第 57 卷 第 5 期 2008 年 5 月
1000-3290/2008/57(05)/3038-06
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.57,No.5,May,2008


# 二维不可压缩流体 Kelvin-Helmholtz 不稳定性的二次谐波产生*

王立锋[1)] 叶文华[2)3)†] 李英骏[1)]

1)(中国矿业大学(北京),北京 100083)

2)(北京应用物理与计算数学研究所,北京 100088)

3)(浙江大学物理系,杭州 310028)

(2007 年 7 月 24 日收到;2007 年 9 月 13 日收到修改稿)

推导了 Kelvin-Helmholtz(KH)不稳定性二次谐波产生的理论公式,利用该公式得到的二次谐波增长的弱非线性结果与 LARED-S 程序的模拟结果符合.二维模拟定出了 KH 不稳定性单模非线性增长的阈值.

关键词:Kelvin-Helmholtz 不稳定性,二次谐波产生,非线性阈值

PACC:5235,4720,4735

## 1. 引 言

当两种流体的交界面出现切向速度间断时,流体界面是不稳定的,产生 Kelvin-Helmholtz(KH)不稳定性[1].KH 不稳定性出现在许多自然现象中,如由风所引起的水面波,波状云,射流液体的珠化和雾化等.KH 不稳定性在惯性约束聚变(ICF)、超新星爆炸和星系演化、Z-pinch 内爆、大气和海洋混合层、晶体生长等方面有重要作用.Rayleigh-Taylor(RT)或 Richtmyer-Meshkov(RM)不稳定性发展后期,在尖顶头部,轻、重流体沿表面的速度差增大,KH 不稳定性被激发,形成翻滚的'蘑菇'形状结构,之后'蘑菇"状破碎,形成小尺度混合.KH 不稳定性的出现加重了 RT 或 RM 不稳定性后期的非线性发展,大量的小尺度结构被激发,加剧了界面附近流体块团的混合过程.KH 不稳定性还是产生湍流混合的主要物理过程.文献[2—4]总结和讨论了这方面的很多工作.

本文给出了 KH 不稳定性二次谐波产生的弱非线性理论结果,并与二维数值模拟结果进行了比较,数值模拟讨论了初始单模扰动情况 KH 不稳定性的非线性阈值问题.

## 2. 二维 KH 不稳定性的二次谐波理论

在两层不可压缩流体的界面 $F(\boldsymbol{r},t)=0$ 上[5]压力相等条件为

$$\rho\left\{\frac{\partial \Phi_1}{\partial t}+\frac{1}{2}(\nabla\Phi_1)^2+f_1(t)\right\}$$

$$=\rho_2\left\{\frac{\partial \Phi_2}{\partial t}+\frac{1}{2}(\nabla\Phi_2)^2+f_2(t)\right\},\qquad(1)$$

其中 $\rho_i$ 为密度,$\Phi_i$ 为速度势,$f_i(t)$为仅依赖时间 $t$ 的任意函数,界面一侧的量以下标'1'表示,另一侧以下标'2'表示.

法向速度连续条件为

$$-\frac{\partial F}{\partial t}=\nabla\Phi_1\cdot\nabla F=\nabla\Phi_2\cdot\nabla F.\qquad(2)$$

考虑两层流体各有一个沿 $X$ 方向的有限速度 $u_i^{(0)}$ $(i=1,2)$,并忽略有势场.这样速度势可以写为

$$\Phi_i=u_i^{(0)}x+\varphi_i(x,t),\qquad(3)$$

这里 $\varphi_i$ 是扰动速度势.

在界面 $y=0$ 上将 $\varphi_i$ 展开,并代入边界条件(1)和(2),得

* 国家自然科学基金(批准号:10475011 和 10474137)和国家重点基础研究发展计划(973)项目(批准号:2007CB815100)资助的课题.

