

# 离散时空的 Friedmann 宇宙的几何结构及其性质\*

陈 光

( 东华大学信息学院, 上海 201620 )

( 2007 年 10 月 29 日收到, 2007 年 11 月 18 日收到修改稿 )

研究了离散时空的 Friedmann 宇宙的几何结构, 证明了形成 Friedmann 宇宙的尘埃物质并不分布在 Friedmann 时空点上, 导出了在 Friedmann 宇宙中的试验粒子的测地运动方程, 并揭示了 Friedmann 宇宙中的时钟和频移效应.

关键词: Friedmann 时空, 尘埃物质, 测地运动, 时频效应

PACC: 0230, 0420

## 1. 离散时空的 Friedmann 宇宙解及其时空结构

在文献 [1] 中给出了一个由尘埃粒子所形成的离散时空的 Friedmann 宇宙的解. 离散时空的 Friedmann 宇宙的度规为

$$d\tilde{s}^2 \approx -d\tilde{t}^2 + \tilde{b}^2(\tilde{t}) \times \left[ \frac{d\tilde{r}^2}{1 - \tilde{k}\tilde{r}^2} + \tilde{r}^2(d\tilde{\theta}^2 + \sin^2\tilde{\theta}d\tilde{\phi}^2) \right], \quad (1)$$

其中的宇宙时  $\tilde{t}$  和尺度因子  $\tilde{b}(\tilde{t})$  满足

$$\tilde{t} \approx \frac{\tilde{\eta} + \sin\tilde{\eta}}{2\sqrt{\tilde{k}}}, \tilde{b} \approx \frac{1}{2}(1 + \cos\tilde{\eta}) \quad (2)$$

和

$$\begin{aligned} \tilde{\eta} &\approx \eta^\delta, \delta \approx \sqrt{\frac{\tilde{k}}{k}} \approx \frac{2\sqrt{2}}{m}, \\ \eta &\approx 2n\pi + \sum_{k=1}^i \eta_k C^k \approx 2n\pi \\ &(n \approx 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned} \quad (3)$$

这里,  $m \approx \frac{\tilde{M}}{M}$ ,  $M$  为尘埃粒子的质量,  $\tilde{M}$  为 Friedmann 宇宙的质量,  $m$  为 Friedmann 宇宙的尘埃粒子数,  $C$  为标度系数,  $\eta_k$  为零或满足  $C^{1/2} > |\eta_k| \geq C^{-1/2}$ ,  $i' \leq -1$ .

可知, 当  $\tilde{t} \approx 0$  时, 有  $\tilde{b} \approx 1$ , 这时 (1) 式表示一个

三维常曲率空间:

$$d\tilde{\sigma}^2 \approx \frac{d\tilde{r}^2}{1 - \tilde{\kappa}\tilde{r}^2} + \tilde{r}^2(d\tilde{\theta}^2 + \sin^2\tilde{\theta}d\tilde{\phi}^2). \quad (4)$$

对 (4) 式作极坐标到笛卡儿坐标的变换:

$$\begin{aligned} \tilde{x}^1 &\approx \tilde{r} \sin\tilde{\theta} \cos\tilde{\phi}, \\ \tilde{x}^2 &\approx \tilde{r} \sin\tilde{\theta} \sin\tilde{\phi}, \\ \tilde{x}^3 &\approx \tilde{r} \cos\tilde{\theta}, \end{aligned} \quad (5)$$

且令

$$\begin{aligned} \tilde{x}^\mu \tilde{x}^\mu &\approx \tilde{x}^i \tilde{x}^i + (\tilde{x}^4)^2 \approx \frac{1}{\tilde{\kappa}}, \\ \mu &\approx 1, 2, 3, 4, i \approx 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (6)$$

可得到

$$d\tilde{\sigma}^2 \approx d\tilde{x}^\mu d\tilde{x}^\mu \approx d\tilde{x}^i d\tilde{x}^i + (d\tilde{x}^4)^2 \quad (7)$$

