

小世界生物神经网络的相干共振研究^{*}

周小荣 罗晓曙[†]

(广西师范大学物理与电子工程学院, 桂林 541004)

(2007 年 6 月 1 日收到, 2007 年 8 月 25 日收到修改稿)

研究了无外界周期信号时 Hodgkin-Huxley 模型小世界生物神经网络的非线性响应. 数值模拟结果显示: 当噪声强度取某一有限值时, 峰序列有序度可以达到最大, 即产生相干共振现象. 同时发现: 随着网络规模 N 的变化, 相干共振系数 cv 的极小值不是一个, 而是多个. 这表明相干共振可发生在神经元集群数目特定的不同规模的网络中.

关键词: 相干共振, 有序度, 小世界网络, 生物神经网络

PACC: 0590

1. 引 言

1981 年, Benzi 及其合作者^[1]在研究周期性出现的冰川期时发现存在随机共振这一奇异现象. 在随后的几十年里, 人们深入研究了許多系统(如光学系统、电路系统和神经系统等)的随机共振现象. 他们发现, 随机共振是通过非线性系统与噪声、外界弱周期信号发生非线性协同实现的. 然而实际的非线性系统, 包括实际的神经元, 却不可能经常面临外界输入周期信号. 那么, 没有外界周期信号刺激的非线性系统, 包括神经元, 会不会由噪声协同而产生随机自共振效应呢? 这是在随机共振被验证后从事物理学研究和神经科学研究的工作者非常感兴趣的研究课题.

1993 年, Gang 等人^[2]发现, 在没有外界弱周期信号输入的情况下, 非线性系统输出变得有序, 显示出类似随机共振的行为. 这种现象称为“一致共振”或“相干共振”(coherence resonance, CR)或“自治随机共振”(autonomous stochastic resonance, ASR). 相干共振比随机共振更接近于自然, 因而有更广泛的意义, 受到更多的关注.

近年来, 人们用许多可兴奋系统如 Integrate-and-fire (IF) 模型^[3]、Hindmarsh-Rose (HR) 模型^[4]、FitzHugh-Nagum (FN) 模型^[5,6]和 Hodgkin-Huxley (HH)

模型^[7-16]等来研究神经系统的相干共振现象. 在这些研究中, 有通过相干因子、发火时间的均方差、膜电势的均方差来研究系统的一致性的^[10-13,15,16], 有认为一致共振发生在膜面积最优尺寸处^[5,7]的, 也有认为一致共振发生在一定噪声强度处的^[8]. 此外, Schmid 等研究了通道噪声与一致性的关系, 得出: 当膜面积很小时, 通道噪声很大, 发生内部相干共振^[14]. Wang 等研究了交叉耦合的 HH 神经网络, 发现当网络规模即神经元个数或突触噪声最优时, 系统整体行为为最一致^[16]. Lago-Fernandez 等则认为: 随机网络能快速反应, 但无一致振荡; 规则网络正相反; 而小世界网络既能快速反应, 又有一致振荡^[12]. Wang 等用 HH 模型的一个简化版本 Morris-Lecar (ML) 模型研究发现: 当概率 p 为中间某一值时(不是 $p = 1.0$), 神经元发放最一致, 膜电势的均方差随概率 p 增大而减小^[15].

目前许多研究结果已表明: 人脑真实的生物神经网络系统是小世界网络结构^[11,12,17-21], 因此我们以研究神经元电位变化的经典模型——HH 模型为节点的动力学方程, 构造了小世界连接的人工生物神经网络, 然后研究这个网络的相干共振行为, 并试图给出理论解释. 特别有意义的是, 我们发现了网络规模 N 变化时, 相干共振系数 cv 的极小值不是一个, 而是存在多个极小值. 这表明相干共振可发生在神经元集群数目特定的不同规模的网络中.

