

使用离焦望远镜系统合成轴上平顶光束的一种新方法^{*}

赵保银 吕百达[†]

(四川大学激光物理与化学研究所, 成都 610064)

(2007 年 6 月 27 日收到, 2007 年 9 月 19 日收到修改稿)

提出了用平顶多高斯光束作为理想光束和使用离焦望远镜系统合成轴上平顶光束的一种新方法. 在近轴近似下, 基于柯林斯衍射积分公式推导出轴上光场和入射光场的解析表达式, 并做了物理分析. 光束阶数 N , 平顶长度参数 L , 平顶中心位置 z_0 和纵向中心空间频率 S_0 对轴上光强分布的影响用数值计算例做了说明. 比较表明, 该方法优于文献中使用矩形函数模拟理想光束合成轴上平顶光束的方法.

关键词: 轴上平顶光束, 平顶多高斯光束, 离焦望远镜系统, 傅里叶变换

PACC: 4000, 4215E, 4225, 4230K

1. 引言

在激光材料加工, 激光准直和激光测量等实际应用中, 希望使用在较长传输距离内轴上光强近似保持不变的光束. 这类光束携带有限能量并有较长的准直范围, 被称为轴上平顶光束, 即近似无衍射光束. 已有许多文献对这类光束的特性进行了研究^[1-9]. 可用轴棱锥, 二元光学元件等多种方法在实验上得到近似无衍射光束^[7-9]. 文献 [2] 采用空间频率方法, 以矩形函数作为理想的轴上光强分布函数构建了轴上平顶光束, 并详细研究了这种合成轴上平顶光束的方法. 本文以平顶多高斯光束作为理想情况下轴上光场的数学模型, 提出利用离焦望远镜系统合成轴上平顶光束的新方法, 在激光加工等领域有实际应用价值, 并将所得结果与文献 [2] 做了比较, 说明本文方法的优点.

2. 理论模型

在如图 1 所示的光学系统中, 焦距分别为 f_1, f_2 的薄透镜 L_1 和 L_2 组成望远镜系统, 两透镜间距 $d = f_1 + f_2 - \Delta$, Δ 为离焦量, 且 $\Delta \neq 0$. 入射面 P_1 与透镜 L_1 的距离为 a , 入射光场为 $E_0(\rho)$, ρ 为入射面上的径向坐标. $z = 0$ 面 P_2 位于透镜 L_2 后方 b 处.

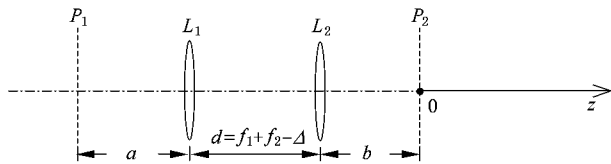


图 1 产生轴上平顶光束的离焦望远镜系统
从入射面到 z 处的 $ABCD$ 矩阵为^[10]

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{(b+z)\Delta - f_2\Delta + f_2^2}{f_1f_2} & -\frac{\alpha(b+z)\Delta + (b+z)\Delta - f_1}{f_1f_2} + \frac{(a\Delta - f_1\Delta + f_1^2)f_2 + (f_1 - a)f_2^2}{f_1f_2} \\ -\frac{\Delta}{f_1f_2} & -\frac{a\Delta - f_1\Delta + f_1^2}{f_1f_2} \end{bmatrix} \quad (1)$$

^{*} 国家自然科学基金(批准号:10574097)资助的课题.