† 通讯联系人.E-mail:ye_wenhua@iapcm.ac.cn

$$\eta_t = -\eta_x u_1^{(0)} - \varphi_{1x}\eta_x + \varphi_{1y} + \varphi_{1yy}\eta = -\eta_x u_2^{(0)} - \varphi_{2x}\eta_x + \varphi_{2y} + \varphi_{2yy}\eta,$$

$$\rho_1\left\{\varphi_{1t} + \varphi_{1ty}\eta + u_1^{(0)}\varphi_{1x} + u_1^{(0)}\varphi_{1xy}\eta + \frac{1}{2}\left(u_1^{(0)2} + \varphi_{1x}^2 + \varphi_{1y}^2\right)\right\}$$

$$= \rho_2\left\{\varphi_{2t} + \varphi_{2ty}\eta + u_2^{(0)}\varphi_{2x} + u_2^{(0)}\varphi_{2xy}\eta + \frac{1}{2}\left(u_2^{(0)2} + \varphi_{2x}^2 + \varphi_{2y}^2\right)\right\}. \tag{4}$$

将扰动速度势 $\varphi_i$ 及界面位置 $\eta(x,t)$ 按小量 $\varepsilon$ 展开，即

$$\varphi_i = \varepsilon\varphi_i^{(1)} + \varepsilon^2\varphi_i^{(2)} + O(\varepsilon^3),$$

$$\eta = \varepsilon\eta^{(1)} + \varepsilon^2\eta^{(2)} + O(\varepsilon^3). \tag{5}$$

代入(4)式，比较同级量，得

一级量：$y=0$ 上有

$$\eta_t^{(1)} = -u_1^{(0)}\eta_x^{(1)} + \varphi_{1y}^{(1)} = -u_2^{(0)}\eta_x^{(1)} + \varphi_{2y}^{(1)},$$

$$\rho_1\{\varphi_{1t}^{(1)} + u_1^{(0)}\varphi_{1x}^{(1)}\} = \rho_2\{\varphi_{2t}^{(1)} + u_2^{(0)}\varphi_{2x}^{(1)}\}. \tag{6}$$

二级量：$y=0$ 上有

$$\eta_t^{(2)} = -u_1^{(0)}\eta_x^{(2)} - \varphi_{1x}^{(1)}\eta_x^{(1)} + \varphi_{1y}^{(2)} + \varphi_{1yy}^{(2)}\eta^{(1)} = -u_2^{(0)}\eta_x^{(2)} - \varphi_{2x}^{(1)}\eta_x^{(1)} + \varphi_{2y}^{(2)} + \varphi_{2yy}^{(2)}\eta^{(1)},$$

$$\rho_1\left\{\varphi_{1t}^{(2)} + \varphi_{1ty}^{(1)}\eta^{(1)} + u_1^{(0)}\varphi_{1x}^{(2)} + u_1^{(0)}\varphi_{1xy}^{(1)}\eta^{(1)} + \frac{1}{2}\left(u_{1x}^{(1)2} + \varphi_{1y}^{(1)2}\right)\right\}$$

$$= \rho_2\left\{\varphi_{2t}^{(2)} + \varphi_{2ty}^{(1)}\eta^{(1)} + u_2^{(0)}\varphi_{2x}^{(2)} + u_2^{(0)}\varphi_{2xy}^{(1)}\eta^{(1)} + \frac{1}{2}\left(u_{2x}^{(1)2} + \varphi_{2y}^{(1)2}\right)\right\}. \tag{7}$$

各阶 $\varphi_i$ 都满足 Laplace 方程.

设初始条件为

$$\eta^{(1)}(x,0) = \eta_0\cos kx,$$

$$\eta_t^{(1)}(x,0) = 0,$$

$$\eta^{(2)}(x,0) = 0,$$

$$\eta_t^{(2)}(x,0) = 0,$$

$$\varphi_i^{(k)}(x,y,0) = 0. \tag{8}$$

一阶近似解给出

$$\eta^{(1)} = \frac{1}{2}\eta_0\left(e^{\gamma t} + e^{-\gamma t}\right)\cos(kx - \omega t),$$

$$\varphi_1^{(1)} = -\eta_0\frac{u_1^{(0)}k - \omega}{2k}\left(e^{\gamma t} + e^{-\gamma t}\right)\sin(\omega t - kx)e^{-ky}$$

$$-\eta_0\frac{1}{2k}\gamma\left(e^{\gamma t} - e^{-\gamma t}\right)\cos(\omega t - kx)e^{-ky},$$

$$\varphi_2^{(1)} = \eta_0\frac{u_2^{(0)}k - \omega}{2k}\left(e^{\gamma t} + e^{-\gamma t}\right)\sin(\omega t - kx)e^{ky}$$

$$+\eta_0\frac{1}{2k}\gamma\left(e^{\gamma t} - e^{-\gamma t}\right)\cos(\omega t - kx)e^{ky}, \tag{9}$$

