第 57 卷 第 6 期 2008 年 6 月
1000-3290/2008/57(06)/3319-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.57,No.6,June,2008
©2008 Chin. Phys. Soc.

计算自旋-s 算子幺正演化矩阵 $d^s(t)$ 的新方法及其应用*

胡明亮† 惠小强

(西安邮电学院应用数理系,西安 710061)

(2007 年 11 月 17 日收到;2007 年 12 月 24 日收到修改稿)

提出了一种严格求解任意自旋-s 算子幺正演化矩阵的方法,该方法不同于群论的方法和直接计算的方法,是一种间接的算法.方法的核心是利用两个系统表示的等价性:即自旋-s 算子 Hamiltonian 量 $H_s = S_x$ 与 Heisenberg XX 开链带相互作用 $J_n = \sqrt{n(N-n)}$ 的 Hamiltonian 量的等价性,由于存在这种等价性,自旋-s 算子幺正演化矩阵的计算可通过 Heisenberg XX 开链中态的演化来实现.采用该方法计算了 $s = 3/2$,$s = 2$ 和 $s = 5/2$ 时对应的幺正演化矩阵.由于初始态 $|sm\rangle$ 在算子 e^{-itS_x} 下的演化实质上相当于对态 $|sm\rangle$ 进行一个绕 x 轴转角为 $\beta = t$ 的转动,演化矩阵元 $d^s_{m'm}(t) = \langle sm'|e^{-itS_x}|sm\rangle$ 就是转动后的态 $e^{-itS_x}|sm\rangle$ 在 $|sm'\rangle$ 态上的投影值,所以在 $t = \pi$ 时刻的演化矩阵刚好对应 Heisenberg XX 开链上量子态的理想传输.

关键词:自旋-s 算子,幺正演化矩阵,量子态传输

PACC:0365,0367,7510J

1. 引 言

在量子力学中,体系微观状态随时间的演化规律遵守薛定谔方程,且对于 Hamiltonian 量不显含时间的情形,体系能量为守恒量,任意时刻体系的状态可以表示为

$$|\varphi(t)\rangle = U(t)|\varphi(0)\rangle,$$

其中 $|\varphi(0)\rangle$ 为系统初始时刻的状态,$U(t) = e^{-itH}$ 是描述量子态随时间演化的算符.在能量表象中,$U(t)$ 可以表示为矩阵形式,称之为演化矩阵.演化矩阵元的模方代表某一时刻系统从初态演化到相应末态的概率.演化矩阵的求解不仅是基本量子力学中的一个重要问题,而且在量子通信和量子计算领域也会遇到求解演化矩阵的问题[1-3].

任意自旋粒子的量子特性是人们极为关注的一个热门话题[4-11],对其幺正演化矩阵的推导一般需要专门的群论知识或其他较高深的数学工具[12,13],很不容易理解.采用级数展开的方式比较好懂,但只能严格求解 $s = 1/2$ 和 $s = 1$ 的情形.本文提出了一种利用 Hamiltonian 量等价性严格求解任意自旋-s 算子幺正演化矩阵的方法,该方法通过比较在空间 $|sm\rangle$ $(m = -s, -s+1, \cdots, s)$ 中 Hamiltonian 量 $H_s = S_x$ 与在空间 $|n\rangle = \sigma_n^+ |0\rangle^{\otimes N}$ $(n = 1, 2, \cdots, N)$ 中相互作用 $J_n = \sqrt{n(N-n)}$ 时对应 Hamiltonian 量 $H_{xx} = \sum_{n=1}^{N-1} J_n(\sigma_n^x \sigma_{n+1}^x + \sigma_n^y \sigma_{n+1}^y)/4$ 的等价性,将自旋-s 算子幺正演化矩阵的求解转化为由 $2s+1$ 个自旋-1/2 粒子组成的 Heisenberg XX 开链中量子态 $|n\rangle$ 的时间演化矩阵的求解.该方法的优点是简捷易懂,并且可以严格求解任意自旋-s 算子的幺正演化矩阵.