和

$$\tilde{r}^2 \approx [\tilde{r}(\tilde{x}^4)]^2 \approx \tilde{x}^i \tilde{x}^i \approx \frac{1}{\tilde{\kappa}} - (\tilde{x}^4)^2. \quad (8)$$

(6)–(8) 式显示, 一个三维常曲率空间可以表示为四维 Euclid 空间中的一个三维超球面. 由于三维超球面具有四维笛卡儿坐标  $\tilde{x}$  的线性变换的对称性, 因此离散时空的 Friedmann 宇宙在空间上是对称亦即均匀和各向同性的. 又注意到在 (8) 式中  $\tilde{r}$  为  $\tilde{x}^4$  的函数, 而  $\tilde{x}^4$  的取值范围为  $-\tilde{\kappa}^{-1/2} \leq \tilde{x}^4 \leq \tilde{\kappa}^{-1/2}$  并有  $\tilde{r}(\tilde{x}^4) \approx \tilde{r}(-\tilde{x}^4)$ , 于是在任一给定的坐标系中可将一个三维超球面分解为彼此对称的两个部分空间, 使其分别对应于  $0 \leq \tilde{x}^4 \leq \tilde{\kappa}^{-1/2}$  和  $-\tilde{\kappa}^{-1/2} \leq \tilde{x}^4 \leq 0$ .

\* 国家自然科学基金(批准号 60503009)资助的课题.

0 且在  $\tilde{r} \approx a \approx \tilde{k}^{-1/2}$  和  $\tilde{x}^4 \approx 0$  的一个二维球面上相互连接.

考虑到在 (1)–(3) 式中尺度因子  $\tilde{b}$  作为宇宙时  $\tilde{t}$  的准周期函数, 知 Friedmann 宇宙的三维超球面的结构将随着宇宙时而作共形的准周期变化. 可求得其准周期为  $\pi/\sqrt{k}$ .

## 2. 尘埃物质的等效时空性质

注意到在离散时空的 Friedmann 宇宙解中尘埃物质的能量密度  $\tilde{\rho}$  是独立于空间坐标的. 虽然 (1)–(3) 式满足有源的 Einstein 场方程, 但这并不意味着尘埃物质是分布在 Friedmann 时空点上的. 事实上, 考虑到 Friedmann 宇宙的空间对称性亦即均匀和各向同性, 同时 Friedmann 坐标又是尘埃物质的共动坐标, 于是, 如果尘埃物质分布在 Friedmann 时空点上, 则在共动坐标系中必是均匀的而且处于静止的状态, 从而在相关的线元  $d\tilde{s}^2$  中, 必有  $d\tilde{r} \approx 0$ ,  $d\tilde{\theta} \approx 0$  和  $d\tilde{\phi} \approx \alpha$  ( $i' \leq -1$ ), 因此尘埃粒子必须是一个  $i'$  阶等价意义上的零尺度的粒子. 这与尘埃粒子具有球结构相矛盾. 其实, 在文献 [2] 中我们已经说明了尘埃物质是无坐标的, 它的存在对应于时空的离散化并在结构上表示为一个具有尺度为 Planck 长度的无内部坐标的平直球. 因此在由尘埃粒子集合所形成的离散时空的 Friedmann 宇宙的坐标点上是不存在尘埃物质分布的.

接着, 讨论尘埃物质与 Friedmann 时空几何的关系. 考虑 Friedmann 宇宙的一个方程<sup>[3]</sup>

$$\dot{\tilde{b}}^2 + k \approx \frac{8\pi G}{3} \tilde{\rho} \tilde{b}^2, \quad (9)$$

由 (2) 和 (9) 式及  $\tilde{\kappa} \approx \frac{1}{\tilde{a}^2}$  可以导出

$$\tilde{\rho} \approx \frac{3}{8\pi G} \frac{1}{\tilde{a}^2 \tilde{b}^3}, \quad (10)$$