其中

$$\omega = \frac{k}{\rho_1 + \rho_2}\left(\rho_1 u_1^{(0)} + \rho_2 u_2^{(0)}\right),$$

$$\gamma = \frac{k}{\rho_1 + \rho_2}\left(u_1^{(0)} - u_2^{(0)}\right)\sqrt{\rho_1\rho_2}.$$

一阶近似解结果表明：初始单模扰动振幅随时间指数增长，由于存在相因子 $\omega t$，界面形状在速度剪切方向随时间产生波动，这点与 RT 不稳定性很不同.

以一阶近似解代入二阶量所满足的边界条件，即在 $y=0$ 上有

$$\eta_t^{(2)} = -u_1^{(0)}\eta_x^{(2)} + \varphi_{1y}^{(2)} - \eta_0^2 k\frac{u_1^{(0)}k - \omega}{4}\left(e^{2\gamma t} + e^{-2\gamma t} + 2\right)\sin[2(\omega t - kx)]e^{-ky}$$

$$-\eta_0^2 k\frac{\gamma}{4}\left(e^{2\gamma t} + e^{-2\gamma t}\right)\cos[2(\omega t - kx)]e^{-ky},$$

$$= -u_2^{(0)}\eta_x^{(2)} + \varphi_{2y}^{(2)} + \eta_0^2 k\frac{u_2^{(0)}k - \omega}{4}\left(e^{2\gamma t} + e^{-2\gamma t} + 2\right)\sin[2(\omega t - kx)]e^{-ky}$$

$$+\eta_0^2 k\frac{\gamma}{4}\left(e^{2\gamma t} + e^{-2\gamma t}\right)\cos[2(\omega t - kx)]e^{-ky}, \tag{10}$$

$$\rho_1\left\{\varphi_{1t}^{(2)} + u_1^{(0)}\varphi_{1x}^{(2)} + \frac{1}{4}\eta_0^2\left(u_1^{(0)}\gamma k - \gamma\omega\right)\left(e^{2\gamma t} - e^{-2\gamma t}\right)\sin[2(\omega t - kx)]\right.$$

$$+\frac{1}{8}\eta_0^2\left(2u_1^{(0)}\omega k-\omega^2+\gamma^2-k^2u_1^{(0)2}\right)\left(e^{2\gamma t}+e^{-2\gamma t}+2\right)\cos[2(\omega t-kx)]\Big\}$$

$$=\rho_2\Big\{\varphi_{2t}^{(2)}+u_2^{(0)}\varphi_{2x}^{(2)}+\frac{1}{4}\eta_0^2\left(u_2^{(0)}\gamma k-\gamma\omega\right)\left(e^{2\gamma t}-e^{-2\gamma t}\right)\sin[2(\omega t-kx)]$$

$$+\frac{1}{8}\eta_0^2\left(2u_2^{(0)}\omega k-\omega^2+\gamma^2-k^2u_2^{(0)2}\right)\left(e^{2\gamma t}+e^{-2\gamma t}+2\right)\cos[2(\omega t-kx)]\Big\}. \tag{11}$$

为了使 $\varphi_1^{(2)}$,$\varphi_2^{(2)}$ 既能满足 Laplace 方程,又能满足无限远边界条件,我们取

$$\begin{aligned}\eta^{(2)}&=a(t)\cos2(\omega t-kx)+b(t)\sin2(\omega t-kx),\\ \varphi_1^{(2)}&=[a_1(t)\cos2(\omega t-kx)+b_1(t)\sin2(\omega t-kx)]e^{-ky},\\ \varphi_2^{(2)}&=[a_2(t)\cos2(\omega t-kx)+b_2(t)\sin2(\omega t-kx)]e^{ky}.\end{aligned} \tag{12}$$

