

计算涡度的新方法^{*}

蔡其发^{1)†} 黄思训²⁾ 高守亭¹⁾ 钟 科¹⁾ 李自强³⁾

1) 中国科学院大气物理研究所, 北京 100029)

2) 解放军理工大学气象学院, 南京 211101)

3) 中国海洋大学, 青岛 266003)

(2007 年 10 月 27 日收到, 2007 年 11 月 20 日收到修改稿)

提出应用一维数值微分算法求取观测风场的涡度场, 并与中央差分方法作了比较. 结果表明, 一维数值微分算法稳定、可行且计算精度较高, 对较小尺度的天气系统具有较强的识别能力.

关键词: 数值微分, 吉洪诺夫正则化, 正则化解

PACC: 9260, 9260X, 0270

1. 引 言

涡度是天气分析和预报中的一个非常重要的基本物理量, 但它不是一个直接观测量, 由涡度的定义 $\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ (这里涡度均为铅直涡度), 我们知道, 涡度是表征风场(直接观测量)旋转特性的微分物理量, 当它与其他要素场结合形成新的物理量, 如位涡、湿位涡等, 对高温高湿天气过程和暴雨落区及其移动预报具有重要的指示作用^[1, 2]. 通常情况下, 我们是用差分代替微分来进行数值计算涡度的, 但是风场如果有较小的观测误差, 就有可能造成计算涡度有较大的误差. 其主要原因是, 该问题是一个数值微分问题(通过测量函数在一些离散点上的观测值, 来求得函数的近似导数或偏导数). 它是一个在 Hadamard 意义下的典型的不适定问题^[3, 4], 即如果用差分代替微分来数值计算的话, 则观测数据中的微小误差可能会造成计算结果的巨大误差. 当理论研究不考虑观测数据的误差时, 这一问题较好解决, 一般的有限差分方法就能求得近似的导数或偏导数, 但如果观测数据有误差, 则有限差分方法求解有可能造成误差非常大.

众所周知, 数值天气预报是在离散的时空间里求解偏微分方程组的初(边)值问题, 连续系统的离

散化误差和初始场误差分别是数值天气预报的主要误差来源之一, 数值天气预报的发展正是围绕如何克服这些误差而展开的^[5]. 一方面, 数值天气预报是一个初值问题, 即已知一个现时大气状态的估计, 用模式来预报其演变. 对于一个预报模式而言, 初始条件的确定是一个非常重要而复杂的问题, 气象工作者为提高初始场的分析精度提出了各种资料同化方法, 如最优插值法、三维和四维变分法、Kalman 滤波方法等等; 另一方面, 用来描述大气运动规律的偏微分方程组是非线性的, 难以直接求解, 只能借助数值方法求解, 因此如何将偏微分方程组离散化就是一个十分重要的问题, 国内外学者就偏微分方程的时空间差分格式进行了广泛的研究, 提出了许多差分格式, 并对其收敛性做了深入地探讨^[6-11]. 但是, 气象学者在研究各种差分格式精度的时候, 都有一个共同的前提, 即不计观测数据的误差. 可是, 观测数据误差是客观存在的, 特别是, 有些数值模式用涡度方程代替运动方程, 将涡度作为模式变量, 如用差分方法求取观测风场的涡度作为模式初值, 就可能使模式的初值有很大的误差, 从而对预报精度带来很大的影响. 因此, 如何利用观测风场准确计算涡度这个问题一直困扰着气象工作者.

很多学者从其他角度来考虑求解数值微分问题, 方法多种多样^[12-16], 其中一种求解数值微分问

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 40775023), 国家重点基础研究发展规划项目(批准号: 2004CB418301)和中国科学院海外杰出学者基金(批准号: 2005-2-17)资助的课题.

[†] E-mail: caiqfa@yahoo.com.cn

题的方法就是用吉洪诺夫(Tikhonov)正则化方法,这个方法已证实对于解不适定问题以及反问题是非常有效的^[17,18]。本文提出利用一维一阶的数值微分问题的正则化求解方法来计算焔度。

2. 一维一阶数值微分问题的正则化求解

正则化方法是吉洪诺夫提出的求解不适定问题的一般性方法,它可以被用来解决一般的不适定问题和反问题,其中正则化参数的选取是该方法一个关键问题,下面简要介绍一下用吉洪诺夫正则化方法求解一维一阶数值微分问题的原理。

2.1. 问题的数学表述及已有的主要结果

设 $y = y(x)$ 是定义在 $[0, 1]$ 上的一个函数, m 是一个自然数, $\Delta = \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1\}$ 是 $[0, 1]$ 上的一个划分, 设 δ 是一给定的常数, 用来表示观测数据的观测误差。

记

$$h_i = x_{i+1} - x_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$h = \max_{1 \leq i \leq n} h_i.$$

我们考虑以下的数值微分问题:

给定函数在点 x_i 处的观测值 \tilde{y}_i 满足

$$|\tilde{y}_i - y(x_i)| \leq \delta, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m.$$