于是, 若令

$$\tilde{a} \approx 2G\tilde{M}, \quad (11)$$

则有

$$\tilde{\rho} \approx \frac{\tilde{M}}{\tilde{v}}, \quad \tilde{v} \approx \frac{4\pi}{3} \tilde{r}^3, \quad \tilde{r} \approx \tilde{a} \tilde{b}, \quad (12)$$

其中,  $\tilde{M}$  为尘埃物质的质量,  $\tilde{\rho}$  为尘埃物质的质量密度,  $\tilde{v}$  为一个共形变化的平直三维球的体积, 而  $\tilde{r}$  为它的半径.

基于 (12) 式所显示的  $\tilde{\rho}$  和  $\tilde{M}$  之间的关系, 可以认为尘埃物质是等效地分布在一个共形变化的平直 3 维球上的. 实际上, 从上节中所提到的四维 Euclid 空间来看, 对应于  $\tilde{r} \approx \tilde{r}(0) \approx \tilde{a}$  和  $\tilde{x}^4 \approx 0$  的二维球面可以定义一个半径为  $\tilde{a}$  的平直三维球使其与 (6) 式所示的 Friedmann 宇宙解中的三维超球面相互正交, 并在考虑了尺度因子之后可以通过 (12) 式而由共形变化的平直三维球的体积来联系尘埃物质的质量  $\tilde{M}$  和质量密度  $\tilde{\rho}$ . 当然, Einstein 方程所描述的是 1+3 维的时空几何, 故在 Friedmann 宇宙解中只是包含了三维超球面上的空间坐标, 而没有包含这个平直三维球中的空间坐标. 因此, 这个共形变化的平直三维球只是一个等效的尘埃球. 与此相应, 尘埃物质的质量密度也只是一个等效的质量密度. 再考虑到空间的对称性, 可知 Friedmann 宇宙中任一等效半径为  $\tilde{a} \tilde{b}$  的球面都可以当作这样一个等效地包含了全部尘埃物质的无内部坐标的尘埃球的表面.

继而, 仿照尘埃粒子解的情况<sup>[4]</sup>, 对上述等效尘埃球的表面 ( $\tilde{r} \approx \tilde{a}$ ) 作 Friedmann 坐标到 Schwarzschild 坐标的变换:

$$\begin{aligned} \tilde{r} &\approx \tilde{a} \tilde{b}(\tilde{r}) \\ &\approx \frac{\tilde{a}}{2}(1 + \cos \tilde{\eta}), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \tilde{t} &\approx \tilde{k} \tilde{a}^3 \left\{ \ln \left| \frac{(1/\tilde{k} \tilde{a}^2 - 1)^2 + \tan(\tilde{\eta}/2)}{(1/\tilde{k} \tilde{a}^2 - 1)^2 - \tan(\tilde{\eta}/2)} \right| \right. \\ &\quad \left. + (1/\tilde{k} \tilde{a}^2 - 1) [ \tilde{\eta} + (1/2\tilde{k} \tilde{a}^2) \tilde{\eta} + \sin \tilde{\eta} ] \right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\tilde{\theta} \approx \tilde{\theta}, \quad (15)$$

$$\tilde{\phi} \approx \tilde{\phi}. \quad (16)$$

并由  $\tilde{\kappa} \approx \frac{1}{\tilde{a}^2}$  和 (11) 式有

$$\tilde{r} \approx G\tilde{M}(1 + \cos \tilde{\eta}), \quad (17)$$

$$\tilde{t} \approx 0, \quad (18)$$

$$\tilde{\theta} \approx \tilde{\theta}, \quad (19)$$

$$\tilde{\phi} \approx \tilde{\phi}. \quad (20)$$

由此, 可以得到一种特殊形式的 Schwarzschild 度规

$$\begin{aligned} d\tilde{s}^2 &\approx - \left( 1 - \frac{2G\tilde{M}}{\tilde{r}} \right) d\tilde{t}^2 + \frac{d\tilde{r}^2}{1 - 2G\tilde{M}/\tilde{r}} \\ &\quad + \tilde{r}^2 (d\tilde{\theta}^2 + \sin^2 \tilde{\theta} d\tilde{\phi}^2) \end{aligned}$$

$$\approx -\frac{d\tilde{r}^2}{2G\tilde{M}/\tilde{r}-1} + \tilde{r}^2(d\tilde{\theta}^2 + \sin^2\tilde{\theta}d\tilde{\phi}^2). \quad (21)$$

