

# 光晶格中双组分偶极玻色-爱因斯坦 凝聚体的调制不稳定性\*

黄劲松<sup>1)</sup> 陈海峰<sup>2)</sup> 谢征微<sup>1)†</sup>

1) 四川师范大学物理与电子工程学院, 低维结构物理实验室, 成都 610066)

2) 川北医学院物理教研室, 南充 637000)

(2007 年 11 月 1 日收到, 2007 年 11 月 18 日收到修改稿)

利用线性稳定性分析的方法, 对光晶格中双组分偶极玻色-爱因斯坦凝聚体(Bose-Einstein condensates, 简称 BECs) 的调制不稳定性进行了研究. 得到了光晶格中双组分偶极 BECs 原子系统调制不稳定性区域的分布与在位相互作用和由偶极-偶极相互作用所导致的格点间 BECs 相互作用之间的关系. 结果显示, 格点间 BECs 的相互作用对光晶格中双组分偶极 BECs 的调制不稳定性有较大的影响, 这可为实际应用中如何操控双组分偶极 BECs 提供有用的信息.

关键词: 光晶格, 双组分玻色-爱因斯坦凝聚体, 调制不稳定性, 偶极-偶极相互作用

PACC: 3280, 4250, 7530D, 7540F

## 1. 引言

在非线形系统中, 一个弱干扰调制可使系统的激发谱出现虚频率, 从而导致初始平面波振幅的指数增长, 使它分解为一系列的局域波. 这类调制不稳定性(modulational instability)现象广泛存在于流体力学、等离子物理学和非线性光学等物理系统中<sup>[1]</sup>. 近年来, 玻色-爱因斯坦凝聚体(Bose-Einstein condensates, 简称 BECs)系统里的调制不稳定性现象也引起了人们的极大兴趣<sup>[2]</sup>. 调制不稳定性现象在理解 BECs 系统中的许多动力学行为, 如局域模或孤子的产生, 畴的形成(domain formation), 动力学超流到绝缘体的量子相变(quantum phase transition)<sup>[3-5]</sup>等上, 有着重要的作用. 近年来, 对光晶格中双组分 BECs 系统的调制不稳定性研究显示, 由于其存在不同组分之间的相互作用, 双组分 BECs 和单组分 BECs 相比有着更加丰富的动力学行为<sup>[6-11]</sup>. 在已有的对光晶格中 BECs 的调制不稳定性研究中, 不同格点上 BECs 原子之间的相互作用, 由于比同一格点上的原子间相互作用小几个数量级

而被忽略. 但对于由具有永久磁偶极矩或电偶极矩的原子组成的偶极 BECs 来说, 偶极-偶极相互作用会导致光晶格中不同格点上 BECs 之间的耦合. 最近的研究成果表明, 偶极-偶极相互作用对 BECs 的基态、量子相变和非线性元激发等有着很大的影响<sup>[12-14]</sup>. 本文在前面研究的基础上, 进一步对光晶格中双组分偶极 BECs 系统的调制不稳定性与格点间相互作用的关系进行了研究. 由于偶极-偶极相互作用可通过外加磁场或电场方便地进行调节, 该研究除了可为操控偶极 BECs 在实际中的应用提供新的信息和途径, 还可进一步加深对非线性现象和 BECs 动力学行为的理解<sup>[9]</sup>.

在紧束缚近似下, 在时间  $t$ , 第  $j$  个格点上, 成分为  $\sigma$  ( $\sigma = 1, 2$ ) 的凝聚体原子的几率振幅  $\psi_{j,\sigma}(t)$  满足如下的离散非线性 Schrödinger 方程( $\hbar = 1$ )<sup>[10,11]</sup>:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \psi_{j,\sigma}}{\partial t} = & -J_{\sigma}(\psi_{j-1,\sigma} + \psi_{j+1,\sigma}) \\ & + U_{\sigma} \psi_{j,\sigma}^* \psi_{j,\sigma} \psi_{j,\sigma} \\ & + U_{\sigma\sigma'} \psi_{j,\sigma'}^* \psi_{j,\sigma} \psi_{j,\sigma} \\ & + V_{\sigma}(\psi_{j-1,\sigma'}^* \psi_{j,\sigma} \psi_{j-1,\sigma} \end{aligned}$$

\* 国家自然科学基金(批准号: 10447004)和四川省教育厅重点项目(批准号: 2004A087)资助的课题.

