

参数失配的受迫振动系统有误差界的同步判据^{*}

王建根¹⁾ 蔡建平^{2,3)} 马米花³⁾ 冯久超¹⁾

1) 华南理工大学电子与信息学院, 广州 510640)

2) 中山大学应用力学与工程系, 广州 510275)

3) 漳州师范学院数学系, 漳州 363000)

(2007 年 10 月 26 日收到, 2007 年 11 月 24 日收到修改稿)

基于李雅普诺夫直接法和 Sylvester 准则, 推导出外激励参数失配的受迫振动系统达到有误差界的同步的几种代数判据. 根据代数不等式, 求得同步误差界的估计值. 通过控制同步误差界估计值, 可以把实际的同步误差界值控制到小于预先给定的同步精确度. Duffing-Van der Pol 受迫振动系统作为数值算例进一步验证了该方法是有有效的.

关键词: 受迫振动系统, 参数失配, 同步误差界, 代数判据

PACC: 0545

1. 引 言

混沌系统同步控制在电机工程^[1,2], 安全通讯^[3,4]等领域有广阔的应用前景. 自从 1990 年 Pecora 和 Carroll^[5]关于混沌同步的研究以来, 越来越多的研究人员投入到对系统同步的研究, 提出了很多关于混沌同步的控制方法, 如线性、非线性控制^[6-8], 主动控制^[9,10], 自适应控制^[11,12], 正弦反馈控制^[13], 棒棒控制^[14], 替代变量控制^[15], 脉冲控制^[16], 神经网络^[17]等等. 但是大部分控制方法都是实现相同系统在不同的初始条件下达到同步^[6-8,11-13,15]或不同的自治系统之间的同步^[9,10,14]. 在实际应用中系统经常会发生参数失配, 这将会破坏系统之间的同步^[18]. 在工程上存在着很多受迫振动系统, 如受迫 Duffing 振动系统, 受迫 Van der Pol 振动系统, 水平平台系统^[19], 转子-轴承系统^[20], 以及实际通信系统中的畸变与噪声影响等等. 可见, 考虑参数失配的受迫振动系统之间的同步更有实际意义.

文献[21,22]研究了两个具有参数失配的自治系统之间的同步. 对于有参数失配的非自治系统之间的同步控制更加困难, 有关参数失配的非自治系统之间的同步的文献相当少. 最近, 文献[23]研究了只有相位失配的水平平台系统之间的同步判据.

本文将用李雅普诺夫直接法和 Sylvester 准则推导有参数失配的非自治系统之间达到有误差界的同步的代数判据. 与文献[23]不同, 本文中的“参数失配”是指两个非自治系统的振幅、频率、相位可以全部不同或部分不同. 此外, 通过代数不等式, 可以得到放大的同步误差界. 对于任意给定的同步精确度, 只要把放大的同步误差界控制成小于同步精确度, 那么实际的同步误差界值将小于同步精确度. Duffing-Van der Pol 受迫振动系统^[24]作为数值算例验证了该方法是有有效的.

2. 同步误差界的估计

考虑如下受迫振动系统:

$$\ddot{z} + \alpha(z, \dot{z})\dot{z} + g(z) = f\cos(\omega t + \varphi), \quad (1)$$

其中“ \cdot ”是关于 t 求导, $\alpha(z, \dot{z})$ 表示阻尼力, $g(z)$ 表示恢复力, $f\cos(\omega t + \varphi)$ 是外激励. 令 $x_1 = z, x_2 = \dot{z}$, 可以把方程(1)改写成

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -g(x_1) - \alpha(x_1, x_2)x_2 + f\cos(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (2)$$

从方程(2)中分离出线性和非线性部分, 并且令 $x = (x_1, x_2)^T \in R^2$, 得到方程(2)的矢量形式为

$$\dot{x} = Ax + F(x) + m(t), \quad (3)$$

^{*} 国家自然科学基金(批准号:60674049), 华南理工大学博士后创新基金(批准号:200610023)和福建省资助省属高校项目(批准号:2007F5099)资助的课题.

其中 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 是线性部分常系数矩阵, $F(x)$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ M(x) \end{pmatrix}$ 是非线性部分, $m(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f \cos(\omega t + \varphi) \end{pmatrix}$,

并且称系统(3)为驱动系统.

用线性误差反馈控制法构造驱动系统(3)的响应系统为

$$\dot{y} = Ay + F(y) + \tilde{m}(t) + K(x - y), \quad (4)$$

其中 $K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \in R^{2 \times 2}$ 是控制矩阵, $\tilde{m}(t) =$

$\begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{f} \cos(\tilde{\omega} t + \tilde{\varphi}) \end{pmatrix}$ $y = (y_1, y_2)^T \in R^2$, $\tilde{f}, \tilde{\omega}, \tilde{\varphi}$ 可以分别与 f, ω, φ 不同.