代入(10)和(11)式,得

$$\begin{aligned}&[\dot a(t)+2\omega b(t)]\cos2(\omega t-kx)+[\dot b(t)-2\omega a(t)]\sin2(\omega t-kx)\\ &=-2ku_1^{(0)}a(t)\sin2(\omega t-kx)+2ku_1^{(0)}b(t)\cos2(\omega t-kx)-ka_1(t)\cos2(\omega t-kx)-kb_1(t)\sin2(\omega t-kx)\\ &\quad-\eta_0^2k\frac{u_1^{(0)}k-\omega}{4}\left(e^{2\gamma t}+e^{-2\gamma t}+2\right)\sin[2(\omega t-kx)]-\eta_0^2k\frac{\gamma}{4}\left(e^{2\gamma t}+e^{-2\gamma t}\right)\cos[2(\omega t-kx)]\\ &=-2ku_2^{(0)}a(t)\sin2(\omega t-kx)+2ku_2^{(0)}b(t)\cos2(\omega t-kx)+ka_2(t)\cos2(\omega t-kx)+kb_2(t)\sin2(\omega t-kx)\\ &\quad+\eta_0^2k\frac{u_2^{(0)}k-\omega}{4}\left(e^{2\gamma t}+e^{-2\gamma t}+2\right)\sin[2(\omega t-kx)]+\eta_0^2k\frac{\gamma}{4}\left(e^{2\gamma t}+e^{-2\gamma t}\right)\cos[2(\omega t-kx)],\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}&\rho_1\Big\{\left(\dot a_1(t)+2\omega b_1(t)\right)\cos2(\omega t-kx)+\left(\dot b_1(t)-2\omega a_1(t)\right)\sin2(\omega t-kx)+2ku_1^{(0)}a_1(t)\sin2(\omega t-kx)\\ &-2ku_1^{(0)}b_1(t)\cos2(\omega t-kx)+\frac{1}{4}\eta_0^2\left(u_1^{(0)}\gamma k-\gamma\omega\right)\left(e^{2\gamma t}-e^{-2\gamma t}\right)\sin[2(\omega t-kx)]\\ &+\frac{1}{8}\eta_0^2\left(2u_1^{(0)}\omega k-\omega^2+\gamma^2-k^2u_1^{(0)2}\right)\left(e^{2\gamma t}+e^{-2\gamma t}+2\right)\cos[2(\omega t-kx)]\Big\},\\ &=\rho_2\Big\{\left(\dot a_2(t)+2\omega b_2(t)\right)\cos2(\omega t-kx)+\left(\dot b_2(t)-2\omega a_2(t)\right)\sin2(\omega t-kx)+2ku_2^{(0)}a_2(t)\sin2(\omega t-kx)\\ &-2ku_2^{(0)}b_2(t)\cos2(\omega t-kx)+\frac{1}{4}\eta_0^2\left(u_2^{(0)}\gamma k-\gamma\omega\right)\left(e^{2\gamma t}-e^{-2\gamma t}\right)\sin[2(\omega t-kx)]\\ &+\frac{1}{8}\eta_0^2\left(2u_2^{(0)}\omega k-\omega^2+\gamma^2-k^2u_2^{(0)2}\right)\left(e^{2\gamma t}+e^{-2\gamma t}+2\right)\cos[2(\omega t-kx)]\Big\}.\end{aligned} \tag{14}$$

用分离变量法解之得

$$a(t)=\alpha_1e^{-\gamma_2t}+\alpha_2e^{\gamma_2t}+a_0\eta_0^2+a_1\eta_0^2e^{2\gamma t}+a_2\eta_0^2e^{-2\gamma t}, \tag{15}$$

$$b(t)=\beta_1e^{-\gamma_2t}+\beta_2e^{\gamma_2t}+b_1\eta_0^2e^{2\gamma t}+b_2\eta_0^2e^{-2\gamma t}, \tag{16}$$