[†] E-mail: Baidalu0@tom.com

在近轴近似下,根据 Collins 衍射积分公式^[11],得 z 处的出射光场为

$$E(r, z) = -\frac{ik}{B} \exp(ik\xi) \exp\left(\frac{ikD}{2B}r^2\right) \times \int_0^\infty E_0(\rho) J_0\left(\frac{kr\rho}{B}\right) \exp\left(\frac{ikA}{2B}\rho^2\right) \rho d\rho, \quad (2)$$

式中, $\xi = a + b + d + z$, $k = 2\pi/\lambda$, λ 为波长, r 为出射面上的径向坐标. 令(2)式中 $r = 0$ 得轴上光场

$$E(0, z) = -\frac{ik}{B} \exp(ik\xi) \int_0^\infty E_0(\rho) \exp\left(\frac{ikA}{2B}\rho^2\right) \rho d\rho, \quad (3)$$

当(1)式中 P_1 和 P_2 面的位置满足 $a = f_1 - f_1^2/\Delta$, $b = f_2 - f_2^2/\Delta$ 时, $ABCD$ 矩阵简化为

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{z\Delta}{f_1 f_2} & \frac{f_1 f_2}{\Delta} \\ -\frac{\Delta}{f_1 f_2} & 0 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

矩阵元 A 随传输距离 z 线性变化, 矩阵元 B 为与 z 无关的常数. 设 $f = f_1 f_2 / \Delta$, 将(4)式代入(3)式得

$$E(0, z) = -i2\pi f \exp(ik\xi) \int_0^\infty \psi_0(S) \exp(-i2\pi S z) dS, \quad (5)$$

式中, $S = \rho^2 / (2\lambda f^2)$, $\psi_0(S) = E_0(\rho)$. (5)式表明, 轴上光场 $E(0, z)$ 为入射光场 $\psi_0(S)$ 在 z 正半空间 ($z > 0$) 的傅里叶变换. 在近轴近似下 $S = \lambda^{-1} - F_z$, F_z 为 z 方向空间频率, 因而变量 S 为 z 方向(纵向)空间频率^[2].

$\psi_0(S)$ 的傅里叶变换为

$$\begin{aligned} t(z) &= \int_{-\infty}^\infty \psi_0(S) \exp(-i2\pi S z) dS \\ &= \int_0^\infty \psi_0(S) \exp(-i2\pi S z) dS \\ &\quad + \int_{-\infty}^0 \psi_0(S) \exp(-i2\pi S z) dS. \end{aligned} \quad (6)$$

在(5)式中用 $\psi_0(S - S_c)$ 代替 $\psi_0(S)$, $S_c = \rho_c^2 / (2\lambda f^2)$ 为纵向中心空间频率^[2], 入射面径向坐标 ρ_c 为常数 ($\rho_c > 0$). 将(6)式代入(5)式, 得轴上光强

$$\begin{aligned} I(0, z) &= |E(0, z)|^2 \\ &= (2\pi f)^2 |t(z) - g(z)|^2, \end{aligned} \quad (7)$$

式中, $g(z) = \int_{-\infty}^{-S_c} \psi_0(S_1) \exp(-i2\pi S_1 z) dS_1$, $S_1 = S - S_c$. $g(z)$ 随 S_c 的增大而减小, 当 $S_c \rightarrow \infty$ 时, $g(z) \rightarrow 0$, $t(z)$ 为理想情况下的轴上光场分布函数. 由

(6)(7)式知, 以任意具有平顶分布的函数(如矩形函数^[2], 超高斯光束^[12], 平顶高斯光束^[13] 和平顶多高斯光束^[14] 等)作为理想的轴上光场分布函数 $t(z)$ 的数学模型, 都能实现轴上光强平顶分布.

现以平顶多高斯光束模型为例^[14], 设

$$t(z) = A_0 \sum_{m=-N}^N \exp\left[-\left(\frac{z - z_c - mL}{L}\right)^2\right], \quad (8)$$

($N = 1, 2, 3, \dots$),

式中, N 为阶数, 归一化因子

$$A_0 = 1 / \sum_{m=-N}^N \exp(-m^2),$$

z_c 为平顶中心位置, 平顶长度参数 L 定义为高斯模的最大值点与最大值的 $1/e$ 点在 z 轴上的距离.