定义误差变量 $e = x - y$, 并假设存在有界矩阵 $Q(t)$, 使得

$$F(x) - F(y) = Q(t)e,$$

那么可以得到误差系统:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= (A - K)e + F(x) - F(y) + \Delta m \\ &= (A - K + Q(t))e + \Delta m, \end{aligned} \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} \Delta m &= m(t) - \tilde{m}(t) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ f \cos(\omega t + \varphi) - \tilde{f} \cos(\tilde{\omega} t + \tilde{\varphi}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

定义 在任意的初始条件下, 如果驱动-响应系统(3)和(4)总存在 $h > 0$ 及 $T > 0$, 使 $\forall t \geq T$, $\|e(t)\| < h$ 成立, 则称驱动-响应系统(3)和(4)达到具有误差界 h 的同步, 其中 $\|\cdot\|$ 表示欧几里德矢量范数.

根据李雅普诺夫直接法, 引入一个正定对称矩阵 P , 选择李雅普诺夫函数 $V = e^T P e$, 则

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e^T [(A - K + Q)^T P + P(A - K + Q)]e + 2\Delta m^T P e \\ &= e^T [(A - K + Q)^T P + P(A - K + Q) + 2f\alpha I_2]e \\ &\quad - 2fae^T e + 2\Delta m^T P e, \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $\alpha \in R^+$.

因为

$$\begin{aligned} \|\Delta m\| &= | \tilde{f} \cos(\tilde{\omega} t + \tilde{\varphi}) - f \cos(\omega t + \varphi) | \\ &\leq \tilde{f} + f = f \frac{\tilde{f} + f}{f}, \end{aligned} \quad (7)$$

令 $H = \frac{\tilde{f} + f}{f}$, 则

$$\|\Delta m\| \leq fH. \quad (8)$$

于是

$$\begin{aligned} 2\Delta m^T P e &\leq 2\|\Delta m^T P e\| \leq 2\lambda_{\max} \|\Delta m^T\| \|e\| \\ &\leq 2fH\lambda_{\max} \|e\|, \end{aligned}$$

其中 λ_{\max} 是正定对称矩阵 P 的最大特征值. 如果控制矩阵 K 使 $(A - K + Q)^T P + P(A - K + Q) + 2faI_2$ 负定, 那么

$$\dot{V} < 2\Delta m^T P e - 2fae^T e \leq 2f\|e\|(H\lambda_{\max} - \alpha\|e\|).$$

可见, 如果 $\|e\| > \frac{H\lambda_{\max}}{\alpha}$, 有 $\dot{V} < 0$. 令

$$\begin{aligned} E(a_2) &= \{e : e^T e \leq a_2\} \supset E(a_1) \\ &= \{e : e^T P e \leq a_1\} \supset E(a_0) \\ &= \{e : e^T e \leq a_0\}, \end{aligned}$$

其中 $a_0 = \frac{H^2 \lambda_{\max}^2}{\alpha^2}$, 且 $E(a_2), E(a_0)$ 分别是 $E(a_1)$ 的最小上确界和最大下确界. 于是在球域 $E(a_1)$ 外的任意的误差系统轨线都能使 $\dot{V} < 0$, 且能够一致进入球域 $E(a_1)$ 内.

由上面分析知, 当 $(A - K + Q)^T P + P(A - K + Q) + 2faI_2$ 负定时, 驱动-响应系统(3)和(4)能达到具有误差界 h 的同步. $E(a_2)$ 的半径 $\sqrt{a_2}$ 为放大的同步误差界, 即 $h < \sqrt{a_2}$, 称 $\sqrt{a_2}$ 为同步误差界估计值, h 为同步误差界实际值.

显然

$$\lambda_{\min} e^T e \leq e^T P e \leq \lambda_{\max} e^T e,$$

其中 λ_{\min} 是矩阵 P 的最小特征值, 所以 $a_0 = \lambda_{\min} e^T e$, $a_2 = \lambda_{\min} e^T e$, 于是可以求得同步误差界估计值为

$$\sqrt{a_2} = \frac{H\lambda_{\max}}{\alpha} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}}.$$

要使放大的误差界尽量靠近误差界实际值, 应该使

误差界估计值尽量小. 若取 $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix}$, 那么

$$\lambda_{\max} = \frac{p_{11} + p_{22} + \sqrt{(p_{11} - p_{22})^2 + 4p_{12}^2}}{2},$$

$$\lambda_{\min} = \frac{p_{11} + p_{22} - \sqrt{(p_{11} - p_{22})^2 + 4p_{12}^2}}{2}.$$

