.

## 2. 平衡点分析

由非线性动力学理论知

1) 当  $c_3^2 c_8 + 4c_1 c_6 < 0$  时, 系统 (2) 只有一个平衡点  $X_0(0, 0, 0)$ ;

2) 当  $c_3^2 c_8 + 4c_1 c_6 = 0$  时, 系统 (2) 有两个平衡点  $X_0(0, 0, 0), X_1\left(-\frac{c_6}{c_8}, 0, -\frac{c_3}{2c_4}\right)$ ;

3) 当  $c_3^2 c_8 + 4c_1 c_6 > 0$  时, 系统 (2) 有三个平衡点  $X_0(0, 0, 0)$ ,

$$X_+ \left( -\frac{c_6}{c_8}, 0, \frac{-c_3 c_8 + \sqrt{c_3^2 c_8^2 + 4c_1 c_6 c_8}}{2c_4 c_8} \right),$$

$$X_- \left( -\frac{c_6}{c_8}, 0, \frac{-c_3 c_8 - \sqrt{c_3^2 c_8^2 + 4c_1 c_6 c_8}}{2c_4 c_8} \right).$$

本文只考虑平衡点  $(0, 0, 0)$  (平衡点不是  $(0, 0, 0)$  时, 可作相应的线性变换, 使得变换后的系统平衡点为  $(0, 0, 0)$ , 然后作类似讨论), 其 Jacobian 矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -c_1 & -c_2 & -c_3 \\ 0 & -c_5 & -c_6 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

其特征方程为

$$\lambda^3 + p_1 \lambda^2 + p_2 \lambda + p_3 = 0, \quad (4)$$

其中  $p_1 = c_2 + c_6, p_2 = c_1 - c_3 c_5 + c_2 c_6, p_3 = c_1 c_6$ . 令

$$\lambda = \mu - \frac{p_1}{3}, \quad (4) \text{ 式变形为}$$

$$\mu^3 + p\mu + q = 0,$$

其中  $p = p_2 - \frac{p_1^2}{3}, q = p_3 - \frac{p_1 p_2}{3} + \frac{2p_1^3}{27}$ . 由卡尔达诺公式可知, 若

$$c_1 > 0, \Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0, \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} < -\frac{2p_1}{3} \quad (5)$$

满足特征方程 (4) 有一个实根  $\alpha$ , 一对共轭复根  $\beta \pm i\omega$ , 且  $\alpha < 0, \beta > 0, |\alpha| > \beta > 0$ .

## 3. 混沌运动

引理 (Silnikov 定理)<sup>[5,6,13]</sup> 设

$$\frac{dX}{dt} = f(X), \quad (6)$$

其中  $t \in R, X \in R^3$  且设  $f(X_0) = 0$ , 令  $A = Df(X_0)$  是  $f(X)$  在平衡点  $X_0$  的 Jacobian 矩阵,  $A$  满足以下条件:

1)  $A$  有三个特征根:  $\alpha, \beta \pm i\omega$ , 其中  $\alpha < 0, \beta > 0, 0, |\alpha| > \beta, \alpha, \beta, \omega \in R$ .

2) 存在一条通过平衡点  $X_0$  的同宿轨道.

则系统 (6) 存在 Smale 马蹄混沌.

**定理 1** 若 (5) 式满足, 则系统 (2) 存在 Smale 马蹄混沌.

**证明** 由第二部分讨论可知, 若 (5) 式满足, 系统 (2) 在  $(0, 0, 0)$  的 Jacobian 矩阵  $A$  的特征方程有一个实根  $\alpha$ , 两个共轭复根  $\beta \pm i\omega$ , 且  $\alpha < 0, \beta > 0, |\alpha| > \beta > 0$ . 下面利用微分方程组级数解方法求系统 (2) 过  $(0, 0, 0)$  的同宿轨道.