这个结果意味着, 一个等效尘埃球的表面时空可以映射为一个特殊形式的 Schwarzschild 时空. 当然, 由于 Schwarzschild 时空满足无源的 Einstein 场方程, 故在其时空点上并不存在着尘埃物质的分布. 再考虑到 Friedmann 宇宙中的任一空间点都可以映射到一个具有等效半径为  $\tilde{a}$  的等效尘埃球面上. 因此, 在离散时空的 Friedmann 宇宙中的任何时空点上都不存在着尘埃物质的分布.

### 3. 等效尘埃球面几何

以下基于(21)式来讨论等效尘埃球面的几何性质. 首先, 在(21)式中,  $-\frac{d\tilde{r}^2}{2G\tilde{M}/\tilde{r}-1}$  是类时的, 它描述了这种 Schwarzschild 几何中与时间特性相关的部分. 而  $\left(\frac{2G\tilde{M}}{\tilde{r}}-1\right)d\tilde{t}^2$  和  $\tilde{r}^2(d\tilde{\theta}^2 + \sin^2\tilde{\theta}d\tilde{\phi}^2)$  都是类空的, 其所对应的是这种几何中与空间特性相关的部分. 且由于  $\tilde{t} \approx 0$ , 因而是一个二维的球面. 注意到, 这里的球径坐标  $\tilde{r}$  既表示时间又表示空间. 也就是说, 任一宇宙时  $\tilde{t}$  都映射为一个  $\tilde{r}$  值, 而任一  $\tilde{r}$  值又对应于一个等效尘埃物质球的半径. 正是这样, 这种 Schwarzschild 几何便对应于一个变化着的等效尘埃球面. 并且, 由于  $0 < \tilde{r} < \tilde{a}$ , 故当  $\tilde{r}$  沿 0 到  $\tilde{a}$  方向变化时, 就相应于等效尘埃球的膨胀, 而当  $\tilde{r}$  沿  $\tilde{a}$  到 0 方向变化时, 则相应于等效尘埃球的收缩.

考虑到在(21)式中坐标  $\tilde{r}$  可以作双向的变化, 这与通常意义的时间变化的单向性是不一致的. 为了得到单向变化的时间, 我们对 Schwarzschild 坐标作 Kruskal 变换<sup>[5]</sup>:

$$\tilde{u} \approx \pm (1 - \tilde{r}/2\tilde{M})^{1/2} e^{-\tilde{r}/4\tilde{M}} \sinh(\tilde{t}/4\tilde{M}), \quad (22)$$

$$\tilde{v} \approx \pm (1 - \tilde{r}/2\tilde{M})^{1/2} e^{-\tilde{r}/4\tilde{M}} \cosh(\tilde{t}/4\tilde{M}). \quad (23)$$

再根据(18)式将  $\tilde{t} \approx 0$  代入(22)和(23)式可得

$$\tilde{u} \approx 0, \quad (24)$$

$$\tilde{v} \approx \pm (1 - \tilde{r}/2\tilde{M})^{1/2} e^{-\tilde{r}/4\tilde{M}}, \quad (25)$$

其中,  $-1 < \tilde{v} < 1$ , 且当  $\tilde{r}$  沿 0 到  $\tilde{a}$  方向变化时,  $\tilde{v}$  沿  $-1$  到 0 方向变化, 而当  $\tilde{r}$  沿  $\tilde{a}$  到 0 方向变化时,  $\tilde{v}$  沿 0 到 1 方向变化. 于是,  $\tilde{v}$  沿  $-1$  到 1 方向的变化便对应于等效尘埃球的膨胀和收缩的一个准周期.