为了使 $\sqrt{a_2}$ 最小, 令 $p_{11} = p_{22} = p, p_{12} = 0$, 即

$$\sqrt{a_2} = H\sigma, \quad \sigma = \frac{P}{\alpha}.$$

如果要使误差界实际值 $h \leq h_0$, h_0 为同步精确度, 那么只要

$$\sqrt{a_2} = H\sigma \leq h_0,$$

即只要取 σ 满足

$$\sigma \leq \frac{h_0}{H}. \quad (9)$$

3. 同步的代数判据

对于振动系统(3), 矩阵 $Q(t)$ 形如

$$(A - K + Q)^T P + P(A - K + Q) + 2f\alpha I_2 = \begin{pmatrix} -2pk_{11} + 2f\alpha & p(1 - k_{12}) + p(a_{21} + q_3 - k_{21}) \\ p(1 - k_{12}) + p(a_{21} + q_3 - k_{21}) & 2p(a_{22} + q_4 - k_{22}) + 2f\alpha \end{pmatrix}. \quad (10)$$

根据 Sylvester 准则 矩阵(10) 负定的充要条件是

$$k_{11} > \frac{f\alpha}{p} = \frac{f}{\sigma}, \quad (11)$$

$$4(-pk_{11} + f\alpha)(pa_{22} + pq_4 - pk_{22} + f\alpha) > [p(1 - k_{12}) + p(a_{21} + q_3 - k_{21})]^2. \quad (12)$$

取 $K = \text{diag}\{k_1, k_2\}$, 由不等式(11) 和(12) 得

$$k_1 > \frac{f\alpha}{p} = \frac{f}{\sigma}, \quad (13)$$

$$k_2 > \frac{(1 + a_{21} + q_3)^2}{4(k_1 - \frac{f}{\sigma})} + \frac{f}{\sigma} + a_{22} + q_4. \quad (14)$$

由(9) 式知, 要使误差界实际值 $h \leq h_0$, 只要 $\sigma \leq \frac{h_0}{H}$.

不妨取 $\sigma = \frac{h_0}{H}$, 这时误差界估计值为

$$\sqrt{a_2} = H\sigma = H \frac{h_0}{H} = h_0. \quad (15)$$

于是判据(11) 和(12) 式等价于

$$k_1 > \frac{Hf}{h_0}, \quad (16)$$

$$k_2 > \frac{(1 + a_{21} + q_3)^2}{4(k_1 - \frac{Hf}{h_0})} + \frac{Hf}{h_0} + a_{22} + q_4. \quad (17)$$

那么系统(3) 和(4) 达到具有误差界 $h \leq h_0$ 的同步.

取 $K = kI_2$ 时, 由不等式(16) 和(17) 得

$$k > \frac{f}{h_0} H + \frac{1}{2} [a_{22} + q_4 + \sqrt{(a_{22} + q_4)^2 + (1 + a_{21} + q_3)^2}], \quad (18)$$

那么系统(3) 和(4) 达到具有误差界 $h \leq h_0$ 的同步.

如果外激励只存在振幅和相位失配, 即 $\tilde{\omega} = \omega$, 则

$$\begin{aligned} & \tilde{f} \cos(\omega t + \tilde{\varphi}) - f \cos(\omega t + \varphi) \\ &= (\tilde{f} - f) \cos(\omega t + \tilde{\varphi}) \end{aligned}$$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q_3(t) & q_4(t) \end{pmatrix}$ 其中 $q_3(t), q_4(t)$ 是与状态变量 x, y 有关的函数, 于是

$$+ \tilde{f} \cos(\omega t + \tilde{\varphi}) - f \cos(\omega t + \varphi)].$$

结合微分中值定理可得

$$\begin{aligned} & |\tilde{f} \cos(\omega t + \tilde{\varphi}) - f \cos(\omega t + \varphi)| \\ & \leq |\tilde{f} - f| + f|\tilde{\varphi} - \varphi| \\ &= f \left(\frac{|\tilde{f} - f|}{f} + |\tilde{\varphi} - \varphi| \right) \end{aligned}$$

因此, 这里 $H = \frac{|\tilde{f} - f|}{f} + |\tilde{\varphi} - \varphi|$.

特别地, 如果 $\tilde{\omega} = \omega$ 和 $\tilde{\varphi} = \varphi$, 则 $H = \frac{|\tilde{f} - f|}{f}$.