其中

$$\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+\rho_2}=A,$$

$$\frac{\rho_2u_2^{(0)}+\rho_1u_1^{(0)}}{\rho_1+\rho_2}=B_+,$$

$$\frac{\rho_2u_2^{(0)}-\rho_1u_1^{(0)}}{\rho_1+\rho_2}=B_-,$$

$$\frac{\rho_2u_2^{(0)2}+\rho_1u_1^{(0)2}}{\rho_1+\rho_2}=C_+,$$

$$\frac{\rho_2u_2^{(0)2}-\rho_1u_1^{(0)2}}{\rho_1+\rho_2}=C_-,$$

$$\gamma_2=2\sqrt{\omega^2-2\omega kB_++k^2C_+},$$

$$a_0=-\frac{k}{16}\frac{(3\omega^2+\gamma^2)A-6k\omega B_-+3k^2C_-}{-\omega^2+2\omega kB_+-k^2C_+},$$

$$a_1=-\frac{3k}{32}\frac{(\omega^2-\gamma^2)A-2k\omega B_-+k^2C_-}{\gamma^2-\omega^2+2\omega kB_+-k^2C_+},$$

$$a_2=-\frac{k}{32}\frac{(3\omega^2+5\gamma^2)A-6k\omega B_-+3k^2C_-}{\gamma^2-\omega^2+2\omega kB_+-k^2C_+},$$

$$\alpha_1=-\eta_0^2\frac{\gamma_2a_0+a_1(\gamma_2-2\gamma)+a_2(\gamma_2+2\gamma)}{2\gamma_2},$$

$$\alpha_2=-\eta_0^2\frac{\gamma_2a_0+a_1(\gamma_2+2\gamma)+a_2(\gamma_2-2\gamma)}{2\gamma_2},$$

$$b_1=-\frac{3k}{16}\frac{\gamma(\omega A-kB_-)}{\gamma^2-\omega^2+2\omega kB_+-k^2C_+},$$

$$b_2=-\frac{k}{16}\frac{\gamma(\omega A-kB_-)}{\gamma^2-\omega^2+2\omega kB_+-k^2C_+},$$

$$\beta_1=-\eta_0^2\frac{b_1(\gamma_2+2\gamma)+b_2(\gamma_2-2\gamma)}{2\gamma_2},$$

$$\beta_2=-\eta_0^2\frac{b_1(\gamma_2-2\gamma)+b_2(\gamma_2+2\gamma)}{2\gamma_2},$$

$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\beta_1$，$\beta_2$ 是二次谐波($2k=k+k$)的线性增长幅度系数，$a_0$ 是二次谐波($0k=k-k$)的模耦合增长幅度，$a_1$，$a_2$，$b_1$，$b_2$ 是二次谐波($2k=k+k$)的模耦合增长幅度系数.

## 3. 数值模拟

数值模拟使用非均匀和活动网格的计算程序 LARED-S[6]，流体计算采用六阶相位误差的 Flux-Corrected-Transport(FCT)算法[7]，在均匀网格区达二阶精度.在界面附近密分网格，密分网格区两边的网格逐渐放大.用 LARED-S 程序计算了线性和非线性 RM 不稳定性、经典和烧蚀 RT 不稳定性[8—10]，计算结果和线性理论、国外的实验结果和数值模拟结果符合得很好.

### 3.1. 线性部分

为验证 LARED-S 程序计算 KH 不稳定性的可靠性，我们首先计算 KH 不稳定性的线性增长率.计算条件为 $\rho_1=1.0\ \mathrm{g\cdot cm^{-3}}$，$\rho_2=0.1\ \mathrm{g\cdot cm^{-3}}$，$U_1=2.0\ \mathrm{cm\cdot\mu s^{-1}}$，$U_2=-2.0\ \mathrm{cm\cdot\mu s^{-1}}$，扰动波长 $\lambda=40\ \mu\mathrm{m}$.