† 通讯联系人, E-mail: zzwxie@yahoo.com.cn

$$\begin{aligned}
& + \psi_{j+1,\sigma}^* \psi_{j,\sigma} \psi_{j+1,\sigma} ) \\
& + V_{\sigma\sigma} ( \psi_{j-1,\sigma}^* \psi_{j,\sigma} \psi_{j-1,\sigma} \\
& + \psi_{j+1,\sigma}^* \psi_{j,\sigma} \psi_{j+1,\sigma} ) , \quad (1)
\end{aligned}$$

其中  $J_\sigma$  是近邻跃迁系数,  $U_\sigma$  表示同一格点上同组分原子和原子的相互作用,  $U_{\sigma\sigma}$  表示同一格点上不同组分原子和原子的相互作用.  $V_\sigma$  表示有偶极-偶极作用导致的格点间同组分原子和原子的相互作用,  $V_{\sigma\sigma}$  表示由偶极-偶极作用导致的格点间不同组分原子和原子的相互作用<sup>[9]</sup>. 该离散非线性 Schrödinger 方程的定态解为平面波:

$$\psi_{j,\sigma} = \psi_\sigma^{(0)} \exp[i(kj - \mu_\sigma t)], \quad (2)$$

其中  $\mu_\sigma$  为化学势,

$$\begin{aligned}
\mu_\sigma = & -2J_\sigma \cos q + U_\sigma \psi_\sigma^{(0)\dagger} + 2V_\sigma \psi_\sigma^{(0)\dagger} \\
& + U_{12} \psi_\sigma^{(0)\dagger} + 2V_{12} \psi_\sigma^{(0)\dagger}, \quad (3)
\end{aligned}$$

可由归一化条件  $\sum_{j,\sigma} |\psi_{j,\sigma}|^2 = 1$  决定.

## 2. 调制不稳定性分析

上述定态平面波的调制不稳定性分析可由下面的步骤得到. 假设

$$\begin{aligned}
\psi_{j,\sigma} = & ( \psi_\sigma^{(0)} + \delta\psi_{j,\sigma} ) \exp[i(kj - \mu_\sigma t)], \\
\delta\psi_{j,\sigma} = & u_\sigma \exp[i(qj - \omega t)] \\
& + v_\sigma \exp[-i(qj - \omega t)], \quad (4)
\end{aligned}$$

其中  $\delta\psi_{j,\sigma} \ll \psi_\sigma^{(0)}$ , 系数  $u_\sigma$  和  $v_\sigma$  是实数. 将 (4) 式代入方程 (1), 经计算可得

$$\begin{aligned}
\omega_\eta^\pm = & 2J \sin k \sin q \pm \sqrt{\epsilon(\epsilon + \Delta_\eta)}, \\
\eta = & 1, 2 \quad (5)
\end{aligned}$$

其中

$$\epsilon = 4J \cos k \sin^2 \left( \frac{q}{2} \right),$$

$$\begin{aligned}
\Delta_\eta = & U_\sigma \psi_\sigma^{(0)\dagger} + 2V_\sigma \psi_\sigma^{(0)\dagger} \cos q + U_\sigma \psi_\sigma^{(0)\dagger} \\
& + 2V_\sigma \psi_\sigma^{(0)\dagger} \cos q + (-1)^\eta \sqrt{\lambda_1^2 + 4\lambda_2^2}, \quad \eta = 1, 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_1 = & U_\sigma \psi_\sigma^{(0)\dagger} + 2V_\sigma \psi_\sigma^{(0)\dagger} \cos q - U_\sigma \psi_\sigma^{(0)\dagger} \\
& - 2V_\sigma \psi_\sigma^{(0)\dagger} \cos q,
\end{aligned}$$

$$\lambda_2 = U_{\sigma\sigma} \psi_\sigma^{(0)\dagger} \psi_\sigma^{(0)} + 2V_{\sigma\sigma} \cos q \psi_\sigma^{(0)\dagger} \psi_\sigma^{(0)}. \quad (6)$$

在上面的计算中, 已取  $J_1 = J_2 = J$ .