由判据(18) 知, 当系统(3) 和(4) 达到具有误差界 $h \leq h_0$ 的同步时, 可以得到 k 与 $|\tilde{f} - f|$ 的关系为

$$\begin{aligned} k & > \frac{1}{h_0} |\tilde{f} - f| \\ & + \frac{1}{2} [a_{22} + q_4 + \sqrt{(a_{22} + q_4)^2 + (1 + a_{21} + q_3)^2}]. \end{aligned} \quad (19)$$

如果 $\tilde{\omega} = \omega$ 和 $\tilde{f} = f$, 则 $H = |\tilde{\varphi} - \varphi|$. 同样地, 当系统(3) 和(4) 达到具有误差界 $h \leq h_0$ 的同步时, 可以得到 k 与 $|\tilde{\varphi} - \varphi|$ 的关系为

$$\begin{aligned} k & > \frac{f}{h_0} |\tilde{\varphi} - \varphi| \\ & + \frac{1}{2} [a_{22} + q_4 + \sqrt{(a_{22} + q_4)^2 + (1 + a_{21} + q_3)^2}]. \end{aligned} \quad (20)$$

4. 数值算例

考虑驱动系统为受迫 Duffing-Van der Pol 振动系统

$$\ddot{z} + \mu(1 - z^2)\dot{z} + az + bz^3 = f \cos(\omega t + \varphi). \quad (21)$$

令 $x_1 = z, x_2 = \dot{z}$, 将振子(21) 写成

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -ax_1 + \mu x_2 - \mu x_1^2 x_2 - bx_1^3 + f \cos(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (22)$$

当 $\mu=0.1, a=-0.5, b=0.5, f=0.19, \omega=0.515, \varphi=0$ 时, Duffing-Van der Pol 振子存在混沌行为 如图 1.

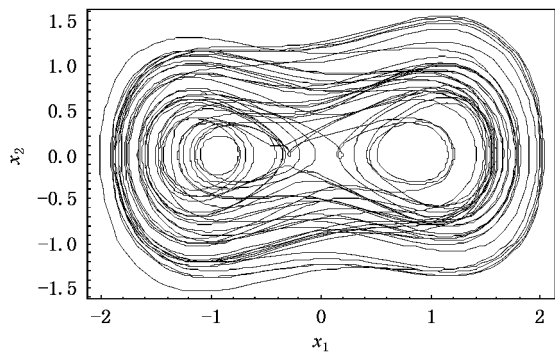


图 1 Duffing-Van der Pol 振子存在混沌行为, 其中初始条件为 $x_1(0)=0, x_2(0)=0$

令 $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in R^2$, 于是驱动系统 (21) 的矢量形式为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{m}(t), \quad (23)$$

其中 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & \mu \end{pmatrix}$ 是线性部分常系数矩阵, $\mathbf{F}(\mathbf{x})$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ -\mu x_1^2 x_2 - bx_1^3 \end{pmatrix}$ 是非线性部分, $\mathbf{m}(t) =$

$\begin{pmatrix} 0 \\ f \cos(\omega t + \varphi) \end{pmatrix}$. 用线性误差反馈控制法构造驱动系统 (23) 的响应系统

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{F}(\mathbf{y}) + \tilde{\mathbf{m}}(t) + \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (24)$$

其中 $\tilde{\mathbf{m}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{f} \cos(\tilde{\omega} t + \tilde{\varphi}) \end{pmatrix}$. 得到误差系统为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{K})\mathbf{e} + \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{y}) + \Delta \mathbf{m} \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{K} + \mathbf{Q}(t))\mathbf{e} + \Delta \mathbf{m}, \end{aligned} \quad (25)$$

其中

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q_3(t) & q_4(t) \end{pmatrix},$$

$$q_3(t) = -\mu(x_1 x_2 + x_2 y_1) - b(x_1^2 + x_1 y_1 + y_1^2),$$

$$q_4(t) = -\mu y_1^2.$$

取 $\mathbf{K} = \text{diag}\{k_1, k_2\}$ 时, 得到与判据 (16) 和 (17) 相对应的判据为

$$k_1 > \frac{Hf}{h_0}, \quad (26)$$

$$k_2 > \frac{(1-a+q_3)^2}{4\left(k_1 - \frac{Hf}{h_0}\right)} + \frac{Hf}{h_0} + \mu + q_4. \quad (27)$$

取 $\mathbf{K} = k\mathbf{I}_2$ 时, 与判据 (18) 相对应的判据是

$$\begin{aligned} k &> \frac{f}{h_0} H \\ &+ \frac{1}{2} [\mu + q_4 + \sqrt{(\mu + q_4)^2 + (1-a+q_3)^2}] \end{aligned} \quad (28)$$