线性理论给出 $|\eta|=\frac{1}{2}\eta_0(\mathrm{e}^{\gamma t}+\mathrm{e}^{-\gamma t})$，其中 $\eta_0$ 是初始扰动振幅，$|\eta|$是 $t$ 时刻的基模振幅，$\gamma$ 是线性增长率，只要知道任何两个时刻的基模振幅就能得到增长率 $\gamma$.在小扰动阶段我们选择不同时刻的基模振幅来计算 $\gamma$，计算结果见表 1，增长率是通过求解括号里两个不同时刻基模振幅的方程组得到的.

表 1　不同时刻的基模振幅

| 编号 | 时刻 $t$/ns | 基模振幅$\|\eta\|$/μm | 增长率 $\gamma$/ns$^{-1}$ |
|---|---|---|---|
| $A$ | 0.4384 | 0.3307 | ($A$,$E$) 1.8072 |
| $B$ | 0.5255 | 0.3728 | ($B$,$F$) 1.7910 |
| $C$ | 0.6127 | 0.4206 | ($C$,$G$) 1.7767 |
| $D$ | 0.7000 | 0.4797 | ($D$,$H$) 1.7444 |
| $E$ | 0.7873 | 0.5506 | |
| $F$ | 0.8743 | 0.6308 | |
| $G$ | 0.9613 | 0.7248 | |
| $H$ | 1.0500 | 0.8334 | |

KH 不稳定性线性增长经典公式为

$$\gamma_c=\frac{2\pi}{\lambda}\frac{|U_1-U_2|}{\rho_1+\rho_2}\sqrt{\rho_1\rho_2},$$

代入计算条件得 $\gamma_c=1.8063\ \mathrm{ns^{-1}}$，表 1 计算得到的增长率的平均值为 $\bar{\gamma}=1.7800$，模拟值小于理论值，相对误差为 0.014.

线性理论与数值计算结果的比较，表明了模拟程序的可靠性.对不可压流体绝热指数 $\gamma$ 应该取为无穷大，但这无法计算，模拟中用增大 $\gamma$ 的办法来近似流体的不可压缩性，本文的计算中 $\gamma$ 取为 10.$\gamma$ 值的有限，界面垂直方向和平行方向计算网格有限，都会导致增长率的下降.

### 3.2. 二次谐波产生

模拟条件为 $\rho_1=1.0\ \mathrm{g\cdot cm^{-3}}$，$\rho_2=0.1\ \mathrm{g\cdot cm^{-3}}$，$U_1=2.0\ \mathrm{cm\cdot\mu s^{-1}}$，$U_2=-2.0\ \mathrm{cm\cdot\mu s^{-1}}$，扰动波长 $\lambda=40\ \mu\mathrm{m}$.图 1 给出了基模和二次谐波振幅随时间的变化，图中纵坐标(振幅)取的是自然对数坐标.

由图 1 可以看出，在前一阶段(0—1.0 ns)，也就是小扰动阶段，基模振幅随时间按指数变化，即扰动随时间线性增加，线性理论在这个阶段是成立的，线性理论能很好的刻画扰动的发展.在中间阶段(1.0—2.1 ns)，随着时间的延长，基模振幅增长减缓，扰动越来越偏离线性增长，基模出现非线性饱和，二次谐波有较大的发展，这一时期正是低阶谐波产生的时期，线性理论在这个阶段不再成立，弱非线性理论可以描绘扰动的发展.后一阶段(2.1 ns 以后)，二次谐波迅速发展，其振幅和基模振幅相当，甚至超过基模振幅，微扰理论不再适用，扰动进入强非线性阶段.中间阶段基模增长率下降的原因是，二次谐波相位和基模相反，对增长率起负反馈作用，二次

谐波的增长导致基模增长变慢.