我们希望找到函数 $f_*(x)$, 使得 $f'_*(x)$ 是函数 $y'(x)$ 的一个近似, 这里 $x \in [0, 1]$, 并且这个近似要保证一定的精度。

定义记号

$$L^2(0, 1) = \{f | (\int_0^1 f^2(x) dx) < \infty\},$$

$$H^k(0, 1) = \{f | f \in L^2(0, 1), f^{(k)} \in L^2(0, 1)\},$$

$$C[0, 1] = \{f | f \text{ 是区间 } [0, 1] \text{ 上的连续函数}\}.$$

这里上标指的是关于 x 的 k 阶导数, 其中, $L^2(0, 1)$ 表示空间 $L^2(0, 1)$ 中任意函数平方可积。

其范数分别定义为

$$\|f\|_{L^2(0,1)} = (\int_0^1 f^2(x) dx)^{1/2},$$

$$\|f\|_{H^k(0,1)} = (\|f\|_{L^2(0,1)}^2 + \|f^{(k)}\|_{L^2(0,1)}^2)^{1/2},$$

$$\|f\|_{C[0,1]} = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

不失一般性, 假设 $\tilde{y}_0 = y(0), \tilde{y}_n = y(1)$, 即在两端点的观测值是精确的. 定义正则化泛函

$$J(f) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h_i + h_{i+1}}{2} (\tilde{y}_i - f(x_i))^2 + \alpha \|f''\|_{L^2(0,1)}^2, \quad (1)$$

这里 α 是正则化参数。

上述问题可转化为下面两个问题:

问题 1 求函数 $f_* \in H^2(0, 1)$, 满足 $f_*(0) = y(0), f_*(1) = y(1)$, 使得 $J(f_*) = \min!$

问题 2 众所周知, 正则化参数的选取是非常重要的. 如果 f_* 存在, 如何选择与 δ 有关的正则化参数 α , 使得 $f'_*(x)$ 是 $y'(x)$ 的一个近似?

通过理论推导^[19-21], 有如下结果:

定理 1 问题 1 存在唯一的解 f_* , 且 f_* 可用下列方法构造:

1) f_* 是划分 Δ 上的一个分片的三次自然样条函数, 且 $f''_*(0) = f''_*(1) = 0$.

2) f_* 是两次连续可微函数, 即

$$f_*^{(j)}(x_{i+}) = f_*^{(j)}(x_{i-}),$$

$$i = 1, 2, \dots, m-1; j = 0, 1, 2.$$

这里, $f_*(x_{i+}) = \lim_{x \rightarrow x_{i+}} f_*(x), f_*(x_{i-}) = \lim_{x \rightarrow x_{i-}} f_*(x)$.

3) f_* 的三阶导数在点 x_i 上满足

$$f_*'''(x_{i+}) - f_*'''(x_{i-}) = \frac{1}{\delta^2} \frac{h_i + h_{i+1}}{2} (\tilde{y}_i - f_*(x_i)),$$

$$i = 1, 2, \dots, m-1.$$

定理 2 设 f_* 是取正则化参数 $\alpha = \delta^2$ 时问题 1 的解, 如果 $y \in H^2(0, 1)$, 则有

$$\|f'_* - y'\|_{L^2(0,1)} \leq (2h + 4\sqrt{\delta} + \frac{h}{\pi}) \|y''\|_{L^2(0,1)} + h + 2\sqrt{\delta}.$$

定理 1 给出了正则化解 $f_*(x)$ 的构造方法, 定理 2 给出了正则化参数简单取值方法。

2.2. 一维一阶数值微分算法

下面根据定理 1, 2 来重构正则化解 $f_*(x)$, 为简单起见, 假设区间 $[0, 1]$ 上的划分 Δ 为等距划分, 即 $h = 1/n$. 由定理 1 知道, f_* 是一个分片的三次自然样条函数, 在子区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的表达式为

$$f_*(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3,$$

$$i = 0, 1, \dots, m-1. \quad (2)$$

因此总共有 $4n$ 个待定系数, 这些系数可以通

过求解下列方程组求得,并且解是唯一的:

$$f_*^{(j)}(x_i+) - f_*^{(j)}(x_i-) = 0, \quad (3)$$

$$j = 0, 1, 2; i = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$f_*^{(3)}(x_i+) - f_*^{(3)}(x_i-) = \frac{1}{\delta^2 n}(\tilde{y}_i - f_*(x_i)),$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (4)$$

$$f_*^{(2)}(0) = 0, f_*^{(2)}(1) = 0, \quad (5)$$

$$f_*(0) = y(0), f_*(1) = y(1), \quad (6)$$

其中 $f_*^{(j)}$ 表示函数 f_* 的 j 阶导数, \tilde{y}_i 为第 i 点上的观测数据,为了表示方便,记 T 和 Q 为以下 $(n-1) \times (n-1)$ 阶矩阵:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{4h}{3} & \frac{h}{3} & 0 & \dots \\ \frac{h}{3} & \frac{4h}{3} & \frac{h}{3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \frac{h}{3} & \frac{4h}{3} & \frac{h}{3} \\ \dots & 0 & \frac{h}{3} & \frac{4h}{3} \end{pmatrix};$$