2. Hamiltonian 量的等价性

对自旋-s 算子,其幺正演化矩阵元可表示为 $d^s_{m'm}(t) = \langle sm'|e^{-itS_x}|sm\rangle$,$d^s_{m'm}(t)$ 模的平方代表某一时刻系统从初态 $|sm\rangle$ 演化到末态 $|sm'\rangle$ 的概率.

在 $|sm\rangle$ 张开的 $2s+1$ 维 Hilbert 空间 S_m 中,Hamiltonian 量 $H_s = S_x$ 对应的表示矩阵元为

$$h^s_{m'm} = \langle sm'|H_s|sm\rangle = \langle sm'|S_x|sm\rangle$$

---

* 国家自然科学基金(批准号:10547008)资助的课题.

† E-mail:mingliang0301@xiyou.edu.cn

$$=\begin{cases}\sqrt{(s-m)(s+m+1)}/2 & (m'=m+1),\\ \sqrt{(s+m)(s-m+1)}/2 & (m'=m-1),\\ 0 & (m'\neq m\pm 1),\end{cases}\quad(1)$$

其中利用了关系

$$S_{\pm}\,|\,sm\rangle=\sqrt{(s\mp m)(s\pm m+1)}\,|\,s,m\pm 1\rangle$$

和

$$S_x=(S_++S_-)/2.$$

另一方面,在$|\,n\rangle=\sigma_n^+\,|\,0\rangle^{\otimes N}(n=1,2,\cdots,N)$张开的$N$维 Hilbert 子空间$S_n$中,Hamiltonian 量$H_{xx}=\sum_{n=1}^{N-1}J_n(\sigma_n^x\sigma_{n+1}^x+\sigma_n^y\sigma_{n+1}^y)/4$对应的表示矩阵元为

$$\begin{aligned}h_{n'n}^{xx}&=\langle n'\,|H_{xx}|\,n\rangle\\&=\langle n'\,|\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{4}J_n(\sigma_n^x\sigma_{n+1}^x+\sigma_n^y\sigma_{n+1}^y)\,|\,n\rangle\\&=\begin{cases}J_n/2 & (n'=n+1),\\ J_{n-1}/2 & (n'=n-1),\\ 0 & (n'\neq n\pm 1),\end{cases}\end{aligned}\quad(2)$$

其中$J_n=\sqrt{n(N-n)}$.

若系统初始态为$|\,n\rangle(|\,sm\rangle)$,则任一时刻系统量子态的动力学行为完全由空间$S_n(S_m)$中初态的时间演化决定,所以若取$N=2s+1$,并把$|\,n\rangle$与$|\,m=-(N-1)/2+n-1\rangle$对应(如图 1 所示),则通过比较(1)和(2)式可以发现 Hamiltonian 量H_s与H_{xx}对应的表示矩阵元完全相同,也就是说 Hamiltonian 量H_s与H_{xx}是等价的,从而我们可以将求解自旋-s算子的幺正演化矩阵问题转化为求解相互作用$J_n=\sqrt{n(N-n)}$时由$2s+1$个自旋-1/2 的粒子组成的 Heisenberg XX 开链中态的演化问题,即求

$$d_{n'n}^{xx}(t)=\langle n'\,|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH_{xx}}\,|n\rangle.\quad(3)$$

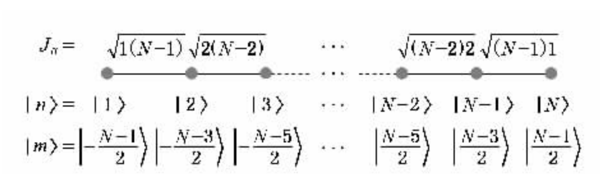

图 1 $|\,n\rangle$和$|\,sm\rangle$的对应关系图

3. 系统本征态的求解

假设系统初始时刻处于态$|\,n\rangle$,由于 Hamiltonian 量H_{xx}不显含时间$t(\partial H_{xx}/\partial t=0)$,体系的能量为守恒量,因此$t$时刻系统的状态(取$\hbar=1$)可以表示为

$$|\,\psi(t)\rangle=U(t)\,|\,n\rangle=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH_{xx}}\,|n\rangle.\quad(4)$$