与判据 (19) 相对应的判据是

$$\begin{aligned} k &> \frac{1}{h_0} |\tilde{f} - f| \\ &+ \frac{1}{2} [\mu + q_4 + \sqrt{(\mu + q_4)^2 + (1-a+q_3)^2}] \end{aligned} \quad (29)$$

与判据 (20) 相对应的判据是

$$\begin{aligned} k &> \frac{f}{h_1} |\tilde{\varphi} - \varphi| \\ &+ \frac{1}{2} [\mu + q_4 + \sqrt{(\mu + q_4)^2 + (1-a+q_3)^2}] \end{aligned} \quad (30)$$

如果 \mathbf{K} 满足以上判据时, 那么系统 (23) 和 (24) 达到具有误差界 $h \leq h_0$ 的同步.

取 $\mu=0.1, a=-0.5, b=0.5, f=0.19, \omega=0.515, \varphi=0$, 从图 1 可以看出吸引子的界为 $-2 \leq x_1 \leq 2, -1.5 \leq x_2 \leq 1.5$. 当同步精确度充分小时, y_1, y_2 分别与 x_1, x_2 近似相同, 于是由 q_3, q_4 的表达式可以计算出 $-7.25 < q_3 < -5.99, -0.289 < q_4 < 0$.

当外激励参数全部失配时, 取 $\tilde{f}=0.17$,

$\tilde{\omega}=0.5, \tilde{\varphi}=0.1$, 则 $H = \frac{\tilde{f} + f}{f} = 1.89$. 取同步精确度 $h_0=0.01$, 当 $\mathbf{K} = k\mathbf{I}_2$ 时, 由判据 (28) 可以解得 $k > 40.6$. 取 $k=40.7$, 图 2 为误差 $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ 与时间 t 的关系图, 其中驱动-响应系统的初始条件为 $(x_1(0), x_2(0)) = (0.0, 0.0), (y_1(0), y_2(0)) = (-2.0, -2.0)$. 误差界估计值为 $\sqrt{a_2} = H\sigma = h_0 = 0.01$, 如果定义误差界实际值为 $h = \|\mathbf{e}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$, 则误差界估计值与误差界实际值的比较如图 3.

图 2 验证了当 $\mathbf{K} = k\mathbf{I}_2, k=40.7$ 时振幅、频率、相位均失配的驱动-响应系统 (23) 和 (24) 可以达到有误差界的同步. 从图 3 进一步知, 同步误差界实际值小于误差界估计值, 也就是可以把同步误差界实际值控制成小于预先给定的同步精确度 h_0 .

当频率相同时, 取 $\tilde{f}=0.17, \tilde{\omega}=\omega=0.515, \tilde{\varphi}=0.1$ 则

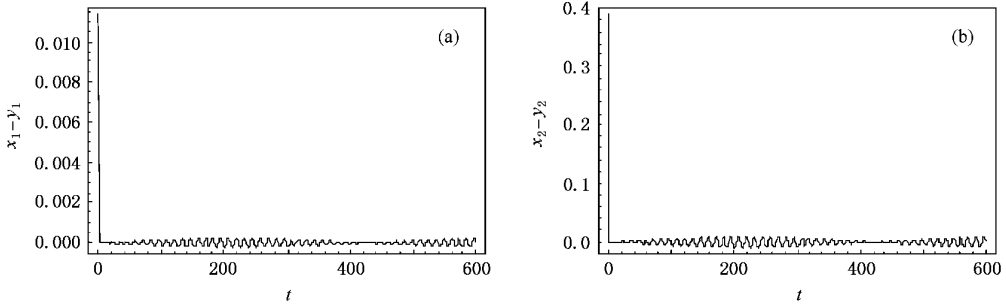


图 2 当振幅、频率、相位都失配时,误差系统(25)的时间历程图 (a) e_1 (b) e_2

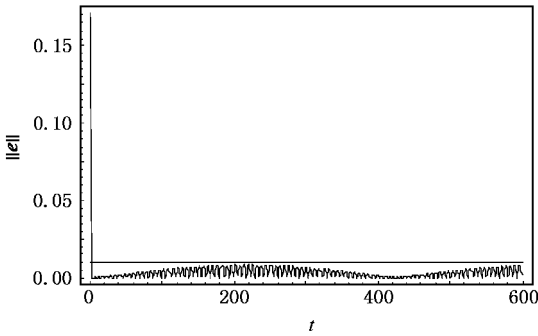


图 3 当振幅、频率、相位都失配时,误差界实际值与误差界估计值 $\sqrt{a_2} = h_0 = 0.01$ 的比较 直线表示误差界估计值,曲线表示误差界实际值

$$H = \frac{|\tilde{f} - f|}{f} + |\tilde{\varphi} - \varphi| = 0.21.$$

取 $h_0 = 0.01$, 当 $K = kI_2$ 时, 由判据(28)可以解得 $k > 6.56$. 取 $k = 6.6$, 图 4 为误差 $e = x - y$ 与时间 t 的关系图, 其中驱动-响应系统的初始条件与图 2 相同. 误差界估计值与误差界实际值的比较如图 5.