$t(z)$ 的逆傅里叶变换为

$$\begin{aligned} \psi_0(S - S_c) &= \int_{-\infty}^\infty t(z) \exp[i2\pi(S - S_c)z] dz \\ &= A_0 L \sqrt{\pi} \exp\{-[L\pi(S - S_c)]^2\} \\ &\quad \times \sum_{m=-N}^N \exp[i2\pi(S - S_c)(z_c + mL)]. \end{aligned} \quad (9)$$

(9)式右边的 S 和 S_c 分别用入射面径向坐标 ρ, ρ_c 代换, 得入射光场

$$\begin{aligned} E_0(\rho) &= A_0 L \sqrt{\pi} \exp\left[\frac{ik}{2f^2}(\rho^2 - \rho_c^2)z_c\right] \\ &\quad \times \exp\left\{-\left[\frac{Lk}{4f^2}(\rho^2 - \rho_c^2)\right]^2\right\} \\ &\quad \times \sin\left[\frac{kL(2N+1)}{4f^2}(\rho^2 - \rho_c^2)\right] \\ &\quad \left/ \sin\left[\frac{kL}{4f^2}(\rho^2 - \rho_c^2)\right], \right. \end{aligned} \quad (10)$$

入射光强为

$$\begin{aligned} I_0(\rho) &= |E_0(\rho)|^2 \\ &= (A_0 L \sqrt{\pi})^2 \exp\left\{-2\left[\frac{Lk}{4f^2}(\rho^2 - \rho_c^2)\right]^2\right\} \\ &\quad \times \left\{\sin\left[\frac{kL(2N+1)}{4f^2}(\rho^2 - \rho_c^2)\right]\right. \\ &\quad \left./ \sin\left[\frac{kL}{4f^2}(\rho^2 - \rho_c^2)\right]\right\}^2, \end{aligned} \quad (11)$$

(11)式表明, $I_0(\rho)$ 与 N, L 和 ρ_c 有关, 在 $\rho = \rho_c$ 处得入射光强最大值 $I_{0, \max}(\rho) = A_0^2 L^2 \pi (2N+1)^2$. 入射光场的相位 $\varphi = k(\rho^2 - \rho_c^2)z_c / (2f^2)$, 与 N 和 L 无关. φ 随入射面径向坐标 ρ 的变化曲线为抛物线, $\varphi|_{\rho=0} = -k\rho_c^2 z_c / (2f^2)$, $\varphi|_{\rho=\rho_c} = 0$, 即光强最大值处相位为零.

将(9)式代入(2)式, 得出射光场

$$E(r, z) = -\frac{ikA_0L\sqrt{\pi}}{f} \exp(ik\xi - i2\pi S_c z) \times \sum_{m=-N_0}^N \int_0^\infty \exp\left[-\left(\frac{Lk}{4f^2}\rho^2 - \pi LS_c\right)^2\right] \times \exp\left\{-i\left(\frac{k\rho^2}{2f^2} - 2\pi S_c\right)(z - z_c - mL)\right\} \times J_0\left(\frac{kr\rho}{f}\right)\rho d\rho. \quad (12)$$

当 $L \rightarrow \infty$ 时，利用(9)式将入射光场简化为 $E_0(\rho) = 2\lambda f^2 \delta(\rho^2 - \rho_c^2)$ ，式中 $\delta(\rho^2 - \rho_c^2)$ 为狄拉克 δ 函数。根据(2)式，出射光场

$$E(r, z) = C_0 \exp(i\beta z) J_0(\alpha r),$$

式中 $C_0 = -i2\pi f \exp[ik(a + b + d)]$ ， $\beta = k[1 - \rho_c^2 / (2f^2)]$ ， $\alpha = k\rho_c / f$ ， $J_0(\cdot)$ 为零阶贝塞尔函数，在近轴近似下有 $\alpha^2 + \beta^2 = k^2$ 。

(12)式中令 $r = 0$ 得轴上光场

$$E(0, z) = -i\pi f \exp(ik\xi - i2\pi S_c z) A_0 \times \sum_{m=-N}^N \exp\left[-\left(\frac{z - z_c - mL}{L}\right)^2\right] \times \left\{1 + \operatorname{erf}\left[\pi LS_c - i\left(\frac{z - z_c - mL}{L}\right)\right]\right\}. \quad (13)$$