其中,$U(t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH_{xx}}$为描述量子态随时间$t$演化的算符,采取能量表象(以能量本征态为基矢的表象),把$|\,n\rangle$表示成

$$|\,n\rangle=\sum_{k=1}^{N}|\,\phi\rangle_{kk}\langle\phi\,|n\rangle=\sum_{k=1}^{N}c_{k,n}\,|\phi\rangle_k;\quad(5)$$

$|\,\phi\rangle_k$是包括H_{xx}在内的一组守恒量完全集的共同本征态,即

$$H_{xx}\,|\phi\rangle_k=E_k\,|\phi\rangle_k;\quad(6)$$

E_k为相应的能量本征值,k代表一组完备的量子数.

根据(5)式可得在以$|\,n\rangle$为基矢的表象中,$|\,\phi\rangle_k$可以表示为

$$|\,\phi\rangle_k=\sum_{n=1}^{N}|\,n\rangle\langle n\,|\phi\rangle_k=\sum_{n=1}^{N}c_{k,n}^*\,|n\rangle,\quad(7)$$

其中$c_{k,n}^*$为$c_{k,n}$的复共轭,将(7)式带入(6)式可得态叠加系数满足的方程为

$$2E_kc_{k,n}=J_{n-1}c_{k,n-1}+J_nc_{k,n+1},\quad(8)$$

由上式并结合 Hamiltonian 量H_{xx}与H_s的等价性以及归一化条件可以解得

$$\begin{aligned}E_k&=-\frac{N-1}{2}+k-1,\\c_{1,1}&=1/\sqrt{2^{N-1}},\\c_{k,1}&=(-1)^{k+1}c_{1,k},\\c_{k,n}&=\frac{2E_kc_{k,n-1}-\sqrt{(n-2)(N-n+2)}\,c_{k,n-2}}{\sqrt{(n-1)(N-n+1)}}(n\geqslant 2),\end{aligned}\quad(9)$$

从而有t时刻系统的状态为

$$|\,\psi(t)\rangle=\sum_{k=1}^{N}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tE_k}c_{k,n}\,|\phi\rangle_k.\quad(10)$$

4. 演化矩阵的计算

对于初始态$|\,n\rangle$,由于$c_{k,n}$为实数,故将(7)式代入(10)式,可将$|\,\psi(t)\rangle$进一步写为

$$|\,\psi(t)\rangle=\sum_{k=1}^{N}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tE_k}c_{k,n'}\Big(\sum_{n'=1}^{N}c_{k,n'}\,|n'\rangle\Big).\quad(11)$$

结合上式及(3)和(4)式可得系统演化矩阵元为

$$d_{n'n}^{xx}(t)=\langle n'\,|\psi(t)\rangle=\sum_{k=1}^{N}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tE_k}c_{k,n}c_{k,n'}.\quad(12)$$

由于$\boldsymbol{d}^s(t)=\boldsymbol{d}^{xx}(t)$,所以对任意自旋-$s$算子,只要由(9)式求出态叠加系数$c_{k,n}$,然后代入(12)式即可以求出相应的幺正演化矩阵.

若将 $d^s(t)$ 矩阵左下角矩阵元乘上虚数 i，右上角矩阵元乘上 $-$i，便可得演化算子 e^{-itS_y} 对应的幺正演化矩阵 $d'^s(t)$.

根据系统 Hamiltonian 量 H_{xx} 的对称性可知演化矩阵 $d^{xx}(t)$ 中独立元的个数为

$$K = \begin{cases} N(N+2)/4 & (N \in \text{偶数}), \\ (N+1)^2/4 & (N \in \text{奇数}). \end{cases} \tag{13}$$

对于自旋 $s=1/2$ 和 $s=1$ 的情形，利用上面方法求出的幺正演化矩阵与级数展开方法得到的结果完全相同，对 $s>1$ 的情形，级数展开方法已不再适用，而本文所介绍的方法对任意自旋-s 算子都是适用的. 下面我们就以 $s=3/2$，$s=2$ 和 $s=5/2$ 情形为例，利用上面的方法分别计算它们所对应的幺正演化矩阵.