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 70571017)和广西研究生教育创新计划项目(批准号: 2006106020809M36)资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: lxs@mailbox.gxnu.edu.cn

2. 模型和相干共振系数

本文构造的小世界连接的人工生物神经网络模型^[11],可用下列方程描述:

$$C_m \frac{dV_i}{dt} = I_{K(\text{ion})} + I_{K(\text{syn})} + I_{K(\text{ext})} + \frac{c}{N} \sum_{j=1}^N a_{ij} V_j \quad (1)$$

$$\frac{dm_i}{dt} = \alpha_{mi}(V_i)(1 - m_i) - \beta_{mi}(V_i)m_i, \quad (2)$$

$$\frac{dh_i}{dt} = \alpha_{hi}(V_i)(1 - h_i) - \beta_{hi}(V_i)h_i, \quad (3)$$

$$\frac{dn_i}{dt} = \alpha_{ni}(V_i)(1 - n_i) - \beta_{ni}(V_i)n_i, \quad (4)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, N.$$

方程(1)左边的 C_m 是膜电容, V_i 是第 i 个神经元的跨膜电位, 右边前三项 $I_{K(\text{ion})}$, $I_{K(\text{syn})}$, $I_{K(\text{ext})}$ 分别是细胞内离子电流、细胞的突触电流和外加刺激电流. 其中细胞内离子电流 $I_{K(\text{ion})}$ 满足下式:

$$I_{K(\text{ion})} = -g_{\text{Na}}m_i^3h_i(V_i - V_{\text{Na}}) - g_{\text{K}}n_i^4(V_i - V_{\text{K}}) - g_{\text{L}}(V_i - V_{\text{L}}), \quad (5)$$

式中 V_{Na} , V_{K} 分别是 Na^+ , K^+ 的平衡电位, V_{L} 是氯和其他一些离子泄漏电流为零时的电位. g_{Na} , g_{K} , g_{L} 分别是各离子通道的最大电导, m_i 是 Na^+ 通道中一种门开通的概率(这样的门有三个), h_i 是 Na^+ 通道中另一种门开通的概率(这样的门只有一个), 而 n_i 则是 K^+ 通道中每个门开通的概率(这样的门有四个).

细胞的突触电流 $I_{K(\text{syn})}$ 满足下式:

$$\tau_c \frac{dI_{K(\text{syn})}}{dt} = -I_{K(\text{syn})} + \sqrt{2D}\xi_i, \quad (6)$$

式中 ξ_i 是满足均值为零, 且 $\langle \xi_i(t)\xi_j(s) \rangle = D\delta_{ij}\delta(t-s)$ 的高斯白噪声, D 为功率, 表示噪声的强度. τ_c 是 Ornstein-Uhlenbeck 噪声的相关时间, 这里我们取 $\tau_c = 2.0$ ms. 而外加刺激电流 $I_{K(\text{ext})} = 6.2$ mA.

方程(1)右边的最后一项 $\frac{c}{N} \sum_{j=1}^N a_{ij} V_j$ 为耦合项, c 为耦合强度, a_{ij} 为复杂网络的耦合矩阵元: 当神经元 i 与 j 相连时 $a_{ij} = 1$; 否则 $a_{ij} = 0$ ($i \neq j$); 且 $a_{ii} = -\sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}$. 本模型采用 Newman 和 Watts(NW) 提出的小世界网络^[22], 它与 WS 网络^[17] 不同之处在于: NW 网络是加边重连, 而 WS 网络是断键重连. 当概率 p 足够小而 N 足够大时, NW 模型与 WS 模型是等价的. 因为 NW 网络总是连通的, 而 WS 网络则有

可能不连通, 所以, NW 网络比 WS 网络更易于做理论分析.

方程(2)(3)(4)中的 α_{mi} , β_{mi} , α_{hi} , β_{hi} , α_{ni} , β_{ni} 均是离子的浓度、温度以及跨膜电位有关的量. 有关参数的选取, 与文献[23, 24] 相同.

为了定量地描述神经元输出有序的程度, 参照文献[25] 的做法, 引入峰峰间隔的标准差与平均值的比值 cv 作为衡量峰序列有序度的标准, 称为相干共振系数. cv 的具体形式如下:

$$cv = \frac{\sqrt{\overline{T^2} - \overline{T}^2}}{\overline{T}} = \frac{\sqrt{\text{var}(T)}}{\overline{T}}, \quad (7)$$

式中 \cdot 表示取平均值, $\overline{T} = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum (t_{i+1} - t_i) / M$; $\text{var}(T)$ 表示方差, $T^2 = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum (t_{i+1} - t_i)^2 / M$, 这里 t_i 是第 i 个脉冲发放的时间, M 是给定时间内脉冲的总数. 对于 poisson 序列, cv 趋近于 1. 若 $cv < 1$, cv 值越小则说明序列越有规律, 对于周期性确定序列, $cv = 0$.