图 4 验证了当 $K = kI_2, k = 6.6$ 时存在振幅、相位失配的驱动-响应系统(23)和(24)可以达到有误差界的同步. 同样地, 从图 5 进一步知, 同步误差界实际值小于误差界估计值, 也就是可以把同步误差界实际值控制成小于预先给定的同步精确度 h_0 .

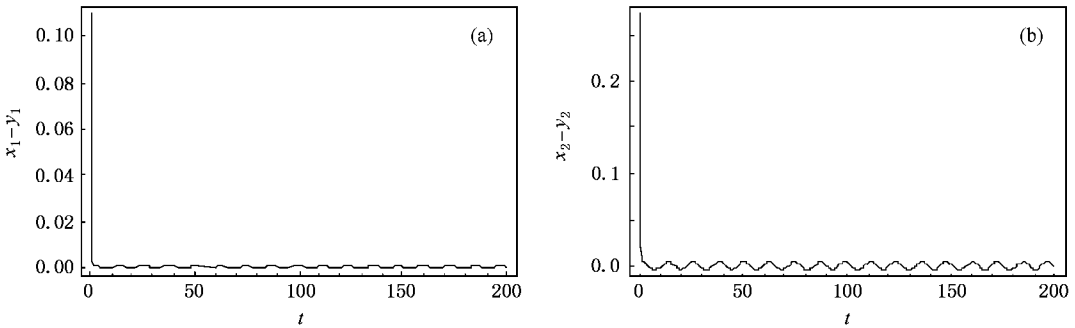


图 4 当振幅、相位失配时,误差系统(25)的时间历程图 (a) e_1 (b) e_2

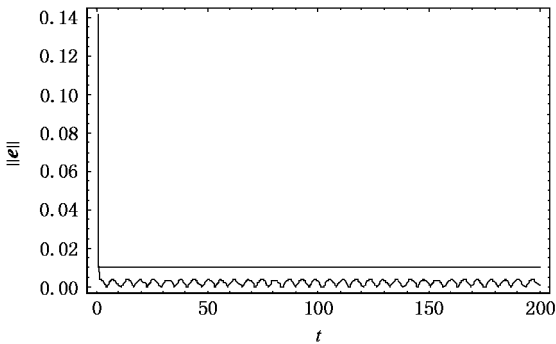


图 5 当振幅、相位失配时,误差界实际值与误差界估计值 $\sqrt{a_2} = h_0 = 0.01$ 的比较 直线表示估计值,曲线表示误差界实际值

当只存在振幅失配时, 取 $\tilde{f} = 0.17, \tilde{\omega} = \omega = 0.515, \tilde{\varphi} = \varphi = 0$, 则 $|\tilde{f} - f| = 0.02$. 取 $h_0 = 0.01$, 当 $K = kI_2$ 时, 由判据(29)可以解得 $k > 4.71$. 取 $k = 4.8$, 图 6 为误差 $e = x - y$ 与时间 t 的关系图, 其中驱动-响应系统的初始条件与图 2 相同. 误差界估计值与误差界实际值的比较如图 7.

图 6 验证了当 $K = kI_2, k = 4.8$ 时, 存在振幅失配的驱动-响应系统(23)和(24)可以达到有误差界的同步. 同样地, 从图 7 进一步知, 同步误差界实际值小于误差界估计值, 也就是可以把同步误差界实