利用(24)和(25)式还可将(21)式化为

$$d\tilde{s}^2 \approx - (32\tilde{M}^3/\tilde{r}) e^{-\tilde{r}/2\tilde{M}} d\tilde{v}^2 + \tilde{r}^2(d\tilde{\theta}^2 + \sin^2\tilde{\theta}d\tilde{\phi}^2). \quad (26)$$

而由(1)(2)(13)和(26)式及  $\tilde{r} \approx \tilde{a}$ , 则有

$$\tilde{t} \approx \int_{-1}^{\tilde{r}} (32\tilde{M}^3/\tilde{r})^{1/2} e^{-\tilde{r}/4\tilde{M}} d\eta + \frac{(n-1/2)\pi}{\sqrt{k}}$$

$$n \approx 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (27)$$

其中  $\pi/\sqrt{k}$  就是离散时空的 Friedmann 宇宙解的准周期.

### 4. 在离散时空的 Friedmann 宇宙中的测地运动

考虑一个试验粒子在 Friedmann 宇宙中的测地运动. 这里的试验粒子可以是尘埃粒子、零质量的光子或非尘埃有质粒子. 由 Friedmann 宇宙的对称性, 试验粒子的测地线必位于在任何时刻都能够将 Friedmann 宇宙分割为两个对称部分的一个共形变化的等效尘埃球的表面上或其相应的 Schwarzschild 时空中. 再由 Schwarzschild 时空的对称性并为了形式简单起见, 可以取合适的坐标系使其位于  $\tilde{\theta} \approx \pi/2$  的赤道面上. 由此可将(21)式化为

$$d\tilde{S}^2 \approx -\frac{d\tilde{r}^2}{2G\tilde{M}/\tilde{r}-1} + \tilde{r}^2 d\tilde{\phi}^2. \quad (28)$$

鉴于 Friedmann 坐标为尘埃物质的共动坐标, 于是对于尘埃粒子有  $d\tilde{\phi} \approx 0$ , 从而(28)式化为

$$d\tilde{S}^2 \approx -\frac{d\tilde{r}^2}{2G\tilde{M}/\tilde{r}-1}. \quad (29)$$

而对于光子则有

$$d\tilde{S}^2 \approx -\frac{d\tilde{r}^2}{2G\tilde{M}/\tilde{r}-1} + \tilde{r}^2 d\tilde{\phi}^2 \approx 0,$$

由此解得

$$\tilde{\phi} \approx \pm 2\arcsin\sqrt{\frac{\tilde{r}}{2G\tilde{M}}} + \tilde{\phi}_0. \quad (30)$$

由(30)式可知, 在近似的意义上, 当  $\tilde{r}$  从 0 到  $2G\tilde{M}$  再回到 0 时,  $\tilde{\phi}$  共变化了  $2\pi$ . 这意味着在 Friedmann 宇宙的一个准周期中, 光子沿着其中的一个共形变化的圆周传播了一周而回到起点.

至于非尘埃有质粒子, 基于离散时空的 Friedmann 宇宙在空间上的对称性及其在时间上的准周期变化的特性, 可以假定这类粒子具有空间对

称的初始条件并作准周期的测地运动.同时考虑到有质粒子的运动速度必须小于光速而对光速以下的速度则没有任何给定的限制,可在(28)式中取 $\tilde{\phi}$ 为 $\tilde{r}$ 的函数,并设其具有如下的简单形式:

$$\tilde{\phi} \approx \tilde{\phi}_0 + 2b \approx \tilde{\phi}_0 + \frac{\tilde{r}}{GM}. \quad (31)$$