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{2}{h} & \frac{1}{h} & 0 & \dots \\ \frac{1}{h} & -\frac{2}{h} & \frac{1}{h} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \frac{1}{h} & -\frac{2}{h} & \frac{1}{h} \\ \dots & 0 & \frac{1}{h} & -\frac{2}{h} \end{pmatrix}.$$

记 a, c, \tilde{y} 为下列向量:

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1})^T, c = (c_1, c_2, \dots, c_{n-1})^T,$$

$$\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_{n-1})^T.$$

由(5)我们有

$$c_0 = 0, d_{n-1} = -c_{n-1}(3h).$$

对于(3)中的 $j=2$,补充定义 $c_n = 0$,得到

$$d_i = (c_{i+1} - c_i)(3h), i = 0, 1, \dots, n-1, \quad (7)$$

由(6)得到

$$a_0 = \tilde{y}_0,$$

$$a_n = a_{n-1} + b_{n-1}h + c_{n-1}h^2 + d_{n-1}h^3 = \tilde{y}_n.$$

由(3)中的 $j=0$ 得到

$$b_i = (a_{i+1} - a_i)h - c_i h - d_i h^2,$$

$$i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (8)$$

由(3)中的 $j=1$ 得到

$$Tc = Qa + \begin{pmatrix} \tilde{y}_0/h \\ 0 \\ 0 \\ \tilde{y}_n/h \end{pmatrix}.$$

由(4)式,得到

$$Qc = \frac{1}{2\delta^2 n}(\tilde{y} - a).$$

最后,我们有

$$c = (T + 2\delta^2 n Q^2)^{-1}(Q\tilde{y} + z), \quad (9)$$

以及

$$a = \tilde{y} - 2\delta^2 n Qc, \quad (10)$$

其中 $z = (\tilde{y}_0/h, 0, \dots, 0, \tilde{y}_n/h)^T$.再将 a 和 c 回代到(7)和(8)式可求得系数 b 和 d ,再由方程(2)即可得到重构函数 f_* 及 f_*' 在每个子区间上的表达式.

图1为一维一阶数值微分算法流程图.

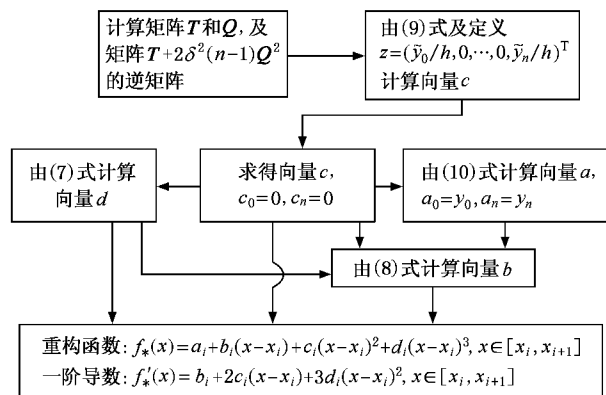


图1 一维一阶数值微分算法流程图

3. 理想试验

在气象观测中,观测的物理量往往是二维、三维的.如果需要计算观测物理量的偏导数,一般做法是,先将观测物理量进行客观分析,插值到规则的网格点上,然后用差分法计算其偏导数.同样,对于二维规则网格点上的观测数据求其偏导数问题,我们可以逐行逐列的利用一维一阶导数重构算法来计算.下面我们用理想数据来检验一维一阶数值微分算法的可行性及精度.

球面上风场的精确分布函数取为 $u = 20\sin(3\lambda) \cos(2\varphi)$, $v = 20\cos(2\lambda) \sin(3\varphi)$, 则球坐标系下涡度

场的精确分布函数为

$$\zeta_0 = \frac{1}{r \cos \varphi} \left(\frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cos \varphi + u \sin \varphi \right).$$

其中, λ 为经度, $\lambda \in [60^\circ, 130^\circ]$, φ 为纬度, $\varphi \in [5^\circ, 65^\circ]$, r 为地球半径. 首先, 在规则网格点上生成观测风场 (\tilde{u}, \tilde{v}) , 它们是由精确风场 (u, v) 叠加均匀分布随机误差 $[-\delta, \delta]$ 产生, 误差由 δ 控制. 然后,

用一维一阶数值微分算法逐行逐列求得 $\frac{\partial u_*}{\partial \lambda}, \frac{\partial u_*}{\partial \varphi},$

$\frac{\partial v_*}{\partial \lambda}, \frac{\partial v_*}{\partial \varphi}$, 最后得到计算涡度 $\zeta_* = \frac{1}{r \cos \varphi}$

$\left(\frac{\partial v_*}{\partial \lambda} - \frac{\partial u_*}{\partial \varphi} \cos \varphi + u_* \sin \varphi \right)$. 为了比较算法的精

度, 我们用中央差分法计算了观测风场 (\tilde{u}, \tilde{v}) 的涡

度场 $\tilde{\zeta}$, 下面我们将改变规则网格点数(观测密度)

和观测误差 δ 的值来比较涡度的计算结果, 其中涡

度的相对误差计算公式为

$$\rho = \frac{\left(\sum_{i,j} (\zeta(\lambda_i, \varphi_j) - \zeta_0(\lambda_i, \varphi_j))^2 \right)^{1/2}}{\left(\sum_{i,j} \zeta_0(\lambda_i, \varphi_j)^2 \right)^{1/2}}, \quad (11)$$

(11) 式中, ζ_0, ζ 分别为精确的涡度和计算涡度, ρ 为计算涡度的相对误差.