首先讨论过  $(0, 0, 0)$  的正向时间轨道. 因考虑的同宿轨道过  $(0, 0, 0)$ , 可令

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} a_k e^{kat}, \\ y(t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} b_k e^{kat}, \\ z(t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} d_k e^{kat}, \end{aligned} \quad t > 0 \quad (7)$$

为系统 (2) 级数解, 其中  $a_k, b_k, d_k$  是待定系数,  $\alpha$  为 (4) 式的负实根. 把 (7) 式代入 (2) 式, 比较系数可得

$$(\alpha I - A) \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ d_1 \end{bmatrix} = 0. \quad (8)$$

因  $\det(\alpha I - A) = 0$  (8) 式有非 0 解  $(a_1, b_1, d_1)$ , 且  $a_1, b_1, d_1$  可被一个任意参数  $\xi$  表示出来. 类似可以得出

$$(\alpha I - A) \begin{bmatrix} a_k \\ b_k \\ d_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -c_4 \sum_{i+j=k} d_i d_j \\ -c_7 \sum_{i+j=k} a_i b_j - c_8 \sum_{i+j=k} a_i d_j \end{bmatrix}, \quad (k > 1). \quad (9)$$

易知  $\det(\alpha I - A) \neq 0$  ( $k > 1$ ), 故  $(a_k, b_k, d_k)$  ( $k > 1$ ) 由

$$\begin{bmatrix} a_k \\ b_k \\ d_k \end{bmatrix} = (k\alpha I - A)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -c_4 \sum_{i+j=k} d_i d_j \\ -c_7 \sum_{i+j=k} a_i b_j - c_8 \sum_{i+j=k} a_i d_j \end{bmatrix}, \quad (k > 1) \quad (10)$$

确定. 故 (7)–(10) 式确定了系统 (2) 的级数解  $x(t), y(t), z(t)$ .

其次, 考虑过  $(0, 0, 0)$  的反向时间轨道. 令  $\tau = -t$  ( $t > 0$ ), 系统 (2) 变为

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & c_5 & c_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ c_4 z^2 \\ c_7 xy + c_8 xz \end{bmatrix}, \quad (11)$$

其中  $x' = \frac{dx}{d\tau}, y' = \frac{dy}{d\tau}, z' = \frac{dz}{d\tau}$ .

令

$$\begin{aligned} x(\tau) &= \sum_{k=1}^{+\infty} a'_k e^{-k\gamma\tau}, \\ y(\tau) &= \sum_{k=1}^{+\infty} b'_k e^{-k\gamma\tau}, \\ z(\tau) &= \sum_{k=1}^{+\infty} d'_k e^{-k\gamma\tau} \end{aligned} \quad (12)$$

为系统 (11) 的级数解, 其中  $a'_k, b'_k, d'_k$  是待定系数,  $\gamma$  是待定负实数. 把 (12) 式代入 (11) 式, 比较系数可得

$$(\gamma I - A) \begin{bmatrix} a'_1 \\ b'_1 \\ d'_1 \end{bmatrix} = 0, \quad (13)$$

$$(\gamma I - A) \begin{bmatrix} a'_k \\ b'_k \\ d'_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -c_4 \sum_{i+j=k} d'_i d'_j \\ -c_7 \sum_{i+j=k} a'_i b'_j - c_8 \sum_{i+j=k} a'_i d'_j \end{bmatrix}, \quad (k > 1). \quad (14)$$

观察 (8) 式 (9) 式, 可取  $\gamma = \alpha$  ( $\alpha$  为 (4) 式的负实根). 此时 (13) 式有非 0 解  $(a'_1, b'_1, d'_1)$ , 且  $a'_1, b'_1, d'_1$  可被一个任意参数  $\eta$  表示出来 ( $a'_k, b'_k, d'_k$  ( $k > 1$ )) 可由

$$\begin{bmatrix} a'_k \\ b'_k \\ d'_k \end{bmatrix} = (k\alpha I - A)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -c_4 \sum_{i+j=k} d'_i d'_j \\ -c_7 \sum_{i+j=k} a'_i b'_j - c_8 \sum_{i+j=k} a'_i d'_j \end{bmatrix}, \quad (k > 1) \quad (15)$$

确定.