其中 $\tilde{\phi}_0$ 为初始方位角.则由(28)和(31)式可求出有质粒子的测地运动的速度为

$$v \approx \pm \frac{\tilde{r}}{d\tilde{r}} \frac{d\tilde{\phi}}{d\tilde{r}} \sqrt{2GM/\tilde{r} - 1}$$

$$\approx \pm \frac{\tilde{r}}{GM} \sqrt{2GM/\tilde{r} - 1}, \quad (32)$$

或表示为

$$v \approx \pm \sqrt{1 - \cos^2 \tilde{\eta}}.$$

可见,在(32)式中,当 $0 \leq \tilde{r} < GM$ 或 $GM < \tilde{r} < 2GM$ 时,有 $0 \leq |v| < 1$ .同时,由(3)和(17)式并考虑到

$$\tilde{\eta} \approx \eta\delta \approx \eta\sqrt{\frac{k}{k}} \approx \frac{4\sqrt{2}n\pi}{m},$$

而 $\frac{4\sqrt{2}n}{m}$ 为零或一个无理数<sup>[1]</sup>,可知在*i*'阶等价的意义下,除0之外在 $\tilde{\eta}$ 的所有的取值中将不会出现 $\pi$ 的有理数倍数的情况.因此,在(32)式中便排除了 $\tilde{r} \approx GM$ 从而 $v \approx 1$ 的情况.也就是说,有质粒子的测地运动一定是亚光速的.

可求出有质粒子测地运动的加速度的大小为

$$\dot{v} \approx \pm \frac{dv}{d\tilde{r}} \sqrt{2GM/\tilde{r} - 1}$$

$$\approx \frac{1}{GM} \left( \frac{GM}{\tilde{r}} - 1 \right), \quad (33)$$

可见当 $\tilde{r} < GM$ ( $\tilde{r} > GM$ )时,有 $\dot{v} > 0$ ( $\dot{v} < 0$ ).

### 5. 在 Friedmann 宇宙中的时钟效应

设 $d\tilde{t}_c$ 为共动坐标系中给定空间坐标点处的时间微分, $d\tilde{t}_p$ 为联结于测地运动有质粒子的坐标系中给定空间坐标点处的时间微分,而 $d\tilde{t}_0$ 为一个与引力和运动状态无关的不随时间而变化的时间微分.则基于观测量的理论<sup>[6]</sup>,由(1)和(2)式可求出

$$d\tilde{s}^2 \approx -d\tilde{t}_c^2 \approx -\tilde{b}^2 \frac{d\tilde{\eta}^2}{\tilde{k}},$$

从而有

$$d\tilde{t}_c \approx \tilde{b} \frac{d\tilde{\eta}}{\sqrt{\tilde{k}}}, \quad (34)$$

再应用(28)和(32)及(34)式有

$$d\tilde{t}_p \approx \sqrt{1 - v^2} d\tilde{t}_c,$$

$$d\tilde{t}_p \approx \frac{1}{2}(1 + \cos \tilde{\eta}) |\cos \tilde{\eta}| d\tilde{t}_0, \quad (35)$$

或

$$f(\tilde{\eta}) \approx \frac{d\tilde{t}_p}{d\tilde{t}_0} \approx \frac{1}{2}(1 + \cos \tilde{\eta}) |\cos \tilde{\eta}|. \quad (36)$$

(35)式表示随动于测地运动的有质粒子的观测者的时间微分,而(36)式则表示了时间尺度的演化.其在一个 Friedmann 宇宙的准周期中的演化曲线的连续近似如图1所示.可知,在该曲线中有4个极小点:

$$\tilde{\eta}_0 \approx -\pi, \tilde{\eta}_2 \approx -\frac{\pi}{2}, \tilde{\eta}_4 \approx \frac{\pi}{2}, \tilde{\eta}_6 \approx \pi,$$

以及3个极大点:

$$\tilde{\eta}_1 \approx -\frac{2\pi}{3}, \tilde{\eta}_3 \approx 0, \tilde{\eta}_5 \approx \frac{2\pi}{3}.$$

考虑到 $\tilde{\eta} \approx \frac{4\sqrt{2}n\pi}{m}$ ,而 $\frac{4\sqrt{2}n\pi}{m}$ 为零或一个无理数,可知这些极值点只是具有不同变化特性的线段之间的分隔点,除了 $\tilde{\eta}_3$ 之外,在实际的离散曲线上是不存在的.

