

一类多涡卷混沌系统构造方法研究^{*}

谌 龙[†] 彭海军 王德石

(海军工程大学兵器工程系, 武汉 430033)

(2007 年 11 月 10 日收到, 2007 年 11 月 20 日收到修改稿)

提出一种基于平移变换的多涡卷混沌系统构造方法. 首先选取合适的不稳定线性系统, 利用一系列相互平行的分界面对相空间进行划分, 然后通过对该线性系统进行平移变换, 使新系统作用于相应的空间区域, 最后利用基于符号函数的非线性函数来统一表示整个系统. 根据该方法可以构造具有任意奇数个涡卷的新型混沌系统, 同时也可以对某些现有混沌系统进行改进, 使之成为多涡卷系统. 数值仿真结果验证了该方法的可行性.

关键词: 多涡卷混沌吸引子, 平移变换, 涡卷

PACC: 0545

1. 引 言

近年来, 有关多涡卷混沌吸引子的研究^[1-13]逐渐成为混沌研究领域的一个新方向. 相比于传统的单涡卷和双涡卷混沌系统, 多涡卷混沌系统呈现出更为复杂的结构和动力学行为, 在保密通信和信息隐藏等领域具有较好的应用前景. 同时, 通过对此类系统中混沌的生成机理进行研究也可以加深人们对于混沌系统的理解, 有助于发展新型混沌系统. 在该领域的研究中, 文献 [1] 对近年来提出的多涡卷混沌系统模型及其硬件实现方式进行了综述. 为了获得多涡卷混沌吸引子, 需要对系统方程中的非线性函数进行特殊设计, 通常采用的函数构造方法有多转折点分段线性函数法^[2]、非线性调制函数法^[3]、阶梯函数法^[4]、滞后函数法^[5]和饱和函数法^[6]等. 文献 [8] 利用阶跃函数序列构造非线性函数, 实现了多涡卷高阶广义 Jerk 电路; 文献 [9] 则利用类似的非线性函数, 采用以两个系统变量之差为新变量的方法提出一类多折叠环面多涡卷混沌吸引子. 以上研究成果为多涡卷混沌吸引子的研究提供了丰富的模型, 但其构造过程一般都是在已有混沌系统的基础上通过改变非线性函数的形式来得到多涡卷系统, 参数计算过程通常比较复杂, 且对于系统的生成原理少

有深入的分析 and 解释.

本文提出一种基于平移变换的多涡卷混沌系统生成原理及其构造方法, 并根据此原理以一个简单的不稳定线性系统为基础设计了一个新的多涡卷混沌系统. 运用该原理可以从新的角度来初步解释现有某些多涡卷系统的构造原理, 同时也可以对现有的混沌系统如 Chua 电路进行改进, 使之拓展为多涡卷混沌系统. 数值仿真结果进一步验证了该方法的有效性.

2. 构造多涡卷混沌系统

2.1. 基本原理

本文的基本思想是首先构造一个三维不稳定线性系统, 使原点为鞍焦点, 且系统特征值为一个负实根和一对实部为正的共轭复根, 显然该系统可以在原点附近形成涡卷, 但不稳定. 根据此涡卷所处平面的空间方位, 利用一系列相互平行的分界面对空间区域进行适当划分, 然后对线性系统进行相应的平移变换使之作用于各区域, 最后选择合适的非线性函数来统一表示整个系统. 分界面的选取原则是使某一涡卷中的相点盘旋运动到其边缘后能进入另一区域, 然后迅速趋于另一涡卷平面进行盘旋运动, 当达到此涡卷边缘后又进入新的区域, 如此周而复始, 形成多涡卷

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 30272113)资助的课题.