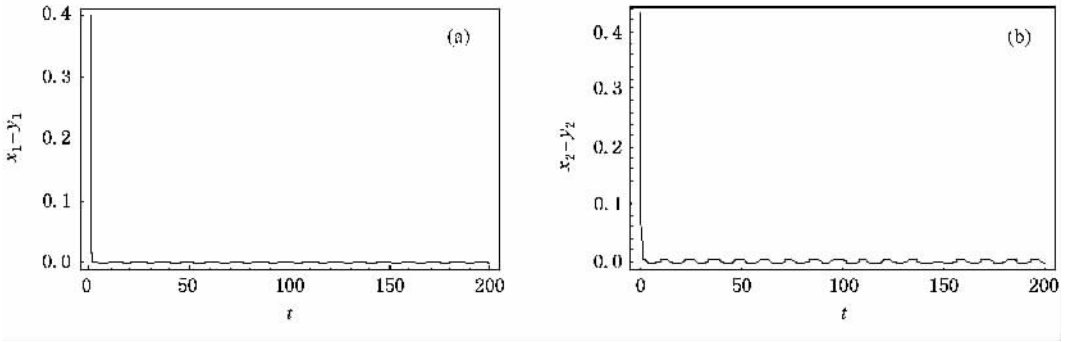


图 6 当只有振幅失配时,误差系统(25)的时间历程图 (a) e_1 (b) e_2

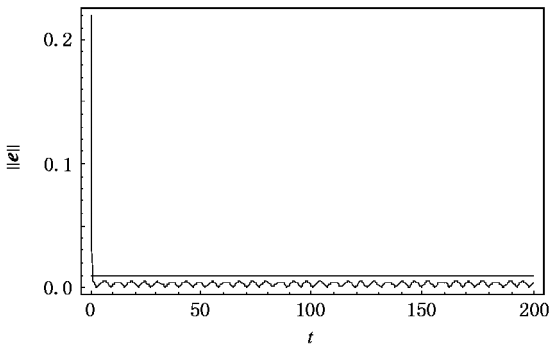


图 7 当只有振幅失配时,误差界实际值与误差界估计值 $\sqrt{a_2} = h_0 = 0.01$ 的比较 直线表示误差界估计值,曲线表示误差界实际值

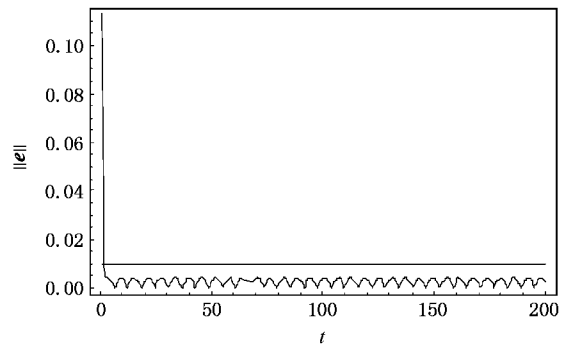


图 9 只有相位失配时,误差界实际值与误差界估计值 $\sqrt{a_2} = h_0 = 0.01$ 的比较 直线表示误差界估计值,曲线表示误差界实际值

际值控制成小于预先给定的同步精确度 h_0 .

当只存在相位失配时,取 $\tilde{f} = f = 0.19$, $\tilde{\omega} = \omega = 0.515$, $\tilde{\varphi} = 0.1$, 则 $|\tilde{\varphi} - \varphi| = 0.1$. 取 $h_0 = 0.01$, 当 $K = kI_2$ 时, 由判据(30)可以解得 $k > 4.5$. 取 $k = 4.6$, 图 8 为误差 $e = x - y$ 与时间 t 的关系图, 其中驱动-响应系统的初始条件与图 2 相同. 误差界估计值与误差界实际值的比较如图 9.

图 8 验证了当 $K = kI_2$, $k = 4.6$ 时, 只存在相位失配的驱动-响应系统(23)和(24)可以达到有误差界的同步. 同样地, 从图 9 进一步知, 同步误差界实际值小于误差界估计值, 也就是可以把同步误差界实际值控制成小于预先给定的同步精确度 h_0 .

注: 如果取 $K = \text{diag}\{k_1, k_2\}$, 同样可以求得相应的代数判据使驱动-响应系统(23)和(24)达到有误差界 $h \leq h_0$ 的同步.

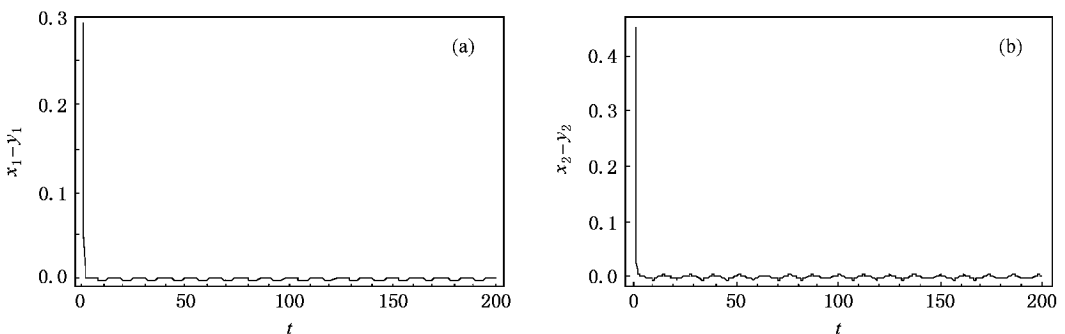


图 8 只有相位失配时,误差系统(25)的时间历程图 (a) e_1 (b) e_2

5. 结 论

应用李雅普诺夫直接方法和 Sylvester 准则可以

推导出有外激励参数失配的非自治系统之间达到有误差界的同步的代数判据. 通过控制同步误差界估计值, 可以把实际的同步误差界值控制到同步精确度的范围内. 同步精确度可以根据实际需要来选择.