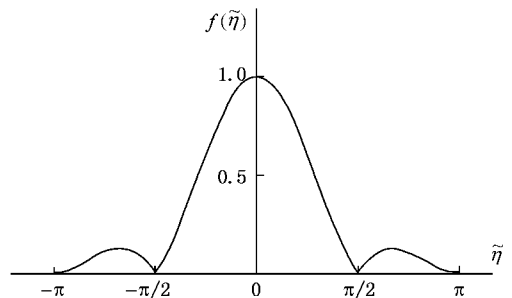


图1 连续近似的时间尺度演化曲线

### 6. 在 Friedmann 宇宙中的频移效应

设在关联于有质粒子( $i \approx \alpha, \beta$ )的局域坐标系中的静止光源所发出的光的周期、频率和波长分别为 $\Delta\tilde{t}_{pi}$ , $\nu_i$ 和 $\lambda_i$ .可认为在 $\Delta\tilde{t}_{pi}$ 的时间间隔内宇宙解的参数近似不变并表示为 $\tilde{\eta}_i$ .于是由(35)式可得

$$\Delta\tilde{t}_{pi} \approx \frac{1}{2}(1 + \cos \tilde{\eta}_i) |\cos \tilde{\eta}_i| \Delta\tilde{t}_0, \quad i \approx \alpha, \beta \quad (37)$$

和

$$\frac{\Delta \tilde{t}_{pa}}{\Delta \tilde{t}_{p\beta}} \approx \frac{v_{\beta}}{v_{\alpha}} \approx \frac{\lambda_{\alpha}}{\lambda_{\beta}} \approx \frac{(1 + \cos \tilde{\eta}_{\alpha}) |\cos \tilde{\eta}_{\alpha}|}{(1 + \cos \tilde{\eta}_{\beta}) |\cos \tilde{\eta}_{\beta}|} \quad (38)$$

从而有频移

$$Z \approx \frac{\lambda_{\beta} - \lambda_{\alpha}}{\lambda_{\alpha}} \approx \frac{(1 + \cos \tilde{\eta}_{\beta}) |\cos \tilde{\eta}_{\beta}|}{(1 + \cos \tilde{\eta}_{\alpha}) |\cos \tilde{\eta}_{\alpha}|} - 1. \quad (39)$$

这里, 当  $Z \approx 0$ 、 $Z > 0$  或  $Z < 0$  时, 分别为无频移、红移或紫移. 可知, 当  $\tilde{\eta}_{\beta}$  位于  $(\tilde{\eta}_2, \tilde{\eta}_3)$  区间中且足够大时, 则对于任意的  $\tilde{\eta}_0 < \tilde{\eta}_{\alpha} < \tilde{\eta}_2$  均有  $Z > 0$  即为红移. 其中当  $\tilde{\eta}_0 < \tilde{\eta}_{\alpha} < \tilde{\eta}_1$  时, 红移随着  $\tilde{\eta}_{\alpha}$  的减小而由小到大变化; 当  $\tilde{\eta}_1 < \tilde{\eta}_{\alpha} < \tilde{\eta}_2$  时, 红移随着  $\tilde{\eta}_{\alpha}$  的减小而由大到小变化; 当  $\tilde{\eta}_2 < \tilde{\eta}_{\alpha} < \tilde{\eta}_{\beta}$  时, 红移随着  $\tilde{\eta}_{\alpha}$  的减小而由小到大变化. 当然, 这里所谓的频移关系仅仅是关联于两个有质粒子的局域坐标系中的静止光源之间的频率关系. 如果考虑到两个有质粒子  $\alpha$  与  $\beta$  之间相对运动的方向及其所引起的光波传播的多普勒效应, 则由随动于有质粒子  $\beta$  的观测者所测得的随动于有质粒子  $\alpha$  的光源所发出的光的红移与 (39) 式相比将有一个增量. 并且, 当两者相背运动时, 所测得的红移将较大; 而当两者相向运动时, 所测得的红移将较小.