试验 1 取观测误差 $\delta = 0.2$ m/s, 改变观测密度, 取网格点的分辨率分别为 $2^\circ \times 2^\circ, 1^\circ \times 1^\circ, 0.5^\circ \times 0.5^\circ$. 我们分别用中央差分法和一维一阶数值微分算法得到涡度场 $\tilde{\zeta}, \zeta_*$, 并计算相应的相对误差 $\tilde{\rho}, \rho_*$, 结果如表 1 所示.

表 1 不同观测密度($\delta = 0.2$ m/s)所得涡度场的相对误差(%)

	$2^\circ \times 2^\circ$	$1^\circ \times 1^\circ$	$0.5^\circ \times 0.5^\circ$
中央差分法的 $\tilde{\rho}$	1.946	7.726	27.718
数值微分法的 ρ_*	0.187	0.178	0.145

从表 1 中可以看到, 用一定的观测仪器(即观测误差 δ 不变)观测特定尺度的天气系统时, 中央差分法计算观测量偏导数的相对误差随观测密度的加密而急剧增大, 而一维一阶数值微分算法计算结果的相对误差稳定的维持在较小的水平上, 这说明利用观测数据求偏导的问题是一个不适定问题, 一维一阶数值微分算法可以较好的解决该类问题.

试验 2 取网格点的分辨率为 $2^\circ \times 2^\circ$, 改变观测误差, 取 δ 分别为 0.1, 0.2, 0.5 m/s, 同试验 1, 再计算涡度场 $\tilde{\zeta}, \zeta_*$ 的相对误差 $\tilde{\rho}, \rho_*$, 结果如表 2

所示.

在表 1, 2 中, 一维一阶数值微分算法计算结果的相对误差均比中央差分法的小, 并且在加大观测密度或观测误差的情形下, 该算法的优越性更明显, 这就说明了该算法在计算观测数据偏导数的精度比中央差分法的高.

表 2 不同观测误差(观测分辨率为 $2^\circ \times 2^\circ$)所得涡度场的相对误差(%)

	$\delta = 0.1$	$\delta = 0.2$	$\delta = 0.5$
中央差分法的 $\tilde{\rho}$	0.491	1.946	12.134
数值微分法的 ρ_*	0.079	0.187	0.773

如果观测数据有误差, 但我们并不知道其观测误差 δ 到底是多少, 则一维一阶数值微分算法中的吉洪诺夫正则化参数 α 就无从确定, 那么该算法是否就无用武之地了呢? 针对该问题, 我们继续进行数值试验 3.

试验 3 同试验 2, 取网格点的分辨率为 $2^\circ \times 2^\circ$, 观测误差 δ 分别取为 0.1, 0.2, 0.5 m/s, 假设我们并不知道 δ 是多少, 于是我们认为观测数据足够精确, 仍然分别用中央差分法和一维一阶数值微分方法计算涡度(一维一阶数值微分算法中的观测误差 δ 均取为 10^{-3} , δ 足够小, 表示观测数据越接近精确), 再分别计算涡度场 $\tilde{\zeta}, \zeta_*$ 的相对误差 $\tilde{\rho}, \rho_*$, 结果如表 3 所示.

表 3 观测误差未知情形下所得涡度场的相对误差(%)

	$\delta = 0.1$	$\delta = 0.2$	$\delta = 0.5$
中央差分法的 $\tilde{\rho}$	0.491	1.946	12.134
数值微分法的 ρ_*	0.145	0.551	3.385

在表 3 中可以知道, 观测数据有误差但未知时, 利用一维一阶数值微分算法计算偏导数时观测误差 δ 取为 10^{-3} 时(即认为观测数据较精确), 该算法的计算精度比差分法的高.

试验 1—3 比较了在观测数据有观测误差的各种情形下两种方法计算涡度的精度, 那么在观测数据精确时($\delta = 0$), 两种方法的计算精度又是怎样的呢?

试验 4 同试验 1, 取网格点的分辨率分别为 $2^\circ \times 2^\circ, 1^\circ \times 1^\circ, 0.5^\circ \times 0.5^\circ$, 在各网格点上的观测风场取为精确风场 (u, v) , 即 $\delta = 0$, 然后我们计算中央差分法得到各观测密度情形下的涡度场 $\tilde{\zeta}$, 并计算

其相对误差 $\tilde{\rho}$. 而一维一阶数值微分算法中的吉洪诺夫正则化参数 $\alpha = \delta^2$ 不能为 0 (方程式 (4) 中的分母不能为 0), 于是我们分别取 δ 为 $10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$, 最后, 也可以利用一维一阶数值微分算法计算各观测密度情形下的涡度场 ζ_* , 并计算其相对误差 ρ_* . 结果如表 4.