- [1] Yamapi R, Wofo P 2005 *J. Sound Vib.* **285** 1151
- [2] Ge Z M, Lin T N 2003 *J. Sound Vib.* **259** 585
- [3] Carroll T L, Pecora L M 1993 *IEEE Trans. Circ. Syst. - II* **40** 646
- [4] Yu L H, Fang J C 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4012 (in Chinese)
[于灵慧、房建成 2005 物理学报 **54** 4012]
- [5] Pecora L M, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [6] Tao C H, Lu J A, Lü J H 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1497 (in Chinese)
[陶朝海、陆君安、吕金虎 2002 物理学报 **51** 1497]
- [7] Wang F Q, Liu C X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5055 (in Chinese)
[王发强、刘崇新 2006 物理学报 **55** 5055]
- [8] Wu X F, Cai J P, Wang M H 2006 *J. Sound Vib.* **295** 378
- [9] Cai G L, Huang J J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3997 (in Chinese)
[蔡国梁、黄娟娟 2006 物理学报 **55** 3997]
- [10] Sun F Y 2006 *Chin. Phys. Lett.* **23** 32
- [11] Wang X Y, Wu X J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5077 (in Chinese)
[王兴元、武相军 2006 物理学报 **55** 5077]
- [12] Liao T L 1998 *Chaos Solit. Fract* **9** 1555
- [13] Cai J P, Wu X F, Chen S H 2007 *Phys. Scripta.* **75** 379
- [14] Wang J G, Zhao Y 2005 *Chin. Phys. Lett.* **22** 2508
- [15] Wu X F, Zhao Y, Zhou S 2005 *Int. J. Bifurcat Chaos* **15** 617
- [16] Luo R Z 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5655 (in Chinese)
[罗润梓 2007 物理学报 **56** 5655]
- [17] Tan W, Wang Y N 2005 *Chin. Phys.* **14** 72
- [18] Yin H W, Dai J H, Zhang H J 1998 *Phys. Rev. E* **58** 5683
- [19] Ge Z M, Yu T C, Chen Y S 2003 *J. Sound Vib.* **268** 731
- [20] He J H 2000 *Mech. Res. Comm.* **27** 451
- [21] Suykens J A K, Curran P F, Chua L O 1999 *IEEE Trans. Circ. Syst. - I* **46** 841
- [22] Wu X F, Cai J P, Zhao Y 2005 *IEEE Trans. Circ. Syst. - II* **52** 429
- [23] Wu X F, Cai J P, Wang M H 2007 *J. Sound Vib.* **305** 481
- [24] Kozlov A K, Sushchik M M, Moldov Y I, Kuznetsov A S 1999 *Int. J. Bifurcat Chaos* **9** 2271

Criteria for synchronization with error bound of forced oscillators with parameters mismatch *

Wang Jian-Gen¹⁾ Cai Jian-Ping^{2)B)} Ma Mi-Hua³⁾ Feng Jiu-Chao¹⁾

1) *School of Electronic and Information, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China*

2) *Department of Applied Mechanics and Engineering, Sun Yat-Sen University, Guangzhou 510275, China*

3) *Department of Mathematics, Zhangzhou Teachers College, Zhangzhou 363000, China*

(Received 26 October 2007 ; revised manuscript received 24 November 2007)

Abstract

Some algebraic criteria for synchronization with error bound of forced oscillators with different external forces are derived by Lyapunov direct method and Sylvester's criterion. Using algebraic inequalities, the synchronization error bound can be estimated. By controlling the estimated synchronization error bound, the real synchronization error bound can be controlled to be smaller than a prescribed precision of the synchronization. The Duffing-Van der Pol forced oscillator used as a numerical example verifies the effectiveness of the method.

Keywords : forced oscillator, parameters mismatch, synchronization with error bound, algebraic criteria

PACC : 0545

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60674049), the Postdoctoral Innovation Foundation of South China University of Technology, China (Grant No. 200610023) and the Sustentation Foundation of Universities in Fujian Province, China (Grant No. 2007F5099).