4.1. $s=3/2$ 情形

当 $s=3/2$ 时，$N=2s+1=4$，利用(9)式可以求得展开系数 $c_{k,n}$ 和相应的能量本征值 E_k，如表 1 所示.

表 1　$s=3/2$ 时对应的态叠加系数 $c_{k,n}$ 和能量本征值 E_k

k	$c_{k,1}$	$c_{k,2}$	$c_{k,3}$	$c_{k,4}$	E_k
1	$\sqrt{2}/4$	$\sqrt{6}/4$	$\sqrt{6}/4$	$\sqrt{2}/4$	3/2
2	$\sqrt{6}/4$	$\sqrt{2}/4$	$-\sqrt{2}/4$	$-\sqrt{6}/4$	1/2
3	$\sqrt{6}/4$	$-\sqrt{2}/4$	$-\sqrt{2}/4$	$\sqrt{6}/4$	$-1/2$
4	$\sqrt{2}/4$	$-\sqrt{6}/4$	$\sqrt{6}/4$	$-\sqrt{2}/4$	$-3/2$

将上述结果代入(12)式，并且把行和列的编号 $m'(n')$ 和 $m(n)$ 按由大到小的顺序排列(即 $m'(n')$ 大的在上面，$m(n)$ 大的在左边)，即可求得 $s=3/2$ 时对应的幺正演化矩阵

$$\begin{aligned} d^s(t) &= d^{xx}(t) \\ &= \begin{pmatrix} \cos^3\frac{t}{2} & -i\sqrt{3}\sin\frac{t}{2}\cos^2\frac{t}{2} & -\sqrt{3}\cos\frac{t}{2}\sin^2\frac{t}{2} & i\sin^3\frac{t}{2} \\ -i\sqrt{3}\sin\frac{t}{2}\cos^2\frac{t}{2} & 3\cos^3\frac{t}{2}-2\cos\frac{t}{2} & i\left(3\sin^3\frac{t}{2}-2\sin\frac{t}{2}\right) & -\sqrt{3}\cos\frac{t}{2}\sin^2\frac{t}{2} \\ -\sqrt{3}\cos\frac{t}{2}\sin^2\frac{t}{2} & i\left(3\sin^3\frac{t}{2}-2\sin\frac{t}{2}\right) & 3\cos^3\frac{t}{2}-2\cos\frac{t}{2} & -i\sqrt{3}\sin\frac{t}{2}\cos^2\frac{t}{2} \\ i\sin^3\frac{t}{2} & -\sqrt{3}\cos\frac{t}{2}\sin^2\frac{t}{2} & -i\sqrt{3}\sin\frac{t}{2}\cos^2\frac{t}{2} & \cos^3\frac{t}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{14}$$

4.2. $s=2$ 情形

当 $s=2$ 时，$N=2s+1=5$，利用(9)式可以求得展开系数 $c_{k,n}$ 和相应的能量本征值 E_k，如表 2 所示.

表 2　$s=2$ 时对应的态叠加系数 $c_{k,n}$ 和能量本征值 E_k

k	$c_{k,1}$	$c_{k,2}$	$c_{k,3}$	$c_{k,4}$	$c_{k,5}$	E_k
1	1/4	1/2	$\sqrt{6}/4$	1/2	1/4	2
2	1/2	1/2	0	$-1/2$	$-1/2$	1
3	$\sqrt{6}/4$	0	$-1/2$	0	$\sqrt{6}/4$	0
4	1/2	$-1/2$	0	1/2	$-1/2$	-1
5	1/4	$-1/2$	$\sqrt{6}/4$	$-1/2$	1/4	-2