故系统(2)的同宿轨道可表示如下:

$$x(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k e^{kat}, & t \geq 0, \\ \sum_{k=1}^{+\infty} a'_k e^{-kat}, & t < 0, \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{+\infty} b_k e^{kat}, & t \geq 0, \\ \sum_{k=1}^{+\infty} b'_k e^{-kat}, & t < 0, \end{cases}$$

$$z(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{+\infty} d_k e^{kat}, & t \geq 0, \\ \sum_{k=1}^{+\infty} d'_k e^{-kat}, & t < 0, \end{cases}$$

其中  $\xi, \eta$  由  $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \sum_{k=1}^{+\infty} a'_k$  决定.

由引理可知,定理 1 成立.

#### 4. 混沌运动的数值计算

当各参数取值为  $c_2 = 0.5, c_3 = 1, c_4 = 0.1, c_6$

$= 1.1, c_7 = 1, c_8 = 1.2, c_1 = 0.5, c_5 = 0.88$ , 该机电耦合系统(2)满足定理 1, 故存在 Silnikov 型的 Smale 混沌. 图 3(a)–3(f) 为系统(2)在不同相平面的相轨迹图和变量  $x, y, z$  随时间演化的数值仿真结果. 图 3(a)–3(c) 显示了系统(2)存在两个吸引子, 并且在两个吸引子之间发生跳跃. 图 3(d)–3(f) 反映了变量  $x, y, z$  随时间的演化, 发生不规则的跳跃. 图 4 为系统(2)在三维空间的相轨迹图. 利用 Mathematica 编程<sup>[14]</sup> 绘制出系统(2)在上述参数下的 Lyapunov 指数谱, 如图 5. Lyapunov 指数是  $\lambda_1 = 0.0209408, \lambda_2 = 0.00234574, \lambda_3 = -1.51321$ , Lyapunov 维数是  $d_L = 2.01539$ . 此时  $\sum_{i=1}^3 \lambda_i = -1.48992346 < 0$ , 系统(2)是非发散系统. Grebogi 在 1983 年证明了在一个系统(非发散)的所有 Lyapunov 指数中, 只要出现正值, 系统是混沌的<sup>[15,16]</sup>. 故系统(2)在上述参数下表现出混沌性态. 由 Lyapunov 维数  $2 < d_L = 2.01539 < 3$  进一步验证了系统(2)在上述参数下表现出混沌性态.