下面讨论格点间 BECs 的相互作用对光晶格中双组分偶极 BECs 调制不稳定性影响. 在分析中, 我们考虑所有相互作用的耦合系数为正的情况. 同

时, 为了定性讨论的方便, 令  $\psi_\sigma^0 = \psi_\sigma^0 = \psi_0$ ,  $U_\sigma = U_\sigma = U$ ,  $V_\sigma = V_\sigma = V$ . 这时 (6) 式中  $\epsilon(\epsilon + \Delta_\eta)$  可简化为

$$\begin{aligned}
\epsilon(\epsilon + \Delta_\eta) = & 4J \cos k \sin^2 \left( \frac{q}{2} \right) \\
& \times \left( 4J \cos k \sin^2 \left( \frac{q}{2} \right) + 2U \psi_0^2 \right. \\
& + 4V \psi_0^2 \cos q + (-1)^\eta |2U_{12} \psi_0^2 \\
& \left. + 4V_{12} \cos q \psi_0^2 \right). \quad (7)
\end{aligned}$$

另外, 在下面计算中, 我们取格点数目为 200, 这样由归一化条件可得  $|\psi_0|^2 = 1/400$ . 从 (6) 式和 (7) 式可以看出, 如果取  $V_\sigma$  和  $V_{\sigma\sigma}$  都为零,  $\omega_\eta^\pm$  可回到不考虑格点间相互作用时光晶格双组分 BECs 的情形<sup>[11]</sup>. 上述光晶格中双组分 BECs 的调制不稳定性, 可通过频率  $\omega_\eta^\pm$  的取值进行判断. 如果  $\epsilon(\epsilon + \Delta_\eta) < 0$ ,  $\omega_\eta^\pm$  将出现虚值, 这样系统可出现调制不稳定性<sup>[11,15,16]</sup>.

## 3. 易混合的状态下双组分偶极 BECs 在光晶格中的调制不稳定性

当  $U > U_{12}$  时, 双组分 BECs 处于易混合状态 (miscible BECs)<sup>[11]</sup>. 当不考虑格点间 BECs 的相互作用时, 对于易混合状态下的 BECs, 其不稳定区域的分布如图 1(a) 所示. 从图 1 中可见, 当  $0 < k < \pi/2$  时, 易混合状态下的双组分 BECs 对于任何调制都是稳定的. 当  $\pi/2 < k < \pi$  时, 存在调制不稳定性区域. 对于偶极 BECs, 则需进一步考虑格点间 BECs 的相互作用. 这时由图 1(b)–(d) 可见, 随着格点间相互作用的增强, 在  $0 < k < \pi/2$  的区域, 双组分偶极 BECs 在短波调制下 (调制波矢  $q$  在  $\pi$  附近) 出现了调制不稳定性区域, 该区域随格点间的相互作用的增强在逐渐增大. 在  $\pi/2 < k < \pi$  区域, 随着格点间相互作用的增强, 短波调制下的不稳定区域逐渐变成稳定性区域. 图 2 所示的是调制波矢  $q = \pi$  时, 易混合状态下的双组分偶极 BECs 的调制不稳定性区域随格点间相互作用  $V$  的变化, 从图 2 中可见, 在短波调制的条件下, 随着格点间相互作用的增强,  $\pi/2 < k < \pi$  范围内的调制不稳定性区域逐渐消失, 而在  $0 < k < \pi/2$  区域内调制不稳定性区域逐渐增加.