将上述结果代入(12)式，同样把行和列的编号 $m'(n')$ 和 $m(n)$ 按由大到小的顺序排列，并取 $\alpha=\sin(t/2)$，$\beta=\cos(t/2)$，则很容易求得 $s=2$ 时对应的幺正演化矩阵为

$$\begin{aligned} d^s(t) &= d^{xx}(t) \\ &= \begin{pmatrix} \beta^4 & -2i\alpha\beta^3 & -\sqrt{6}\alpha^2\beta^2 & 2i\alpha^3\beta & \alpha^4 \\ -2i\alpha\beta^3 & 4\beta^4-3\beta^2 & i\sqrt{6}\alpha\beta(2\alpha^2-1) & \alpha^2(1-4\beta^2) & 2i\alpha^3\beta \\ -\sqrt{6}\alpha^2\beta^2 & i\sqrt{6}\alpha\beta(2\alpha^2-1) & 1-6\alpha^2\beta^2 & i\sqrt{6}\alpha\beta(2\alpha^2-1) & -\sqrt{6}\alpha^2\beta^2 \\ 2i\alpha^3\beta & \alpha^2(1-4\beta^2) & i\sqrt{6}\alpha\beta(2\alpha^2-1) & 4\beta^4-3\beta^2 & -2i\alpha\beta^3 \\ \alpha^4 & 2i\alpha^3\beta & -\sqrt{6}\alpha^2\beta^2 & -2i\alpha\beta^3 & \beta^4 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{15}$$

4.3. $s = 5/2$ 情形

当 $s = 5/2$ 时，$N = 2s + 1 = 6$，利用(9)式可以求得展开系数 $c_{k,n}$ 和相应的能量本征值 E_k，如表 3 所示.

将上述结果代入(12)式，把行和列的编号 m' (n') 和 $m(n)$ 按由大到小的顺序排列，并取 $\alpha = \sin(t/2)$，$\beta = \cos(t/2)$，则可以求得 $s = 5/2$ 时对应的幺正演化矩阵为

表 3　$s = 5/2$ 时对应的态叠加系数 $c_{k,n}$ 和能量本征值 E_k

k	$c_{k,1}$	$c_{k,2}$	$c_{k,3}$	$c_{k,4}$	$c_{k,5}$	$c_{k,6}$	E_k
1	$\sqrt{2}/8$	$\sqrt{10}/8$	$\sqrt{5}/4$	$\sqrt{5}/4$	$\sqrt{10}/8$	$\sqrt{2}/8$	5/2
2	$\sqrt{10}/8$	$3\sqrt{2}/8$	1/4	$-1/4$	$-3\sqrt{2}/8$	$-\sqrt{10}/8$	3/2
3	$\sqrt{5}/4$	1/4	$-\sqrt{2}/4$	$-\sqrt{2}/4$	1/4	$\sqrt{5}/4$	1/2
4	$\sqrt{5}/4$	$-1/4$	$-\sqrt{2}/4$	$\sqrt{2}/4$	1/4	$\sqrt{5}/4$	$-1/2$
5	$\sqrt{10}/8$	$-3\sqrt{2}/8$	1/4	1/4	$-3\sqrt{2}/8$	$\sqrt{10}/8$	$-3/2$
6	$\sqrt{2}/8$	$-\sqrt{10}/8$	$\sqrt{5}/4$	$-\sqrt{5}/4$	$\sqrt{10}/8$	$-\sqrt{2}/8$	$-5/2$