3. 数值模拟结果及分析

本文采用四阶龙格-库塔算法求解非线性随机微分方程(1)–(4), 计算积分步长为 0.01. 为了验证结果的可靠性, 去掉数值积分前 400 ms 的数据, 此时生物神经网络的响应已达到稳定, 然后在 $t \in [400, 1000]$ 区间统计运算结果.

图 1(a)(b)(c)(d) 分别是小世界连接的人工生物神经网络模型中某一神经元在噪声强度 $D = 13, 20, 120, 220$ 时的输出电压图. 从峰序列分布的角度看, 当噪声强度较小 ($D = 13$) 时, 峰电位基本上是随机分布的(图 1(a)). 而当强度过大 ($D = 120, 220$) 时, 噪声在变量中所占的比例过大, 导致峰电位趋向于不规则分布(图 1(c)和(d)). 只有当强度适中 ($D = 20$) 时, 峰电位分布才变得基本均匀(图 1(b)).

图 2 是相干共振系数 cv 随噪声强度 D 的变化曲线. 从图 2(a)和(b)中可看出加边概率 p 以及外加直流 I 对相干共振系数 cv 的影响均较微弱, 此外, 当取某个噪声强度值时, 相干共振系数 cv 有最小值, 即网络产生了共振. 所以, H-H 小世界生物神经网络在噪声存在的情况下, 系统能够通过噪声的作用达到一种较有序的状态, 即系统可以产生相干共振.

图 3(a)所示的是噪声强度 D 取不同值时, 相干

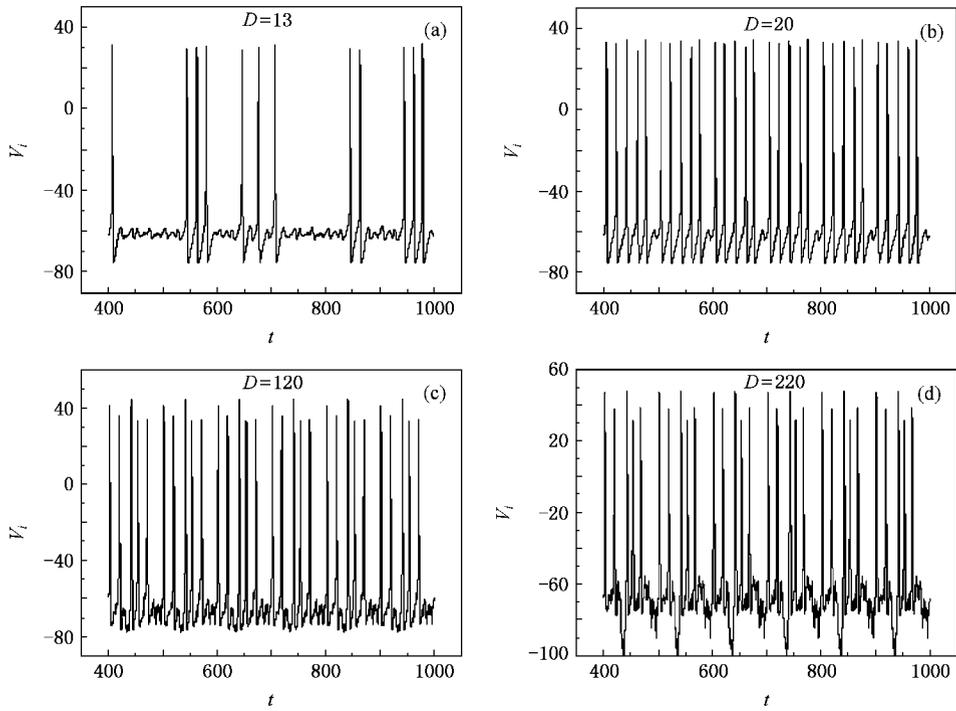


图 1 在不同噪声强度下某个神经元的输出电压的峰序列 (a) $D = 13$ (b) $D = 20$ (c) $D = 120$ (d) $D = 220$ (各图均取 $p = 0.01, c = 0.01, N = 100, K = 4$)