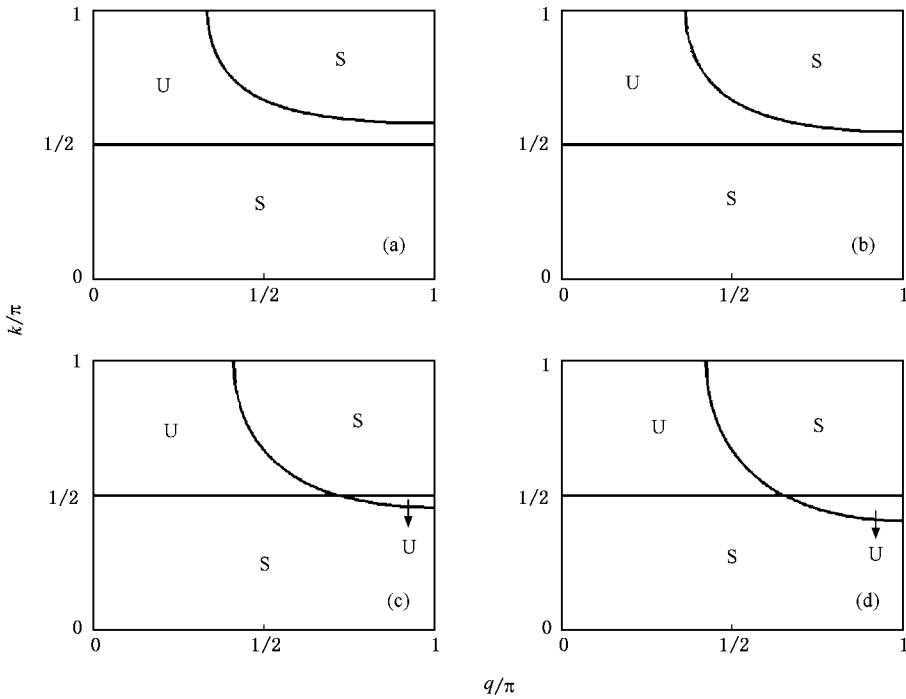


图 1 光晶格中双组分 BECs 处于易混合状态下,在  $(q, k)$  平面内的调制不稳定性区域。(a)–(d)中取  $J = 1, |\psi_0|^2 = 1/400, U = 100.85, U_{12} = 100^{[11]}, V = 1.0085 V_{12}, V_{12}$  分别取 0, 20, 80, 110. 图中 S 表示稳定区域, U 表示不稳定区域

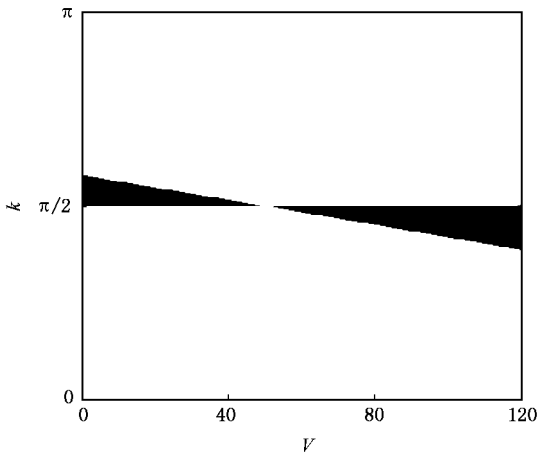


图 2 光晶格中双组分 BECs 处于易混合状态下,在  $(V, k)$  平面内的调制不稳定性区域.取  $J = 1, |\psi_0|^2 = 1/400, U = 100.85, U_{12} = 100, V_{12} = V/1.0085$ . 图中白色部分表示稳定区域, 黑色部分表示不稳定区域

### 4. 相分离状态下双组分 BECs 的调制不稳定性

当  $U_{12} > U$  时,光晶格中的双组分 BECs 处于相分离状态 (phase separation BECs)<sup>[7,8]</sup>. 图 2(a)所示

为,当不考虑格点间的相互作用时,双组分 BECs 的不稳定性区域在  $(q, k)$  平面上的分布.如进一步考虑格点间 BECs 的相互作用,双组分偶极 BECs 的不稳定性区域在  $(q, k)$  平面上的分布如图 3(b)(c), (d)所示.图 4 为调制波矢  $q = \pi$  时,相分离状态下双组分偶极 BECs 的调制不稳定性区域随格点间相互作用  $V$  的变化.由图 3 和图 4 可见,相分离情况下,格点间相互作用对双组分偶极 BECs 的调制不稳定性区域的影响主要表现在短波调制的情况下,其不稳定性区域随格点间相互作用的变化和易混合的情况类似.

在上面的不稳定性分析中,  $U_{12}$  与  $U$  的相对大小的取值来自于文献 [6] 和 [11], 其值相差不大.对于差别较大的情况,我们做了计算,所得到的结果对我们的结论没有定性的影响.

另外,由于在位相互作用  $U$  和  $U_{12}$  大小的改变可通过 Feshbach 共振调节  $s$  波散射长度来实现,而偶极-偶极相互作用所导致的格点间相互作用  $V$  和  $V_{12}$  的大小可由调节偶极矩的大小和方向实现,因此在适当的调制下可以使格点间相互作用大于或小于在位相互作用<sup>[13]</sup>.