表 4 观测数据精确时 ($\delta=0$) 所得涡度场的相对误差 (%)

	$2^\circ \times 2^\circ$	$1^\circ \times 1^\circ$	$0.5^\circ \times 0.5^\circ$
中央差分法的 $\tilde{\rho}$	0.0051	0.0006	8.2×10^{-5}
数值微分法的 ρ_* (取 $\delta = 10^{-3}$)	0.0092	0.0056	4.2×10^{-3}
数值微分法的 ρ_* (取 $\delta = 10^{-4}$)	0.0022	0.0005	2.4×10^{-4}
数值微分法的 ρ_* (取 $\delta = 10^{-5}$)	0.0020	0.0003	4.0×10^{-5}

从表 4 中可以看到: 当观测风场精确时, 中央差分法和一维一阶数值微分算法的涡度计算精度随观测加密而越精确, 并且数值微分算法中的 δ 取为 10^{-5} 时, 其计算涡度的精度均高于中央差分法的.

4. 利用实测风场诊断涡度场应用实例

理想试验结果表明, 一维一阶数值微分算法稳

定可行, 且计算观测数据偏导数的精度比中央差分法的高. 下面利用该算法给出实测风场诊断涡度的例子.

图 2 是 2006 年 7 月 14 日 00 时 (世界时) 的 500 hPa 常规观测实况图, 该时次 200604 号碧利斯台风 (Bilis) 即将登陆, 位于台湾海峡 (东经 120.5° , 北纬 25.6°). 首先, 我们按照气象上常规做法——利用 Cressman 插值方案将实况风场资料插值到规则网格上 (范围为 $[60^\circ, 150^\circ] \times [5^\circ, 65^\circ]$), 其分辨率为 $2^\circ \times 2^\circ$ (见图 3) 然后, 在规则网格上分别利用中央差分方法和一维一阶数值微分方法计算其涡度场 (见图 4、图 5). 其中, 由于各观测站点测风仪器的差别和 Cressman 插值方法的作用, 使得确定规则网格上风场数据的观测误差很复杂, 为方便起见, 我们认为规则网格上风场是精确的, 取其观测误差 $\delta = 10^{-5}$ m/s.

从图 4 和图 5 可以看到, 两种算法得到涡度场的高、低值中心分布形势是一致的, 但一维一阶数值微分法计算结果在各极值中心处的绝对值比中央差分法的大; 另外, 我们还利用该数据分别用这两种算法计算了散度场, 也得到类似的结论. 因此, 数值微分法对较小尺度天气系统的识别能力明显比中央差分法的强.