轴上光强

$$I(0, z) = (\pi f)^2 \left| A_0 \sum_{m=-N}^N \exp\left[-\left(\frac{z - z_c - mL}{L}\right)^2\right] \times \left\{1 + \operatorname{erf}\left[\pi LS_c - i\left(\frac{z - z_c - mL}{L}\right)\right]\right\} \right|^2. \quad (14)$$

(14)式表明，轴上光强 $I(0, z)$ 与 N, L, z_c, S_c 有关。当 $LS_c \rightarrow \infty$ 时，误差函数 $\operatorname{erf}[\pi LS_c - i(z - z_c - mL)/L] = 1$ ，轴上光场

$$E(0, z) = -i2\pi f \exp(ik\xi) \int_{-\infty}^\infty \psi_0(S - S_c) \times \exp(-i2\pi Sz) dS,$$

为入射光场 $\psi_0(S - S_c)$ 的傅里叶变换。此时，轴上光强 $I(0, z) = (2\pi f)^2 |\psi(z)|^2$ 。

由(9)式，得光功率 P_0 为

$$P_0 = 2\pi\lambda f^2 \int_0^\infty |\psi_0(S - S_c)|^2 dS = \frac{\lambda\pi^{3/2} L f^2 A_0^2}{2\sqrt{2}} \sum_{m_1=-N}^N \sum_{m_2=-N}^N \exp\left[-\frac{(m_1 - m_2)^2}{2}\right] \times \left\{2 + \operatorname{erf}\left[\frac{\sqrt{2}(m_1 - m_2)}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\pi LS_c\right] - \operatorname{erf}\left[\frac{\sqrt{2}(m_1 - m_2)}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\pi LS_c\right]\right\}, \quad (15)$$

(15)式表明，在 L 取有限值时，光功率为有限值，即为物理上可实现的近似无衍射光束。

3. 数值计算例和结果分析

利用上述理论公式进行了大量的数值计算和比较。典型例示于图2—4。计算时取波长 $\lambda = 1.06 \mu\text{m}$ ，平顶中心 $z_c = 1000 \text{ mm}$ ，透镜焦距 $f_1 = f_2 = 1000 \text{ mm}$ ，离焦量 $\Delta = f_1 = f_2$ 。由此得 $f = 1000 \text{ mm}$ ， $a = b = 0$ ，即入射面 P_1 和 $z = 0$ 面 P_2 分别位于透镜 L_1 和 L_2 处。

图2为轴上的归一化光强分布。图2(a)表明，当 $LS_c \geq 1.5$ 时，轴上光强在 $z = z_c$ 附近形成平顶。 $LS_c = 1.5, 2$ 时的两条曲线重合，即平顶的长度不随