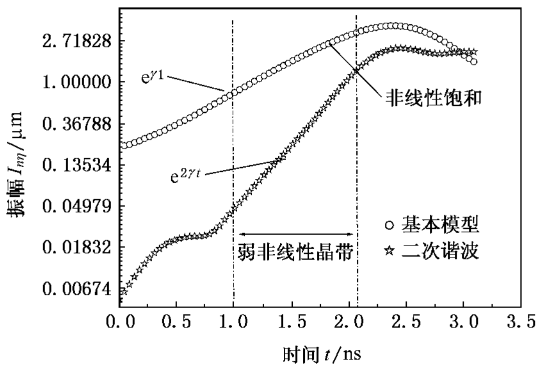


图 1 基模和二次谐波随时间的变化

第二节得到的 $\eta^{(2)}$ 的表达式过于复杂,为了便于检验我们的理论,这里仅取 $e^{2\gamma t}$ 项而忽略其他较小的项,得

$$\eta^{(2)} = \eta_0^2\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sin\left[2(\omega t-kx)+\operatorname{arctg}\frac{a_1}{b_1}\right]e^{2\gamma t},$$

则二次谐波振幅为 $|\eta^{(2)}| = \eta_0^2\sqrt{a_1^2+b_1^2}\,e^{2\gamma t}$,同样 $\eta^{(1)}$ 只取 $e^{\gamma t}$ 项,即 $\eta^{(1)} = \frac{1}{2}\eta_0\cos(kx-\omega t)e^{\gamma t}$,则基模振幅为 $|\eta^{(1)}| = \frac{1}{2}\eta_0 e^{\gamma t}$. 代入计算条件并利用第二节得到的 $a_1$ 和 $b_1$ 表达式,得到二次谐波振幅为 $|\eta^{(2)}| = 0.02\eta_0^2 e^{2\gamma t}$,则二次谐波振幅与基模振幅平方的比值为 $|\eta^{(2)}|/|\eta^{(1)}|^2 = 0.08$,对于 RT 不稳定性[11]有 $|\eta^{(2)}| = \frac{1}{2}k|\eta^{(1)}|^2$,则 $|\eta^{(2)}|/|\eta^{(1)}|^2 = \frac{k}{2}$,代入计算条件得 $|\eta^{(2)}|/|\eta^{(1)}|^2 = 0.079$. KH 不稳定性和 RT 不稳定性在这一点上是很相似的. 在弱非线性区我们取了不同时刻的基模和二次谐波振幅,并计算了 $|\eta^{(2)}|/|\eta^{(1)}|^2$,结果在表 2 中给出.

表 2 计算的 $|\eta^{(2)}|/|\eta^{(1)}|^2$ 的平均值为 0.07728,弱非线性理论值为 0.08,模拟值小于理论值,相对误差为 0.034. 数值模拟中有限的计算网格数和绝热指数 $\gamma$ 等会导致弱非线性理论结果与数值模拟结果产生偏差. 总体来说,我们的弱非线性理论结果和模拟结果是符合的.

表 2 不同时刻的基模和二次谐波振幅

| 时间 $t$/ns | 基模振幅 $\lvert\eta^{(1)}\rvert$/μm | 二次谐波振幅 $\lvert\eta^{(2)}\rvert$/μm | $\lvert\eta^{(2)}\rvert/\lvert\eta^{(1)}\rvert^2$ |
|---|---|---|---|
| 0.8743 | 0.63078 | 0.03039 | 0.07639 |
| 1.0483 | 0.83344 | 0.05335 | 0.0768 |
| 1.2193 | 1.08856 | 0.09157 | 0.07728 |
| 1.3893 | 1.40778 | 0.15183 | 0.07661 |
| 1.5523 | 1.78000 | 0.25133 | 0.07932 |

## 4. 非线性阈值的讨论

习惯上定义基模增长偏离线性增长 10% 处的基模振幅为非线性阈值 $\eta_s$. 为了确定非线性阈值,我们做了图 2,计算条件与第二节和第三节相同. 由图 2 可以看出在 $t = 1.74$ μs 时,基模振幅理论预言为 2.58 μm,模拟为 2.30 μm,此时基模增长偏离线性增长已达 10%,这时二次谐波的振幅为 0.56 μm. 由于扰动波长为 40 μm,则初始单模情况下 KH 不稳定性的非线性增长阈值为 0.06λ,二次谐波的振幅为基模振幅的 24%. 对于 RT 不稳定性,基模增长偏离线性增长 10% 时,基模振幅为 0.1λ,二次谐波的振幅为基模的 30%[12]. 可见 KH 不稳定性的非线性增长阈值小于 RT 不稳定性,而且二次谐波的增长也小于 RT 不稳定性.