[†] E-mail: xhrhgz@21cn.com

混沌吸引子.下面根据以上基本思想来设计多涡卷混沌系统.首先选取不稳定线性系统如下:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= py, \\ \dot{y} &= x + qy, \\ \dot{z} &= rz, \end{aligned} \quad (1)$$

其中参数 $p = -4$, $q = 0.2$, $r = -5$, 显然原点为系统唯一平衡点, 系统特征值为 $\lambda_{1,2} = 0.1 \pm 1.9975i$, $\lambda_3 = -5$, 易知变量 x 和 y 的变化由 $\lambda_{1,2}$ 决定, 而变量 z 的变化由 λ_3 决定, 因此相轨迹会迅速趋近于 xy 平面, 同时盘旋远离原点, 即原点为系统的鞍焦点, 而 xy 平面类似于混沌系统中涡卷所在的平面, 可称其为涡卷平面. 以 5 涡卷混沌系统为例, 其构造原理示意图如图 1 所示. 该图表示各涡卷平面和分界面在 xz 平面上的投影, 其中虚线表示分界面, 实线表示涡卷平面, 符号“ \times ”表示各涡卷对应的线性系统的平衡点, 箭头表示相轨迹从当前涡卷穿越分界面进入相邻涡卷时的运动方向, 字母 A, B, C, D, E 分别代表各个涡卷.

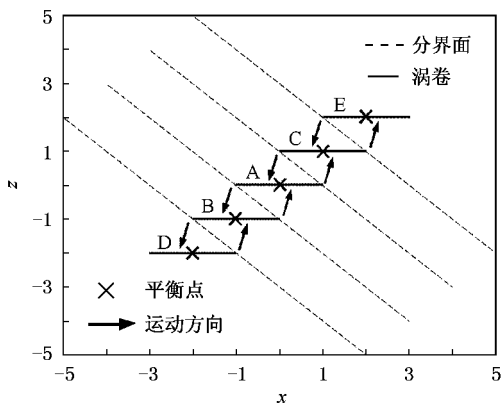


图 1 5 涡卷混沌系统的构造原理图

下面分析图 1 中各涡卷对应的系统变量与系统(1)变量之间的关系. 涡卷 A 可由系统(1)直接生成, 因此不需进行变换, 即有

$$x_A = x, y_A = y, z_A = z.$$

涡卷 B 可由涡卷 A 在 x 方向和 z 方向经平移变换后得到. 令变量下标表示相应的涡卷, 则各变量之间的关系为

$$x_B = x - 1, y_B = y, z_B = z - 1.$$

由图 1 中的几何关系易知涡卷 A 和涡卷 B 之间的分界面方程为 $x + z = -1$. 依此类推, 可得涡卷 C、

涡卷 D、涡卷 E 对应系统变量与系统(1)变量之间的平移关系为

$$\begin{aligned} x_C &= x + 1, y_C = y, z_C = z + 1; \\ x_D &= x - 2, y_D = y, z_D = z - 2; \\ x_E &= x + 2, y_E = y, z_E = z + 2. \end{aligned}$$

涡卷 A 和涡卷 C 之间的分界面方程为

$$x + z = 1.$$

涡卷 B 和涡卷 D 之间的分界面方程为

$$x + z = -3.$$

涡卷 C 和涡卷 E 之间的分界面方程为

$$x + z = 3.$$

综合以上变量关系和分界面方程, 利用变量 x_1, y_1, z_1 统一表示各涡卷对应的变量, 则可将所有的平移变换统一表示为

$$\begin{aligned} x &= x_1 - f(x_1 + z_1), \\ y &= y_1, \\ z &= z_1 - f(x_1 + z_1), \end{aligned} \quad (2)$$

其中非线性函数

$$\begin{aligned} f(u) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \{ \text{sgn}[u + (2k - 1)] \\ &\quad + \text{sgn}[u - (2k - 1)] \}, \end{aligned}$$

求和参数 $N = 2$. 将(2)式代入系统(1)后可得 5 涡卷混沌系统的方程为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= py_1, \\ \dot{y}_1 &= x_1 - f(x_1 + z_1) + qy_1, \\ \dot{z}_1 &= rz_1 - f(x_1 + z_1). \end{aligned} \quad (3)$$

经计算得到此系统最大 Lyapunov 指数为 0.19, 满足混沌系统的必要条件. 当 N 取其他自然数时, 根据构造原理可知系统将形成 $2N + 1$ 个涡卷, 从而可以方便地得到具有指定奇数个涡卷的混沌吸引子.