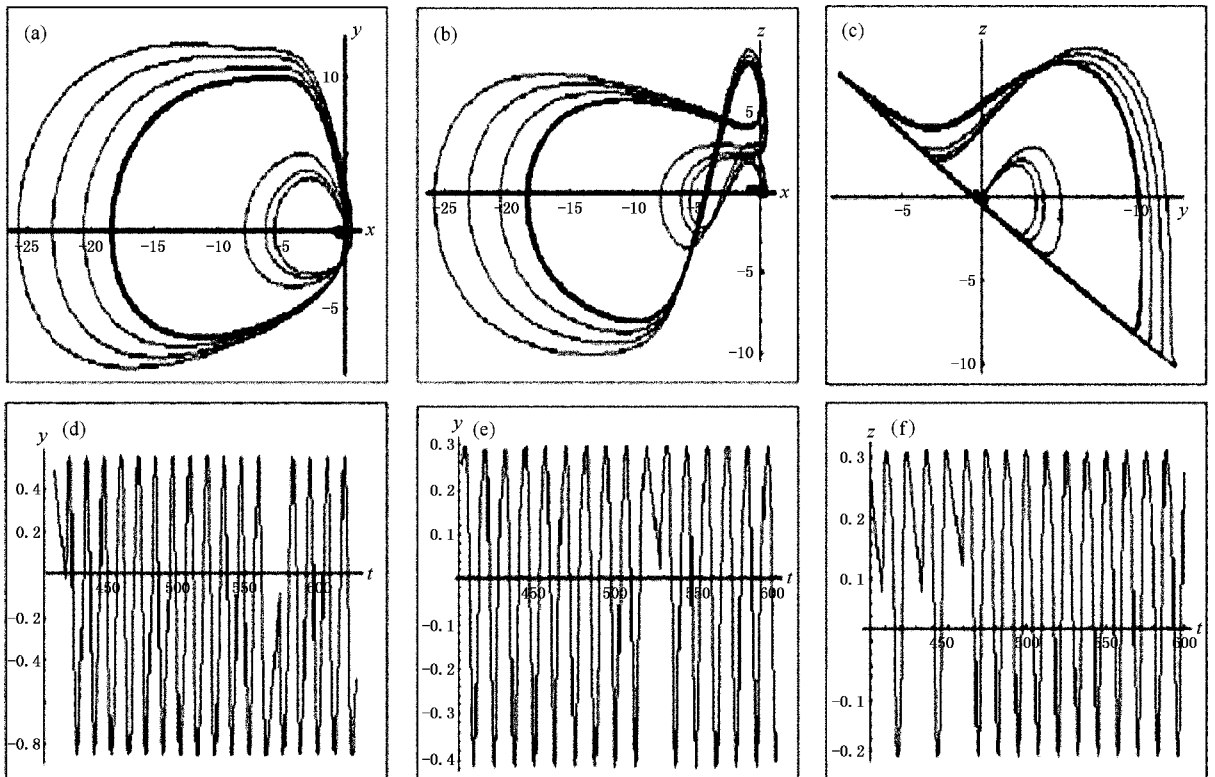


图 3 (a)  $xoy$  平面投影; (b)  $xoz$  平面投影; (c)  $yoz$  平面投影; (d) 变量  $x$  随时间的演化; (e) 变量  $y$  随时间的演化; (f) 变量  $z$  随时间的演化

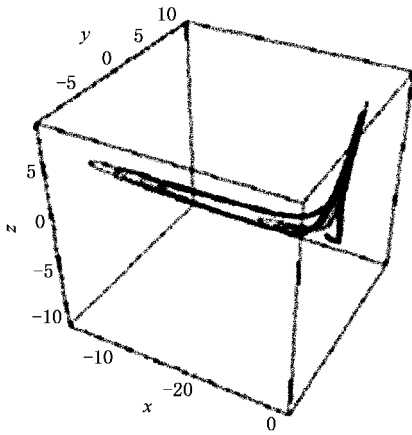
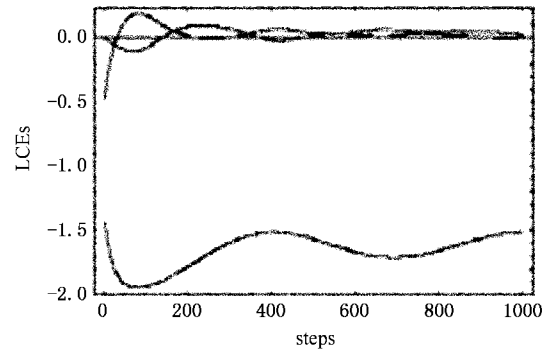
图4  $x, y, z$  的三维图

图5 Lyapunov(LCEs)指数谱

## 5. 结 论

在文献 [12] 所建立机电耦合系统的无量纲方程基础上, 讨论了该系统存在的混沌特性. 利用 Silnikov 定理比较严谨地证明了该系统存在 Smale 混沌, 给出了发生混沌的系统参数所满足的条件, 并利

用数值模拟确认了理论的有效性. 本文研究的模型是具有自动频率跟踪功能电磁振动给料机的无量纲数学模型, 对机械系统的设计有一定的指导作用, 可为设计制作具有混沌运动特征的运动机械提供理论参考, 并对研究 Silnikov 型的 Smale 混沌系统的理论研究也有一定的促进作用.