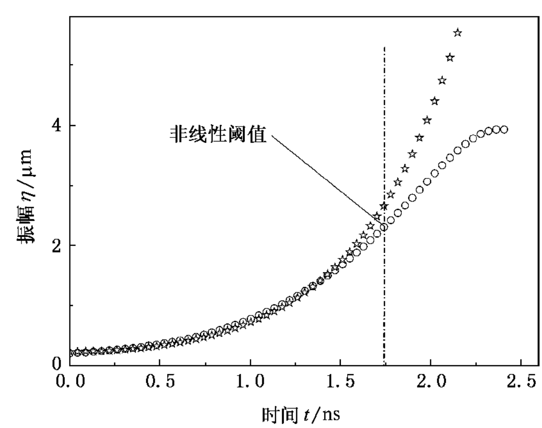


图 2 扰动振幅随时间的变化(⋆ 为线性理论结果,○为模拟结果)

## 5. 结　论

本文给出了 KH 不稳定性二次谐波产生的理论模型,利用这个模型研究了初始单模扰动情况下 KH 不稳定性的二次谐波产生问题.二次谐波增长的弱非线性结果与 LARED-S 程序的模拟结果较好符合,这说明我们建立的模型是可信的,LARED-S 程序在计算 KH 不稳定性方面是可靠的.用二维模拟讨论了单模非线性增长的阈值问题,模拟定出的不稳定性界面扰动振幅的非线性阈值为 $0.06\lambda$,小于 RT 不稳定性.


[1] Chandrasekhar S 1961 *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability* (London: Oxford University) p481.

[2] Yabe T, Hoshino H, Tsuchiya T 1991 *Phys. Rev.* A **44** 2756

[3] Rikanati A 2003 *Phys. Fluids* **15** 3776

[4] Youngs D L 1994 *Laser Part. Beams.* **12** 725

[5] Wang J H 1994 *Nonstationary flow and shock for two-dimensional* (Beijing Science Press) p16 (in Chinese) [王继海 1994 二维非定常流和激波(北京 科学出版社)第 16 页]

[6] Ye W H 1998 *High Power Laser and Particle Beams* **10** 403 (in Chinese) [叶文华 1998 强激光与粒子束 **10** 403]

[7] Ye W H 1998 *Comp. Phys.* **15** 277 (in Chinese) [叶文华 1998 计算物理 **15** 277]

[8] Ye W H, Zhang W Y, He X T 2002 *Phys. Rev.* E **65** 57401

[9] Ye W H, Zhang W Y, He X T 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 762 (in Chinese) [叶文华、张维岩、贺贤土 2000 物理学报 **49** 762]

[10] Wu J F, Ye W H, Zhang W Y *et al* 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1688 (in Chinese) [吴俊峰、叶文华、张维岩等 2003 物理学报 **52** 1688]

[11] Jacobs J W, Catton I 1988 *J. Fluid. Mech.* **187** 329

[12] Ofer D 1996 *Phys. Plasmas* **3** 3073


# Second harmonic generation by the Kelvin-Helmholtz instability for two-dimensional incompressible fluid*


Wang Li-Feng[1)]　Ye Wen-Hua[2)3)†]　Li Ying-Jun[1)]

1) (*China University of Mining and Technology, Beijing* 100083, *China*)

2) (*Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing* 100088, *China*)

3) (*Department of Physics, Zhejiang University, Hangzhou* 310028, *China*)


(Received 24 July 2007; revised manuscript received 13 September 2007)


Abstract

A model of second harmonic generation by Kelvin-Helmholtz (KH) instability is presented. Weakly nonlinear theoretical results of the growth of the second harmonic agree well with the results of the LARED-S code. Nonlinear threshold of the KH instability for the single mode perturbation is determined by two-dimensional simulation.



**Keywords**: Kelvin-Helmholtz instability, second harmonic generation, nonlinear threshold

**PACC**: 5235, 4720, 4735


* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10475011, 10474137) and The National Basic Research Program (973 Program) (Grant No. 2007CB815100).

† Corresponding author. E-mail: ye_wenhua@iapcm.ac.cn