2.2. 数值研究结果

为验证本文方法的可行性, 在系统(3)中取初值 $x(0) = 0.9, y(0) = 0.1, z(0) = 0.1$, 利用四阶 Runge-Kutta 法求解并绘制相图. 当参数 $N = 2$ 时, 系统生成 5 涡卷混沌吸引子, 如图 2 所示. 其中图 2(c)为相图在 xz 平面上的投影, 通过与图 1 对比可见该系统的仿真结果与设计思想是相符合的.

当 N 取其他自然数时, 系统形成 $2N + 1$ 个涡卷, 例如 $N = 3$ 时生成 7 涡卷混沌吸引子, 如图 3 所示.

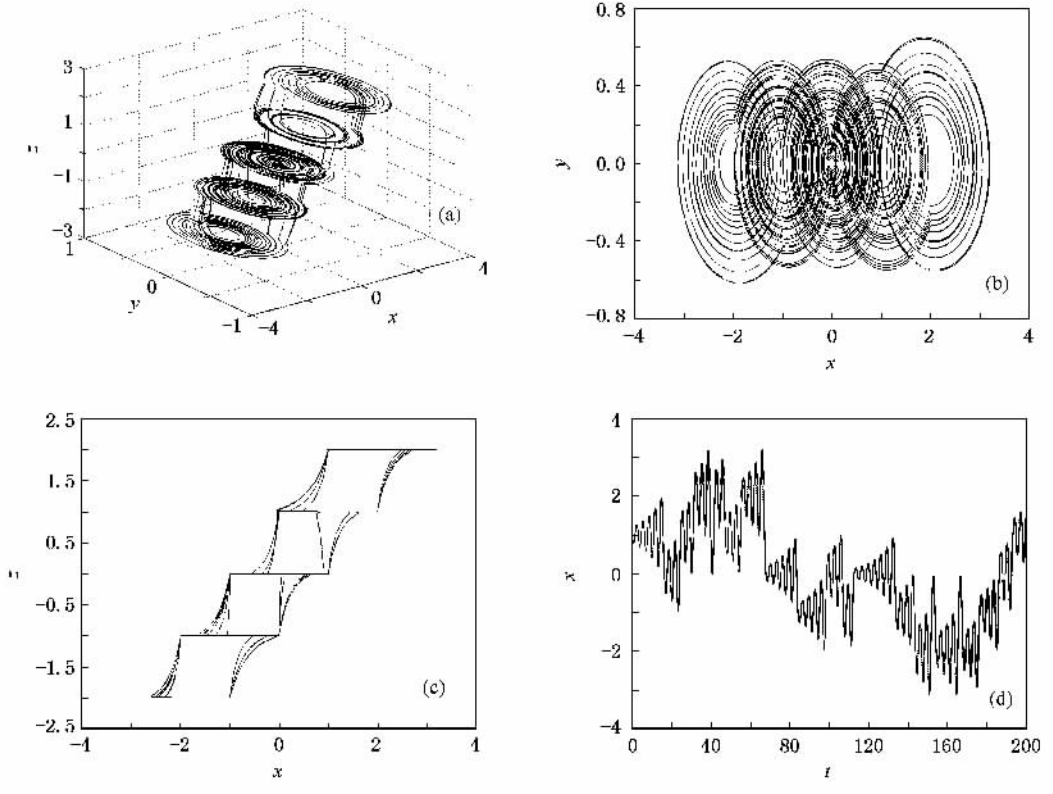


图2 5 涡卷混沌系统的相图与时域波形 (a) x - y - z 相图 ;(b) x - y 相图 ;(c) x - z 相图 ;(d) x - t 波形图

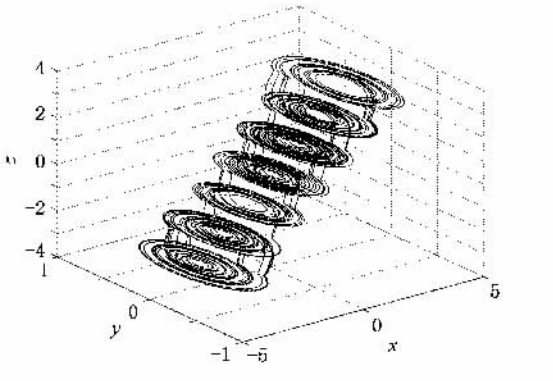


图3 7 涡卷混沌系统的相图

3. 利用现有混沌系统构造多涡卷混沌吸引子

3.1. 构造原理

文献 [2] 利用增加分段线性函数转折点的方法使四阶 Chua 系统生成多涡卷混沌吸引子, 并给出了转折点的详细递推公式, 不过其计算过程比较复杂. 利用本文提出的基于平移变换的多涡卷混沌系统构

造方法不仅可以得到新的混沌系统, 同时也可以根据其基本原理对具有平移特征的某些现有混沌系统进行改进, 从而得到多涡卷系统, 且无需复杂的参数计算. 下面以 Chua 电路为例, 给出构造方法和仿真结果.

Chua 电路系统的归一化方程为

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= \alpha [y_2 - x_2 - g(x_2)], \\ \dot{y}_2 &= x_2 - y_2 + z_2, \\ \dot{z}_2 &= -\beta y_2, \end{aligned} \tag{4}$$

其中分段线性函数

$$g(x_2) = bx_2 + \frac{1}{2}(a - b)(|x_2 + 1| - |x_2 - 1|).$$