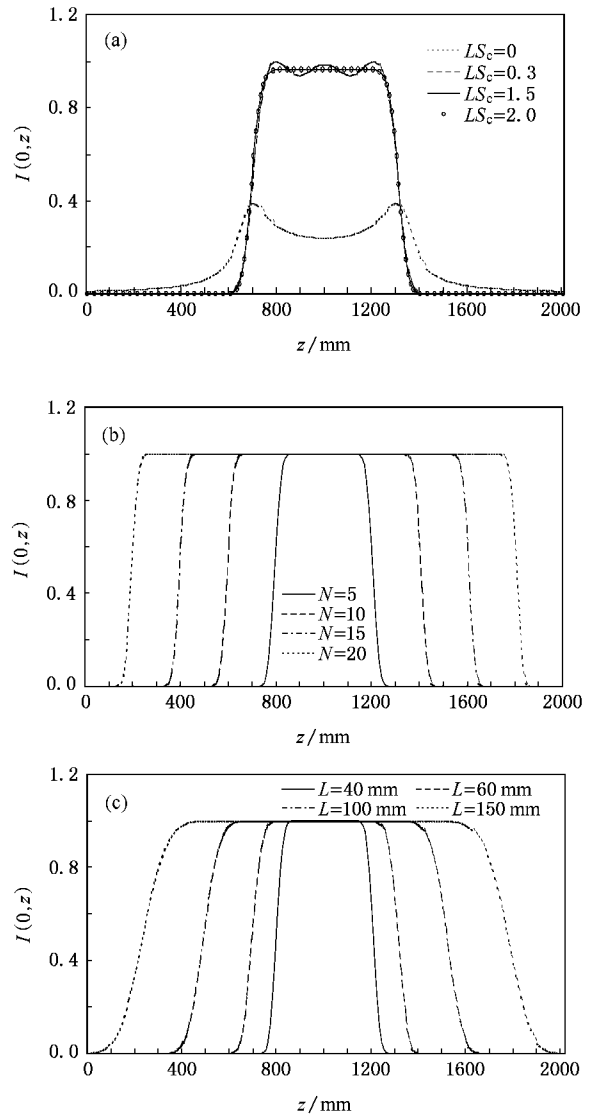


图2 轴上归一化光强分布 (a) $N = 5, L = 60 \text{ mm}$; (b) $L = 40 \text{ mm}, LS_c = 1.5$; (c) $N = 5, LS_c = 1.5$

参数 LS_c 的增加而变化. 当 $LS_c < 1.5$ (如 $LS_c = 0.3$, 0) 时, 轴上光强在 $z = z_c$ 附近不再形成平顶. 由图 2 (b)(c) 知, 随 N 和 L 增加, 轴上光强平顶长度增加, 但平顶部分的光强不发生变化, 且平顶边沿随 L 增加而变平缓.

图 3 为出射光场在横平面上的归一化光强分布. 图中实线为理想零阶贝塞尔光束的横向光强分布, $L = 100$ mm (与图 2(c) 对应). 图 3(a) 中四条曲线几乎重合, 即在轴上光强平顶范围内 (618 mm $< z < 1382$ mm), 横平面上的光强分布与零阶贝塞尔光束类似, 几乎不随传输距离变化. 由图 3(b) 知, 在轴上光强的平顶范围以外, 横平面上的光强分布与零阶贝塞尔光束有显著不同, 且随传输距离而变.

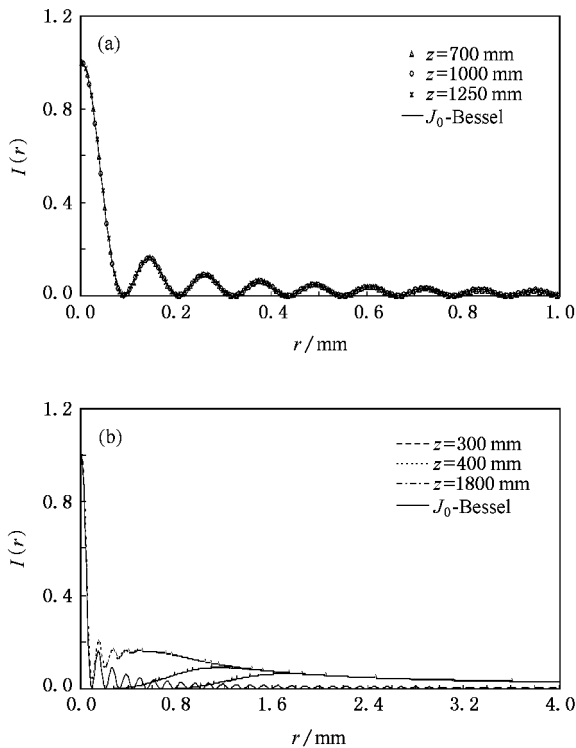


图 3 横平面上的归一化光强分布 ($N = 5$, $L = 100$ mm, $LS_c = 1.5$)