## 7. 结 论

由尘埃粒子所形成的 Friedmann 宇宙具有空间上的均匀和各向同性并随着宇宙时作准周期的共形变化. 尘埃物质是无坐标的, 它的存在对应于时空的离散化, 使得在 Friedmann 宇宙的时空点上并不存在

尘埃物质分布. 无论任何时刻在空间上都可以把 Friedmann 宇宙表示为四维 Euclid 空间中的一个三维超球面, 在该三维超球面上的任一具有最大面积的二维球面都可以将其分割为彼此对称的两个部分. 可以认为形成 Friedmann 宇宙的全部的尘埃物质等价地存在于由任一这样的二维球面所包围的无内部坐标的且与三维超球面正交的三维球之中. 任一这样的二维球面随着宇宙时作准周期的共形变化并形成了一种 Schwarzschild 时空.

由于 Friedmann 坐标是尘埃粒子的共动坐标, 因此尘埃粒子在 Friedmann 坐标系中是静止的. 尘埃粒子的集合自然地成为一种特殊的参考系. 时空的对称性决定了任一测地运动的试验粒子必定位于某一共形变化的等效尘埃球的表面上或其相应的 Schwarzschild 时空中. 而在该等效尘埃球的表面上则必位于某一具有最大半径的圆周上. 零质量的光子具有固定的运动速率即光速, 并且在 Friedmann 宇宙的一个准周期中沿着一个共形变化的圆周传播了一周而回到起点. 而非尘埃有质粒子的测地运动在 Friedmann 宇宙的一个准周期中则完成了一次往返而回到起点, 且在任一单向运动的过程中取遍了 0 和 1 之间的所有可能的速率. 所有的非尘埃有质粒子的测地运动有着相同的瞬时速率, 并在联结于这种粒子的局域参考系上形成了统一的时间尺度.

联结于非尘埃有质粒子的局域参考系上的时间尺度的变化产生了时钟和频移效应. 诚然, 由于共形变化的原因, 在任一局域参考系上的观测者不能测量出自身参照系上的时间尺度或静止光源频率的变化, 而在不同局域参考系之间的时钟和频移效应则是可测量的.

- [1] Chen G 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2977 (in Chinese) [陈光 2005 物理学报 **54** 2977]
- [2] Chen G 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2971 (in Chinese) [陈光 2005 物理学报 **54** 2971]
- [3] Weinberg S 1972 *Gravitation and Cosmology* (New York: John Wiley) p368
- [4] Chen G 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1539 (in Chinese) [陈光

2006 物理学报 **55** 1539]

- [5] Misner C W, Thorne K S, Wheeler J A 1973 *Gravitation* (Freeman: San Francisco) p827
- [6] Yu Y Q 2002 *An Introduction to General Relativity* (Beijing: Peking University Press) (in Chinese) [俞允强 2002 广义相对论引论 (北京: 北京大学出版社)]

# The geometric structure of Friedmann universe in the discrete spacetime and its properties<sup>\*</sup>

Chen Guang

( *College of Information Science and Technology, Donghua University, Shanghai 201620, China* )

( Received 29 October 2007 ; revised manuscript received 18 November 2007 )

## Abstract

The geometric structure of Friedmann universe in the discrete space time is researched. It is proved that the dust matter which forms the Friedmann universe is not distributed on the Friedmann spacetime points. The geodesic motion equations of test particles are derived, and the effects of clock and frequency shift are revealed.

**Keywords** : Friedmann space time , dust matter , geodesic motion , effects of clock and frequency shift

**PACC** : 0230 , 0420

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 60503009 ).