- [1] Li X D, Liu H F 2007 *Solitons and Fractals* **31** 75
- [2] Li W, Xu P C 2003 *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series* **19** 677
- [3] Zhang W, Yao M H 2006 *Chaos, Solitons and Fractals* **28** 42
- [4] Bao G, Narenmandula, Tubuxin, Eredencang 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1971 (in Chinese) [包刚、那仁满都拉、图布心、额尔顿仓 2007 物理学报 **56** 1971]
- [5] Zhu S Q, Yang M, Zhang X H, Min L Q 2005 *Journal of University of Science and Technology Beijing* **27** 635 (in Chinese) [朱淑芹、杨森、张先华、闵乐泉 2005 北京科技大学学报 **27** 635]
- [6] Zhou T S, Chen G R, Yang Q G 2004 *Chaos, Solitons and Fractals* **19** 985
- [7] Wang G Y, Qiu S S, Xu Z Y 2006 *Acta Physica Sinica* **55** 3295 (in Chinese) [王光义、丘水生、许志益 2006 物理学报 **55** 3295]
- [8] Wang G Y, Qiu S S, Li H W, Li C F, Zheng Y 2006 *Chinese Physics* **15** 2872
- [9] Qi G Y, Du S Z, Chen G R, Chen Z Q, Yuan Z Z 2005 *Chaos, Solitons and Fractals* **23** 1671
- [10] Liu Y Z, Jiang C S, Lin C S, Sun H 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5131 (in Chinese) [刘扬正、姜长生、林长圣、孙晗 2007 物理学报 **56** 5131]
- [11] Li Z, Chen G R, Halang W A 2004 *Information Sciences* **165** 235
- [12] Chu J Y, Chen Y S 1995 *Journal of Vibration Engineering* **8** 150 (in Chinese) [储景云、陈予恕 1995 振动工程学报 **8** 150]
- [13] Silva C P 1993 *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I* **40** 675
- [14] Marco S 1996 *The Mathematica Journal* **6** 78
- [15] Grebogi C, Ott E, Yorke J A 1983 *Physical Review Letters* **50** 935
- [16] Liang Y, Meng Q, Lu J R 2006 *Technical Acoustics* **25** 463 (in Chinese) [梁勇、孟桥、陆佳人 2006 声学技术 **25** 463]

# Chaotic properties of mechanically and electrically coupled nonlinear dynamical systems<sup>\*</sup>

Zhang Qi-Chang<sup>1,2)</sup> Tian Rui-Lan<sup>1)†</sup> Wang Wei<sup>1)</sup>

<sup>1</sup> *Department of Mechanics, School of Mechanical Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China*

<sup>2</sup> *State Key Laboratory of Engines, Tianjin University, Tianjin 300072, China*

(Received 17 August 2007; revised manuscript received 27 September 2007)

## Abstract

Based on the Silnikov criterion, the chaotic properties of mechanically and electrically coupled nonlinear dynamical systems were discussed. Using Cardano formula and series solution of differential equation, the eigenvalue problem and existence of homoclinic orbit were studied respectively. A rigorous proof of the existence of Silnikov-sense Smale horseshoe chaos was presented and some conditions leading to chaos were obtained. The space trajectory, Lyapunov exponent and Lyapunov dimension were investigated via numerical simulation, which showed that chaotic attractors exist in the non-linear dynamical systems.

**Keywords** : chaotic system, Lyapunov exponent, Silnikov theorem, coupling

**PACC** : 0545, 0540

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10372068) and the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (Grant No. 20060056005).

<sup>†</sup> E-mail : yxwtrl@tju.edu.cn