$$
\boldsymbol{d}^s(t) = \boldsymbol{d}^{xx}(t)
= \begin{pmatrix}
\beta^5 & -\mathrm{i}\sqrt{5}\alpha\beta^4 & -\sqrt{10}\alpha^2\beta^3 & \mathrm{i}\sqrt{10}\alpha^3\beta^2 & \sqrt{5}\alpha^4\beta & -\mathrm{i}\alpha^5 \\
-\mathrm{i}\sqrt{5}\alpha\beta^4 & 5\beta^5 - 4\beta^3 & \mathrm{i}\sqrt{2}\alpha\beta^2(5\alpha^2 - 2) & \sqrt{2}\alpha^2\beta(2 - 5\beta^5) & -\mathrm{i}(5\alpha^5 - 4\alpha^3) & \sqrt{5}\alpha^4\beta \\
-\sqrt{10}\alpha^2\beta^3 & \mathrm{i}\sqrt{2}\alpha\beta^2(5\alpha^2 - 2) & 10\beta^5 - 12\beta^3 + 3\beta & \mathrm{i}(12\alpha^3 - 10\alpha^5 - 3\alpha) & \sqrt{2}\alpha^2\beta(2 - 5\beta^5) & \mathrm{i}\sqrt{10}\alpha^3\beta^2 \\
\mathrm{i}\sqrt{10}\alpha^3\beta^2 & \sqrt{2}\alpha^2\beta(2 - 5\beta^5) & \mathrm{i}(12\alpha^3 - 10\alpha^5 - 3\alpha) & 10\beta^5 - 12\beta^3 + 3\beta & \mathrm{i}\sqrt{2}\alpha\beta^2(5\alpha^2 - 2) & -\sqrt{10}\alpha^2\beta^3 \\
\sqrt{5}\alpha^4\beta & -\mathrm{i}(5\alpha^5 - 4\alpha^3) & \sqrt{2}\alpha^2\beta(2 - 5\beta^5) & \mathrm{i}\sqrt{2}\alpha\beta^2(5\alpha^2 - 2) & 5\beta^5 - 4\beta^3 & -\mathrm{i}\sqrt{5}\alpha\beta^4 \\
-\mathrm{i}\alpha^5 & \sqrt{5}\alpha^4\beta & \mathrm{i}\sqrt{10}\alpha^3\beta^2 & -\sqrt{10}\alpha^2\beta^3 & -\mathrm{i}\sqrt{5}\alpha\beta^4 & \beta^5
\end{pmatrix}. \tag{16}
$$

5. 结果与讨论

本文把求自旋-s 算子幺正演化矩阵转化为求 Heisenberg XX 开链中单态的演化问题，计算简便、容易理解，不同于群论和直接计算的方法，由于找不到一个合适的词来描述，所以称其为新方法.

对演化矩阵进行分析后发现只有系统从初态 $|sm\rangle$ $(m = -s, -s+1, \cdots, s)$ 演化到末态 $|s, -m\rangle$ 时的概率才能达到最大值 1，而且对应时刻为 $t = \pi$，这相当于对初始时刻态 $|sm\rangle$ 绕 x 轴转动一个角度 π. 实际上只要我们把时刻 t 用角度 β 替换，就很容易发现演化矩阵 $\boldsymbol{d}^s(t)$ $(\boldsymbol{d}'^s(t))$ 正好对应于欧拉角 $\alpha = \gamma = 0$ 时的转动矩阵 $\boldsymbol{D}^s(0\beta_x 0)$ $(\boldsymbol{D}^s(0\beta_y 0))$[12]，初始态 $|sm\rangle$ 在算子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tS_x}$ $(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tS_y})$ 下的演化实质上就相当于对态 $|sm\rangle$ 进行一个绕 $x(y)$ 轴角度大小为 $\beta = t$ 的空间转动，演化矩阵元就是转动后的态 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tS_x}|sm\rangle$ $(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tS_y}|sm\rangle)$ 在 $|sm'\rangle$ 态上的投影值，所以只有从初态 $|sm\rangle$ 到末态 $|s, -m\rangle$ 时的演化概率才有可能达到最大值 1.

由于 $|n\rangle$ 与 $|m = -(N-1)/2 + n - 1\rangle$ 存在着一一对应关系，所以在 $t = \pi$ 时刻 $|n\rangle$ 演化到 $|N - n + 1\rangle$ 的概率也为 1，这在量子态的传输中有着重要的应用. 例如对于一个长度为 N 且第 n 和第 $n+1$ 个格点间交换常数为 $J_n = \sqrt{n(N-n)}$ 的 Heisenberg XX 自旋开链，若发送者(Alice)把第一个量子位制备成初态

$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\sin(\theta/2)|1\rangle,$$

则经过时间 $t = \pi$，接收者(Bob)将在第 N 个量子位上精确的得到该态，即态 $|\psi\rangle$ 被从第一个量子位传输(演化)到了第 N 个量子位上面. 同样根据前面我们提到的量子态的空间转动理论可知，若 Alice 把前 n 个量子位制备成初态

$$|\psi\rangle = \prod_{k=1}^{n} \otimes \left(\cos(\theta_k/2)|0\rangle + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_k}\sin(\theta_k/2)|1\rangle\right),$$