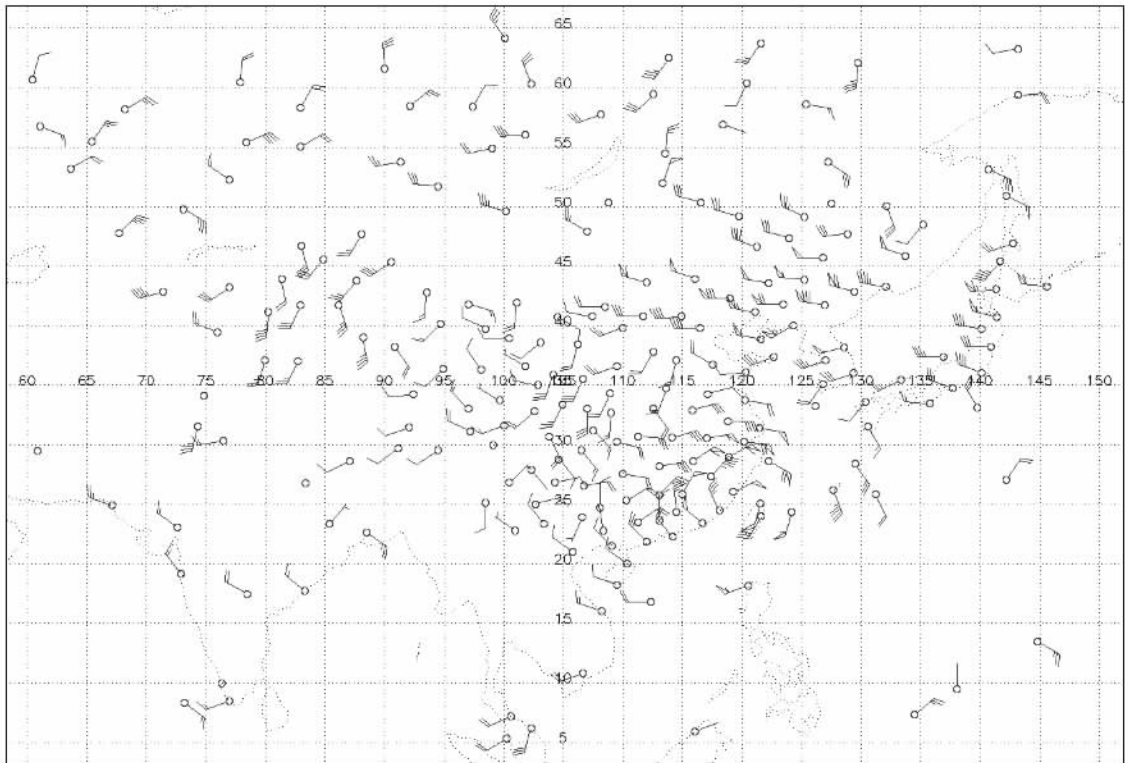


图 2 2006071400 时 500 hPa 风场实况

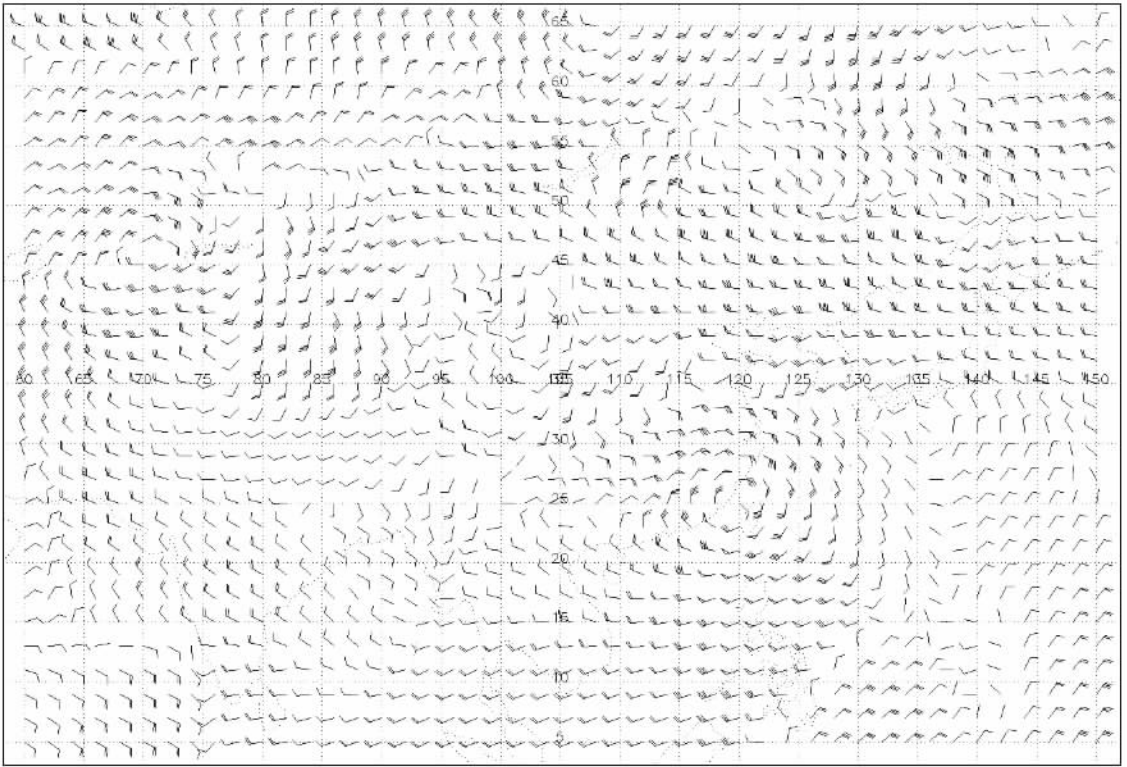


图 3 2006071400 时规则格点上 500 hPa 风场 (Cressman 插值)