当参数 $a = -1.27$, $b = -0.68$, $\alpha = -10$, $\beta = 14.87$ 时, 系统相图为双涡卷混沌吸引子. 在分析 Chua 系统的动力学特性时, 通常根据分段线性函数 $g(x)$ 的转折点坐标将向空间划分为区域 D_0 ($|x| \leq 1$), 区域 D_1 ($x > 1$) 和区域 D_2 ($x < -1$), 在各区域内系统的动力学方程是线性的. 由于系统在区域 D_1 和 D_2 中的平衡点处具有一对正实部共轭复根和一个负实根, 因此在这两个区域内具备形成涡卷的条件, 而在区域 D_0 中的平衡点处具有一对负实部共轭复根和

一个正实根,因此不能形成盘旋扩张的涡卷,从相图看此区域实际上成为系统两涡卷之间的一个过渡带,即键波区域.在区域 D_1 中,系统方程(4)可写为

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= \alpha[y_2 - (1 + b)(x_2 - d)], \\ \dot{y}_2 &= x_2 - d - y_2 + z_2 + d, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\dot{z}_2 = -\beta y_2,$$

其中参数 $d = \frac{b-a}{1+b}$.

若进行变量代换

$$\bar{x} = x_2 - d, \bar{y} = y_2, \bar{z} = z_2 + d,$$

则可得如下线性方程:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \alpha[\bar{y} - (1 + b)\bar{x}], \\ \dot{\bar{y}} &= \bar{x} - \bar{y} + \bar{z}, \\ \dot{\bar{z}} &= -\beta\bar{y}, \end{aligned} \quad (6)$$

即系统(5)可由线性系统(6)在 x 方向和 z 方向平移后得到.同理,在区域 D_2 中,系统方程(4)与线性系统(6)之间的变量关系为

$$\bar{x} = x_2 + d, \bar{y} = y_2, \bar{z} = z_2 - d.$$

根据以上分析结果,可以以线性系统(6)为基础,构

造多涡卷混沌系统如下:

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= \alpha\{y_3 - (1 + b)[x_3 - h(x_3)]\}, \\ \dot{y}_3 &= x_3 - y_3 + z_3, \\ \dot{z}_3 &= -\beta y_3, \end{aligned} \quad (7)$$

其中非线性函数

$$\begin{aligned} h(u) &= \frac{d}{2} \sum_{k=1}^N \{ \text{sgr}[u + (2k - 1)] \\ &\quad + \text{sgr}[u - (2k - 1)] \}, \end{aligned}$$

参数 $b = -0.68$,显然此时系统分界面为 $x_3 = \pm(2k - 1)$.为使各涡卷中心处于相邻分界面的中央,此处取参数 $d = 2$.通过改变参数 N ,即可方便地得到具有 $2N + 1$ 个涡卷的基于 Chua 电路的混沌系统.

3.2. 数值研究结果

对于系统(7),取初值 $x(0) = 0.5, y(0) = 0.5, z(0) = 0.1$,利用四阶 Runge-Kutta 法求解并绘制相图如图4所示.其中 $N = 1$ 时生成3涡卷混沌吸引子,见图4(a)和(b), $N = 2$ 时生成5涡卷混沌吸引子,见图4(c), $N = 3$ 时生成7涡卷混沌吸引子,见图4(d).