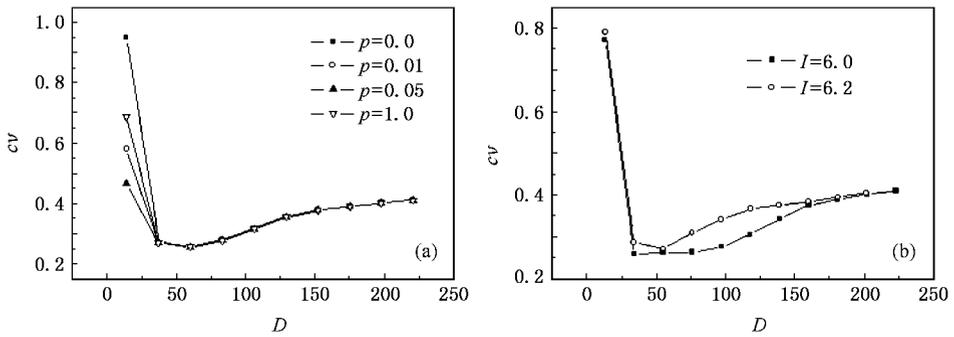


图 2 相干共振系数 c_v 随噪声强度 D 的变化曲线 ($c = 0.01$) (a) 外加电流 $I = 6.2 \text{ mA}$, 加边概率 $p = 0.0, 0.01, 0.05, 1.0$; (b) $p = 0.01, I = 6.0, 6.2 \text{ mA}$

共振系数 c_v 随网络规模 N (即神经元个数) 的变化曲线. 从图中可以看出, 随网络规模 N 的变化, 相干共振系数 c_v 的极小值不是一个, 而是多个. 表明相干共振可发生在神经元集群数目特定的不同规模的网络中. 图 3(b) 是对应图 3(a) 中网络规模 $N = 300$, 噪声强度 $D = 20$ 时的输出峰序列. 该输出峰序列跟图 1(b) 的峰序列 ($N = 100, D = 20$) 相比, 变得更加有序. 在其他条件均相同, 只是网络规模由 $N = 100$ 变到 $N = 300$ 时, 相干共振系数则由 $c_v = 0.24078$ 变到 $c_v = 0.04477$, c_v 值越小序列越有规律 (即越有

序) 这也说明相干共振系数 c_v 确实能很好地刻画神经元输出有序的程度.

下面我们试图对产生上述相干共振现象的原因给出理论解释: 由于神经元是一个阈值系统, 膜电位若超过阈值, 则发生放电, 低于阈值, 则不放电. 对于完全确定性的静息的神经元, 其静息电位随时间变化是稳定不变的. 由于静息电位的非线性特性, 在弱噪声的作用下, 靠近阈值的静息电位随时间变化不再是稳定不变的, 而是变成一个幅度较小的具有一定内在 (不同于外加) 周期性的阈下振荡^[9]. 随着噪

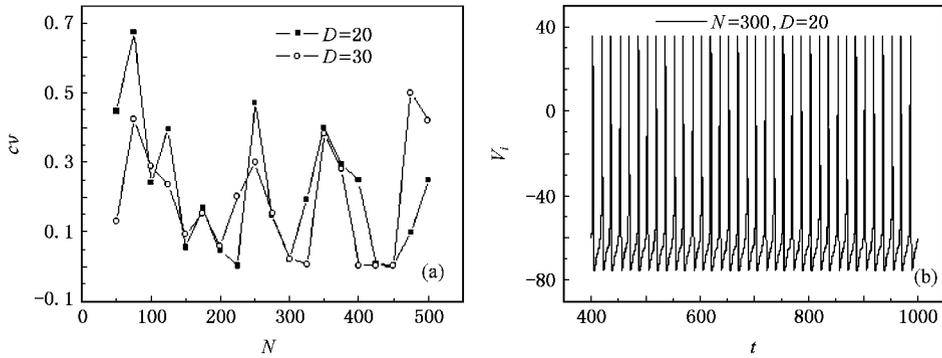


图3 (a)相干共振系数 c_v 随网络规模 N (神经元个数) 的变化曲线 $p=0.01, c=0.01, I=6.2 \text{ mA}$ (b) $N=300, D=20$ 时的峰序列

声强度的增加,在阈下振荡的峰值处膜电位较为容易跨越放电阈值产生放电.若噪声强度中等,则放电峰峰间隔基本为该内在阈下振荡的周期的整数倍,系统能够通过噪声的作用达到一种较有序的状态.噪声强度较大时,放电峰峰间隔失去整数倍特征而变得混乱.可以看出,该内在的具有一定周期性的阈下振荡在一定程度上等同于随机共振的外加周期信号,是产生内在整数倍放电节律的基础.