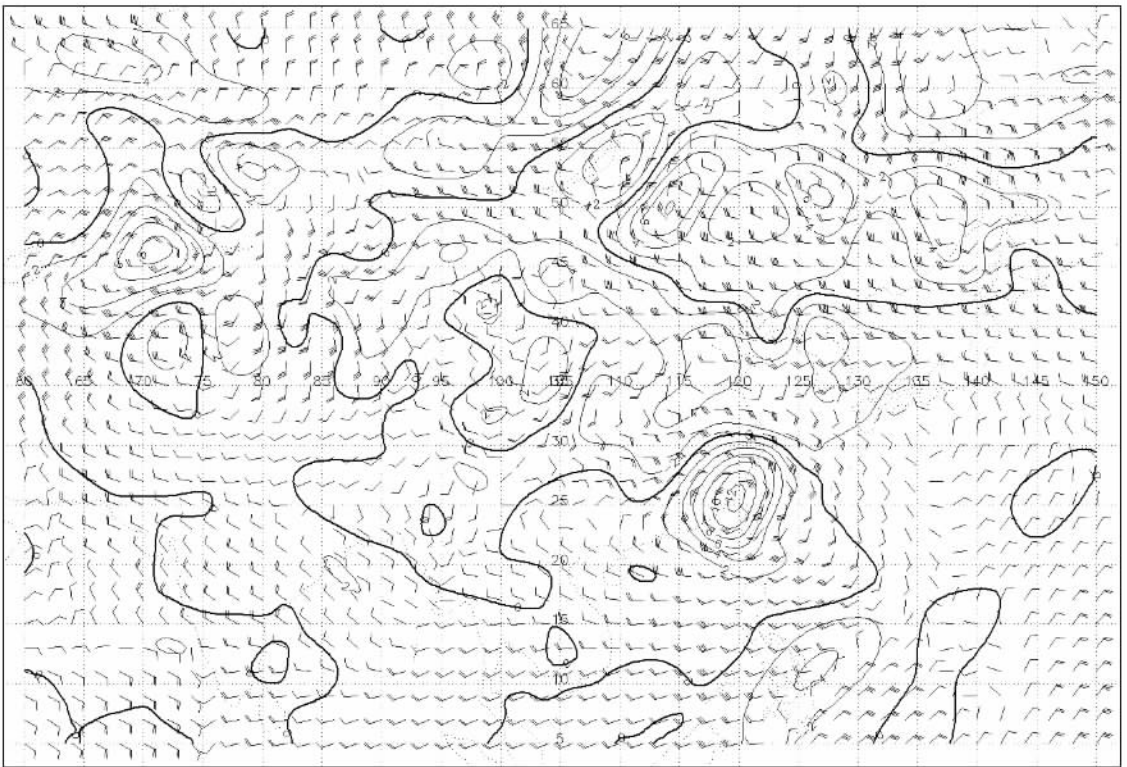


图 4 中央差分法算得的涡度场 (单位: $10^{-5}/s$, 等值线间距 $2 \times 10^{-5}/s$)

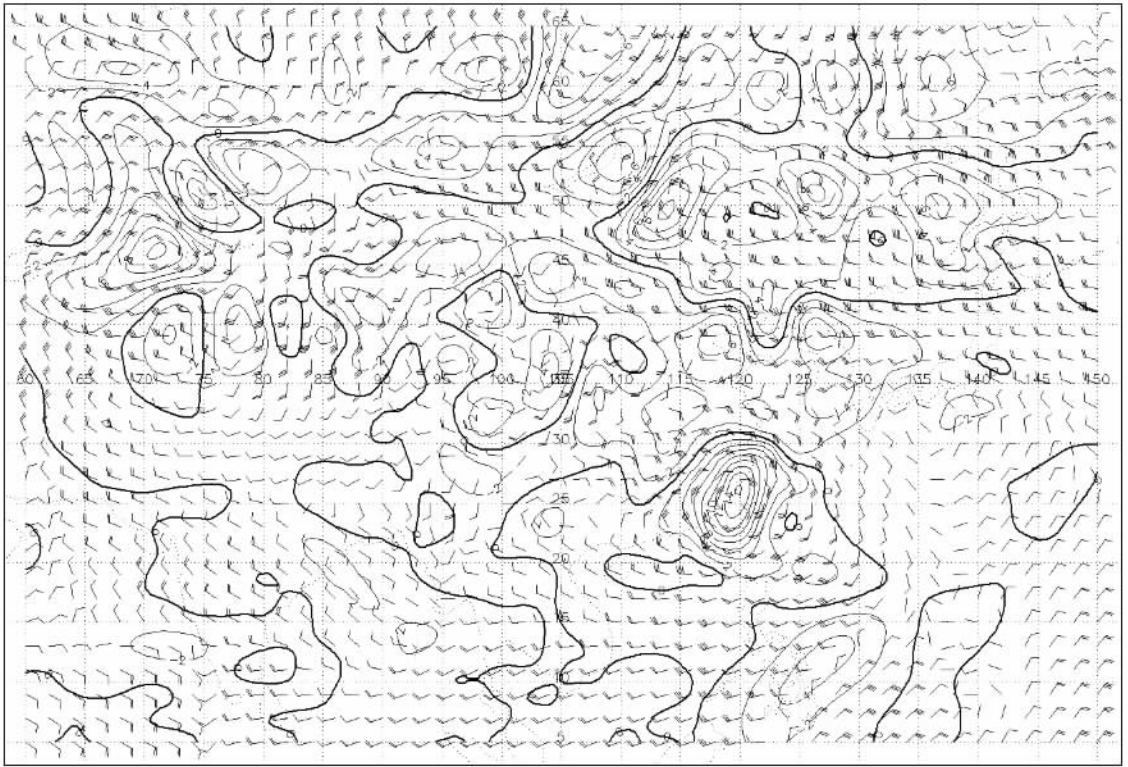


图5 一维一阶数值微分法算得的涡度场(单位: $10^{-5}/s$, 等值线间距 $2 \times 10^{-5}/s$)