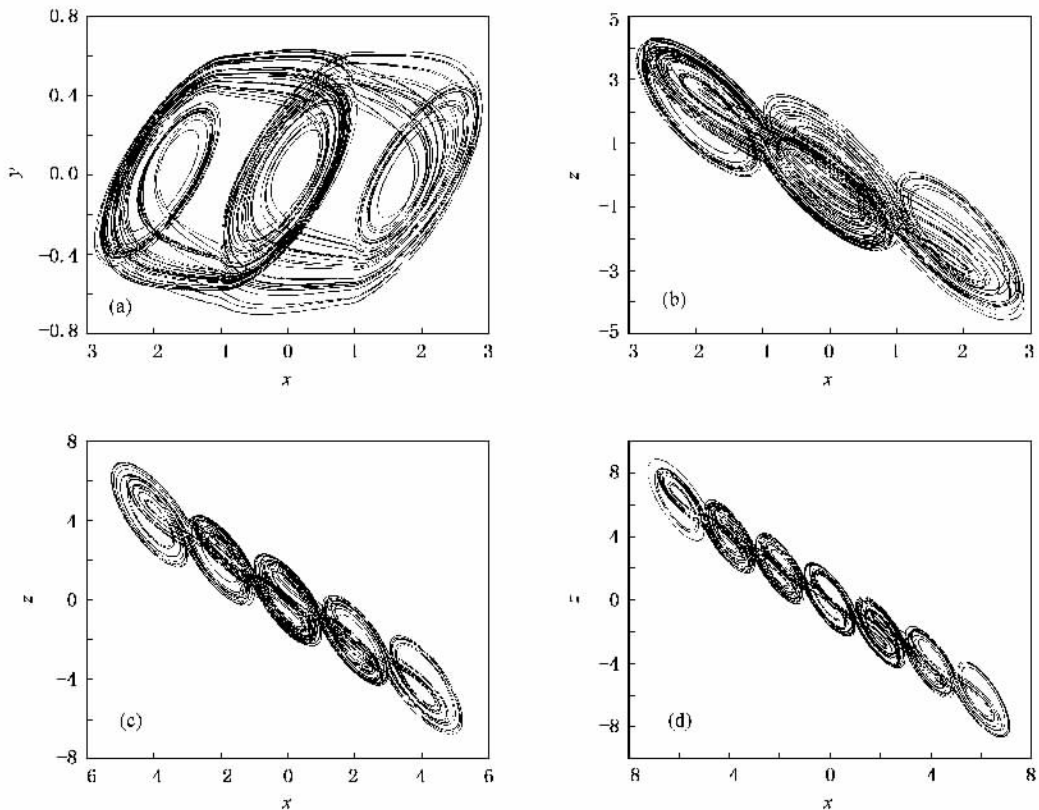


图4 基于 Chua 系统的多涡卷系统相图 (a)3 涡卷 $x-y$ 相图;(b)3 涡卷 $x-z$ 相图;(c)5 涡卷 $x-z$ 相图;(d)7 涡卷 $x-z$ 相图.

4. 结 论

本文提出了一种基于平移变换的多涡卷混沌系统生成原理及其构造方法. 根据此原理选取合适的不稳定线性系统并通过平移变换设计了一个新的多

涡卷混沌系统. 数值仿真结果验证了该方法的有效性. 运用该原理可以从新的角度来解释某些多涡卷系统的构造原理, 同时也可以对具有平移特征的某些现有混沌系统如 Chua 电路进行改进, 使之拓展为多涡卷混沌系统. 该方法可为混沌生成原理研究以及多涡卷混沌系统的设计提供新的途径.

- [1] Lü J H , Chen G R 2006 *Int. J. Bifurc. Chaos* **16** 775
- [2] Yu S M , Lin Q H , Qiu S S 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 25 (in Chinese) [禹思敏、林清华、丘水生 2003 物理学报 **52** 25]
- [3] Tang K S , Zhong G Q , Chen G R , Man K F 2001 *IEEE Trans. CAS- I* **48** 1369
- [4] Yalcin M E , Suykens J , Vandewalle J , Ozoguz S 2002 *Int. J. Bifurc. Chaos* **12** 23
- [5] Lü J H , Han F L , Yu X H , Chen G R 2004 *Automatica* **40** 1677
- [6] Lü J H , Chen G R , Yu X H , Leung H 2004 *IEEE Trans. CAS- I* **51** 2476
- [7] Lü J H , Yu S M , Leung H , Chen G R 2006 *IEEE Trans. CAS- I* **53** 149
- [8] Liu M H , Yu S M 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5707 (in Chinese) [刘明华、禹思敏 2006 物理学报 **55** 5707]
- [9] Wang F Q , Liu C X 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1983 (in Chinese) [王发强、刘崇新 2007 物理学报 **56** 1983]
- [10] Wang F Q , Liu C X 2006 *Chin. Phys.* **15** 2878
- [11] Yu S M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1500 (in Chinese) [禹思敏 2005 物理学报 **54** 1500]
- [12] Yu S M , Lü J H , Leung H , Chen G R 2005 *IEEE Trans. CAS- I* **52** 1459
- [13] Yu S M , Lü J H , Chen G R 2007 *Phys. Lett. A* **364** 244

Studies on the construction method of a family of multi-scroll chaotic systems *

Chen Long[†] Peng Hai-Jun Wang De-Shi

(*Weaponry Engineering Department , Naval University of Engineering , Wuhan 430033 , China*)

(Received 10 November 2007 ; revised manuscript received 20 November 2007)

Abstract

A method for constructing multi-scroll chaotic systems based on shift transformation is presented. Firstly a proper unstable linear system is selected, and the phase space is divided into several parts by a series of parallel interfaces. Then shift transformations of the linear system are implemented so that each space region is dominated by the corresponding new system. Finally the whole system is obtained using a proper nonlinear function based on signum functions. According to this method new multi-scroll chaotic systems with arbitrary odd number scrolls can be constructed, furthermore, some existing chaotic systems can also be modified into multi-scroll systems. Numerical simulations verify the feasibility of the proposed method.

Keywords : multi-scroll chaotic attractors , shift transformation , scrolls

PACC : 0545

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10272113).

† E-mail : xhrhgz@21cn.com