则在 $t = \pi$ 时刻 Bob 将在后 n 个量子位上精确的得到该态，即态 $|\psi\rangle$ 被从前 n 个量子位传输(演化)到了后 n 个量子位上面. 这种量子态的传输方案的特点是对于 Alice 编码在第 n 个量子位上的信息，Bob 只能在他所拥有的第 $N - n + 1$ 个量子位上以最大概率 1 获得，而任何第三者(Eve)都不可能通过对中间信道上的量子位进行测量而以概率 1 获得全部待传送的信息，也就是说这种通信方式是绝对安全的.

[1] Christandl M, Datta N, Ekert A, Landahl A J 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 187902

[2] Imamoglu A, Awschalom D D, Burkard G, DiVincenzo D P, Loss D, Sherwin M, Small A 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 4204

[3] Wang X G 2001 *Phys. Rev.* A **64** 012313

[4] Haldane F D M 1983 *Phys. Rev. Lett.* **50** 1153

[5] Morra R M, Buyers W J L, Armstrong R L, Hirakawa K 1988 *Phys. Rev.* B **38** 543

[6] Granroth G E, Meisel M W, Chaparala M, Jolicoeur T, Ward B H, Talham D R 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 1616

[7] Jiang Q, Cao H, Li Z 1996 *Phys. Lett.* A **221** 445

[8] Wang X, Qin S, Yu L 1999 *Phys. Rev.* B **60** 14529

[9] Xi X Q, Liu W M 2007 *Chin. Phys.* **16** 1858

[10] Xi X Q, Chen W X, Liu Q, Yue R H 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3026 (in Chinese) [惠小强、陈文学、刘　起、岳瑞宏 2006 物理学报 **55** 3026]

[11] Zhang T, Xi X Q, Yue R H 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2755 (in Chinese) [张　涛、惠小强、岳瑞宏 2004 物理学报 **53** 2755]

[12] Ka X L 2001 *Advanced Quantum Mechanics* (Beijing: High Education Press) p301 (in Chinese) [喀兴林 2001 高等量子力学(北京：高等教育出版社) 第 301 页]

[13] Xie G F 1996 *College Physics* **15** 14 (in Chinese) [谢国芳 1996 大学物理 **15** 14]

A new method of calculating the unitary evolution matrix $d^s(t)$ of the spin-s operators and its applications*

Hu Ming-Liang† Xi Xiao-Qiang

(*Department of Applied Mathematics and Applied Physics, Xi'an Institute of Posts and Telecommunications, Xi'an* 710061, *China*)

(Received 17 November 2007; revised manuscript received 24 December 2007)

Abstract

We propose a method for calculating the unitary evolution matrix of the arbitrary spin-s operators rigorously. This is an indirect method, which differs from the method of group theory or the method of direct calculation. The kernel of our method is to use the identity of two systems in their expressions, namely the Hamiltonian $H_s = S_x$ of spin-s particle and the Hamiltonian of the Heisenberg XX open chain with interaction $J_n = \sqrt{n(N-n)}$. Because of this identity, the calculation of the unitary evolution matrix of the spin-s operators is substituted by the calculation of the state evolution matrix in Heisenberg XX open chain. As examples, the unitary evolution matrix of $s=3/2$, $s=2$ and $s=5/2$ are calculated by using our method. Since the evolution of the state $|sm\rangle$ under the operator e^{-itS_x} corresponds to the rotation of the initial state $|sm\rangle$ around the x-axis by an angle $\beta = t$, and the evolution matrix element $d^s_{m'm}(t) = \langle sm'|e^{-itS_x}|sm\rangle$ is just the projection of the finial state $e^{-itS_x}|sm\rangle$ on the initial state $|sm'\rangle$, the evolution matrix at $t=\pi$ corresponds the perfect transmission of quantum state in the Heisenberg XX open chain.

Keywords: spin-s operator, unitary evolution matrix, transfer of quantum state

PACC: 0365, 0367, 7510J

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10547008).

† E-mail: mingliang0301@xiyou.edu.cn