5. 结 论

本文提出利用一维一阶数值微分算法来计算观测风场的涡度场,通过理想试验和实际应用,结果表明:1)一维一阶数值微分算法是稳定、可行的。2)在观测风场无误差时,利用该算法计算涡度的精度可以高于中央差分法的。观测风场有误差时,该算法的

精度明显地比中央差分法的高。3)在观测误差未知的情形下,该算法也能得到较高精度的结果。4)一维一阶数值微分算法对较小尺度天气系统的识别能力明显比中央差分法的强。

气象学中还存在大量的数值微分问题,如天气系统的结构分析、数值模拟结果的诊断分析等等。因此,一维一阶数值微分算法在气象学中有广阔的应用前景。

- [1] Gao S T, Zhou Y S, Lei T, Sun J H 2005 *Science in China Series D* **35** 107 (in Chinese) [高守亭、周玉淑、雷霆、孙建华 2005 中国科学 D 辑 **35** 107]
- [2] Gao S T, Lei T, Zhou Y S, Dong M 2002 *Journal of Applied Meteorological Science* **13** 662 (in Chinese) [高守亭、雷霆、周玉淑、董敏 2002 应用气象学报 **13** 662]
- [3] Groetsch C W 1991 *Amer. Math. Monthly* **98** 847
- [4] Hanke M, Scherzer O 2001 *Amer. Math. Monthly* **108** 512
- [5] Eugenia Kalnay 2005 *Atmospheric Modeling, Data Assimilation and Predictability* (Beijing: China Meteorological Press) p11 [Eugenia Kalnay 2005 大气模式、资料同化和可预报性(北京:气象出版社)第11页]
- [6] Ji Z Z, Wang B, Yang S F 2004 *Chinese J. Geophys.* **47** 991 (in Chinese) [季仲贞、王斌、杨诗芳 2004 地球物理学报 **47** 991]
- [7] Liu Y D 2004 *Science in China Series D* **34** 983 (in Chinese) [刘宇迪 2004 中国科学 D 辑 **34** 983]
- [8] Feng G L, Dong W J, Li J P, Chou J F 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2390 (in Chinese) [封国林、董文杰、李建平、丑纪范 2004 物理学报 **53** 2390]
- [9] He W P, Feng G L, Dong W J, Li J P 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3258 (in Chinese) [何文平、封国林、董文杰、李建平 2004 物理学报 **53** 3258]

- [10] Zhang L X , Qian W H , Gao X Q , Chou J F 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3465 (in Chinese) [张立新、钱维宏、高新全、丑纪范 2005 物理学报 **54** 3465]
- [11] Zhang L X , Gao X Q , Li J P 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 2109 (in Chinese) [张立新、高新全、李建平 2006 物理学报 **55** 2109]
- [12] Groetsch C W 1998 *Amer. Math. Monthly* **105** 320
- [13] Groetsch C W 1992 *Journal of Optimization Theory and Applications* **74** 373
- [14] Groetsch C W , Scherzer O 1993 *Electronic Journal of Differential Equations* **1993** 1
- [15] Murio D A 1987 *Computers and Mathematics with Applications* **13** 381
- [16] Vasin V V 1973 *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics* **13** 161
- [17] Locker J , Prenter P M 1980 *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **74** 504
- [18] Locker J , Prenter P M 1980 *SIAM Journal of Numerical Analysis* **17** 247
- [19] Cheng J , Yamamoto M 2000 *Inverse Problems* **16** 31
- [20] Wang Y B , Jia X Z , Cheng J 2002 *Inverse Problems* **18** 1461
- [21] Wan X Q , Wang Y B 2006 *Journal of Fudan University (Natural Science)* **45** 185 (in Chinese) [万熙琼、王彦博 2006 复旦学报 (自然科学版) **45** 185]

A new method for calculating vorticity^{*}

Cai Qi-Fa^{1,2,†} Huang Si-Xun²⁾ Gao Shou-Ting¹⁾ Zhong Ke¹⁾ Li Zi-Qiang³⁾

1) (*Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, China*)

2) (*Institute of Meteorology, PLA University of Science and Engineering, Nanjing 211101, China*)

3) (*Ocean University of China, Qingdao 266003, China*)

(Received 27 October 2007 ; revised manuscript received 20 November 2007)

Abstract

It is well known that it often leads to large error to calculate the first order partial derivatives of physical quantities by the difference method from observation data with error. Especially in meteorology, observational wind has large error, and calculating vorticity from observational wind is very inaccurate. Therefore, one-dimensional numerical differentiation algorithm is applied to calculate vorticity from observational wind, and the result is compared with that of the central difference method. It turns out that the one-dimensional numerical differentiation algorithm is stable and feasible. Its accuracy is superior to the central difference method, and it has stronger recognizing ability for the smaller-scale weather systems.

Keywords : numerical differentiation, Tikhonov regularization, regularized solutions

PACC : 9260, 9260X, 0270

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 40775023), the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant No. 2004CB418301) and the Foundation for Distinguished Overseas Scholars of the Chinese Academy of Sciences, China (Grant No. 2005-2-17).

† E-mail : caiqfa@yahoo.com.cn