图 4 为入射面上的归一化光强分布, 计算参数与图 2 一致. 图 4(a) 表明, 当 $\rho_c = 0$ 时, 入射光强在入射面上形成中央亮斑. 随 ρ_c 增大, 光强最大值保持不变, 但中央亮斑逐渐变为光强最大值位于半径 $\rho = \rho_c$ 亮环, 与 $LS_c = 0, 0.3, 1.5, 2.0$ 对应, $\rho_c = 0, 3.26$ mm, 7.28 mm, 8.41 mm, 且亮环宽度也逐渐减小. 由图 4(b)(c) 知, 随 N 和 L 增加, 入射面上的光强最大值增加, 但亮环宽度减小.

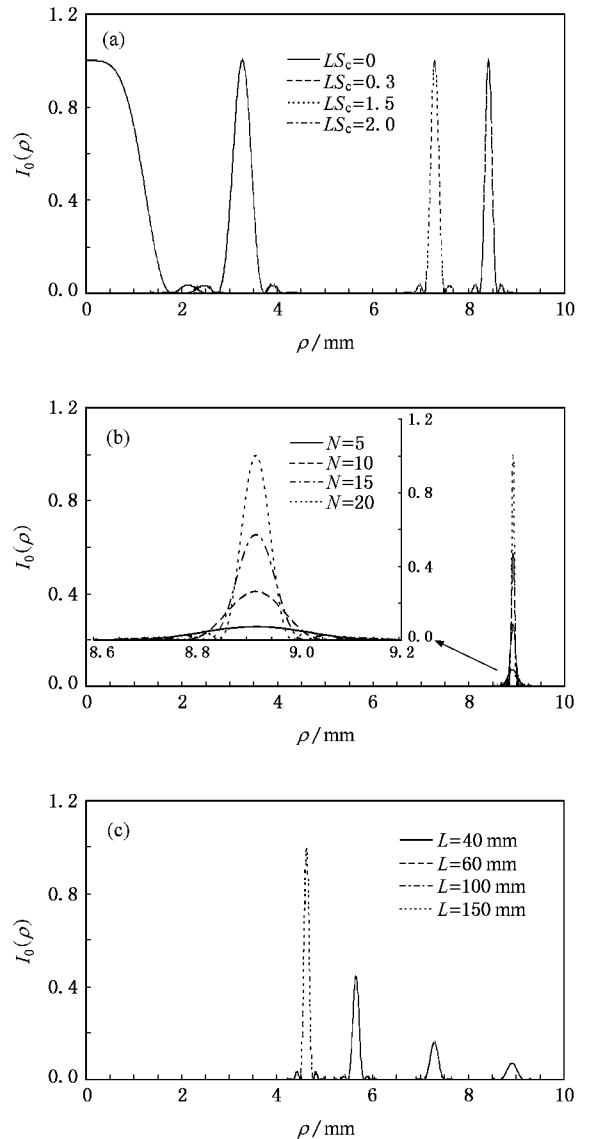


图 4 入射面上的归一化光强分布 (a) $N = 5$, $L = 60$ mm; (b) $L = 40$ mm, $LS_c = 1.5$; (c) $N = 5$, $LS_c = 1.5$

4. 结 论

本文提出了利用望远镜系统合成轴上平顶光束的一种新方法. 以平顶多高斯光束作为理想情况下轴上光场的数学模型, 在近轴近似下从 Collins 衍射积分公式出发推导出轴上光场和入射光场的解析表示式. 研究表明, 恰当选择入射面 P_1 和坐标原点 P_2 的位置, 可使理想的轴上光场和入射光场互为 $z > 0$ 半空间的傅里叶变换. 轴上光强分布与阶数 N , 长度参数 L , 平顶中心 z_c 和轴向中心空间频率 S_c 有关. 当 $LS_c \geq 1.5$ 时, 轴上光强成为平顶分布, 平顶长