4. 结 论

本文研究了 H-H 小世界神经网络的相干共振

现象,研究了噪声激发网络输出电压峰序列的有序度与噪声强度的关系.模拟结果显示:当噪声强度取某一有限值时,峰序列有序度可以达到最大,即产生相干共振现象.此外还研究了这种有序度与网络规模 N 的关系,我们发现:随着网络规模 N 的变化,相干共振系数 c_v 的极小值不是一个,而是多个.这表明相干共振可发生在神经元集群数目特定的不同规模的网络中.本文的研究结果对人们理解和解释神经网络中的有序、规则以及同步等动力学行为具有一定意义.

- [1] Benzi R, Sutera A, Vulpiani A 1981 *J. Phys. A* **14** 1453
- [2] Gang H, Ditzinger T, Ning C Z 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 807
- [3] Lindner B, Schimansky-Geier L 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 2934
- [4] Shi X, Lu Q S 2005 *Chin. Phys. Lett.* **14** 1088
- [5] Casado J M 1997 *Phys. Lett. A* **235** 489
- [6] Stocks N G, Mannella R 2001 *Phys. Rev. E* **64** 030902
- [7] Schmid G, Hanggi P 2006 *Mathematical Biosciences* doi: 10.1016/j.mbs. 2006. 08. 024
- [8] Lee S G, Neiman A 1998 *Phys. Rev. E* **57** 3292
- [9] Tanabe S, Sato S, Pakdaman K 1999 *Phys. Rev. E* **60** 7235
- [10] Wang Y Q, Chik D T W 2000 *Phys. Rev. E* **61** 740
- [11] Kwon O, Moon H T 2002 *Phys. Lett. A* **298** 319
- [12] Lago-Fernandez L F, Huerta R 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 2758
- [13] Yu Y, Wang W 2001 *Phys. Rev. E* **63** 021907
- [14] Schmid G, Goychuk I 2003 *Phys. A* **325** 165
- [15] Wang M S, Hou Z H 2006 *Chin. Phys. Lett.* **15** 2553
- [16] Wang M S, Hou Z H 2005 *Phys. Lett. A* **334** 93
- [17] Watts D J, Strogatz S H 1998 *Nature* **393** 440
- [18] Lin M, Chen T L 2005 *Phys. Rev. E* **71** 016133
- [19] Wang Q Y, Lu Q S 2005 *Chin. Phys. Lett.* **22** 1329
- [20] Simard D, Nadeau L, Krüger H 2005 *Phys. Lett. A* **336** 8
- [21] Aguirre C, Huerta R, Corbacho F, Pascual P 2002 *Artificial Neural Networks* **2415** 27
- [22] Newman M E J, Watts D J 1999 *Phys. Rev. E* **60** 7332
- [23] Bazzo F, Zalani L, Csardi G 2003 *Phys. Lett. A* **311** 13
- [24] Casado J M 2003 *Phys. Lett. A* **310** 400
- [25] Song Y, Zhao T J, Liu J W 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4020 (in Chinese) [宋 杨, 赵同军, 刘金伟 2006 物理学报 **55** 4020]

Coherence resonance in neural networks with small-world connections^{*}

Zhou Xiao-Rong Luo Xiao-Shu[†]

(College of Physics and Electronic Engineering ,Guangxi Normal University , Guilin 541004 , China)

(Received 1 June 2007 ; revised manuscript received 25 August 2007)

Abstract

The nonlinear response of small-world biological nerve network in the Hodgkin-Huxley model in the absence of external periodic signal is studied. Simulation results show the ordered degree of spike sequence may reach a maximum when the strength of noise is a certain limited value. Namely, coherence resonance phenomenon is produced in small-world biology nerve network. The number of minima of coherence resonance coefficient cv is more than one. This indicates that coherence resonance may occur in different scales of networks.

Keywords : coherence resonance , ordered degree , small-world network , biological nerve network

PACC : 0590

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 70571017) and the Innovation Project of Guangxi Graduate Education (Grant No. 2006106020809M36).

[†] Corresponding author. E-mail : lxs@mailbox.gxnu.edu.cn