度随光束阶数 N 和长度参数 L 而变化. 文献 [2] 中以矩形函数作为理想模型, 采用空间频率方法对合成轴上平顶光束的问题做了严格、富有成效的理论研究. 但矩形函数的逆傅里叶变换为 sinc 函数, 由此带来轴上光强分布的振荡困难(见文献 [2] 的图 1—3), 成为“一个在数学和物理上都值得进一步研究的问题”^[2]. 使用矩形函数的另一缺点是轴上光强和入射光强都得不到解析结果, 不便于进行直观的物理分析. 与文献 [2] 比较, 本文以平顶多高斯光束作为理想模型, 不仅克服了轴上光强分布振荡的困难, 而

且得出了轴上和入射光场的解析公式. 此外, 还提出了一种用离焦望远镜系统集成轴上平顶光束的新方法, 并表明在近轴近似下, Collins 衍射积分公式是研究光束变换的一种有效方法. 最后应指出的是, 本文研究结果还可做进一步推广, 有较为广泛的意义. 例如, 离焦望远镜系统的优点是有较多的参数可调节以满足条件. 显然, 也可以用一个傅里叶薄透镜来代替. 此外, 除平顶多高斯光束模型外, 文献中其他平顶光束的数学模型也可用做理想模型, 构建轴上平顶光束.

- [1] Campbell J A, Soioway S 1990 *J. Acoust. Soc. Am.* **88** 2467
 [2] Cao Q, Chi S 2000 *J. Opt. Soc. Am. A* **17** 447
 [3] Herman R M, Wiggins T A 1991 *J. Opt. Soc. Am. A* **8** 932
 [4] Aruga T 2004 *Review of Laser Engineering*. **32** 352
 [5] Liu R, Dong B Z, Yang G Z, Gu B Y 1998 *J. Opt. Soc. Am. A* **15** 144
 [6] Rosen J, Salik B, Yariv A 1995 *J. Opt. Soc. Am. A* **12** 2446
 [7] Meleod J H 1954 *J. Opt. Soc. Am. A* **44** 592
 [8] Zeng X H, Wu F T, Liu L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 791 (in Chinese) [曾夏辉、吴逢铁、刘 岚 2007 物理学报 **56** 791]

- [9] Turunen J, Vasara A, Friberg A T 1988 *Appl. Opt.* **27** 3959
 [10] Lü B D 2003 *Laser Optics* (Beijing: Higher Education Press) p34 (in Chinese) [吕百达 2003 激光光学(北京:高等教育出版社)第 34 页]
 [11] Collins S A 1970 *J. Opt. Soc. Am. A* **60** 1168
 [12] Parent A, Morin M, Lavigne P 1992 *Opt. & Quant. Electron.* **24** 1071
 [13] Gori F 1994 *Opt. Commun.* **107** 335
 [14] Tovar A A 2001 *J. Opt. Soc. Am. A* **18** 1897

A new synthesis method for synthesizing on-axis flat-topped beams by using a defocusing telescope system^{*}

Zhao Bao-Yin Lü Bai-Da[†]

(*Institute of Laser Physics and Chemistry, Sichuan University, Chengdu 610064, China*)

(Received 27 June 2007 ; revised manuscript received 19 September 2007)

Abstract

A new method for synthesizing on-axis flat-topped beams by using a defocusing telescope system is proposed, where the flat-topped multi-Gaussian beam is chosen as the ideal beam. Within the framework of the paraxial approximation and based on the Collins diffraction integral formula, the analytical expressions for the on-axis field and incident field are derived and analyzed physically. The effect of beam order N , flat-top length parameter L , position of the flat-top centre z_c and central longitudinal spatial frequency S_c on the on-axis intensity distribution is illustrated by numerical examples. A comparison of our results with the method for simulating the ideal beam by use of the rectangular function shows the advantages of our method.

Keywords : on-axis flat-topped beam, flat-topped multi-Gaussian beam, defocusing telescope system, Fourier transform

PACC : 4000, 4215E, 4225, 4230K

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10574097).

[†] E-mail : Baidalu0@tom.com