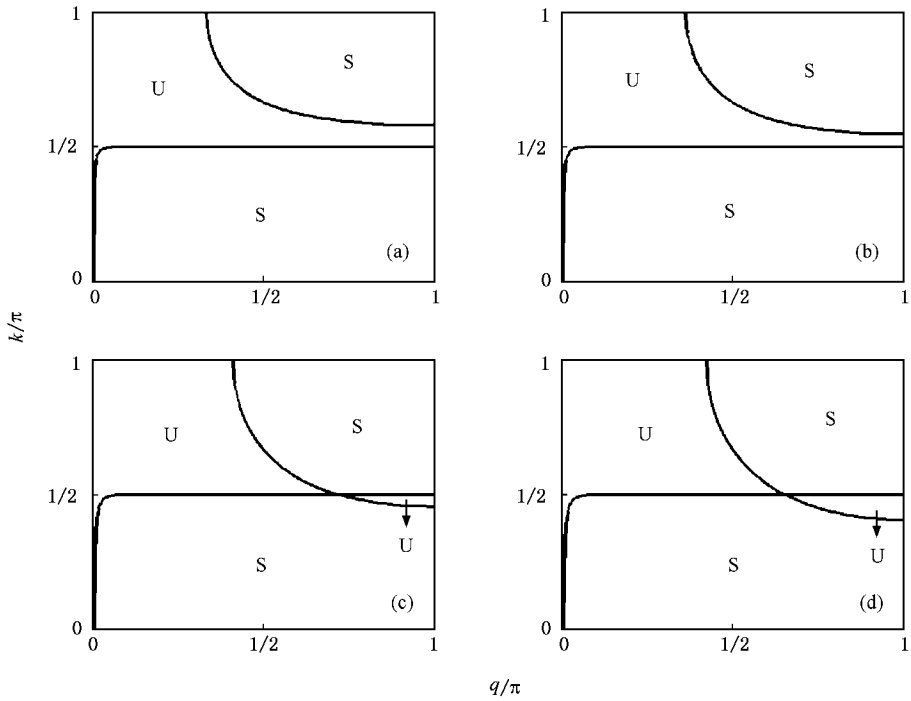


图 3 光晶格中双组分 BECs 处于相分离状态下,在  $(q, k)$  平面内的调制不稳定性区域。(a)–(d)中取  $J = 1, |\psi_0|^2 = 1/400, U = 99.95, U_{12} = 100^{[6]}, V = 0.0095 V_{12}, V_{12}$  分别取 0, 20, 80, 110. 图中 S 表示稳定区域, U 表示不稳定区域

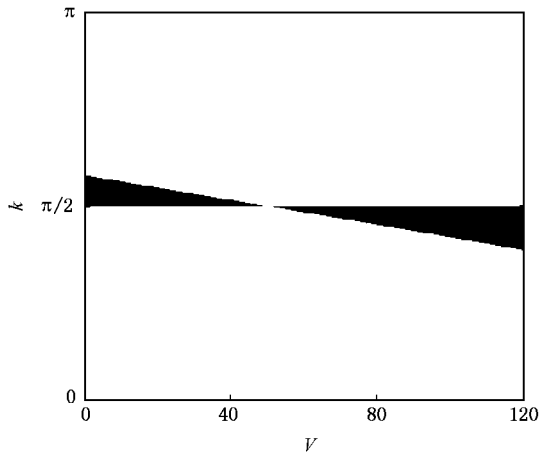


图 4 光晶格中双组分 BECs 处于相分离状态下,在  $(V, k)$  平面内的调制不稳定性区域.取  $J = 1, |\psi_0|^2 = 1/400, U = 99.95, U_{12} = 100, V_{12} = V/0.0095$ . 图中白色部分表示稳定区域, 黑色部分表示不稳定区域

### 5. 结 论

在线性稳定性分析的基础上,研究了光晶格中双组分偶极 BECs 原子系统调制不稳定性与格点间相互作用的关系. 结果表明,光晶格中双组分 BECs 原子系统的调制不稳定性除了和在位相互作用有关外,格点间 BECs 的相互作用也有重要的影响. 通过对易混合和相分离两种状态下,双组分偶极 BECs 原子系统的调制不稳定性随着格点间相互作用变化的分析,可看到格点间相互作用的变化对双组 BECs 系统的短波调制区域有较大的影响. 由于偶极-偶极相互作用可以通过外场很方便的进行调节,因而上面对于光晶格中双组分偶极 BECs 的调制不稳定性的研究,可对如何操控光晶格中偶极 BECs 提供有用的信息,同时可进一步为其在量子计算等实际中的应用提供帮助.

- [ 1 ] Agrawal G P 2001 *Nonlinear Fiber Optics* ( San Diego :Academic Press ) p136
- [ 2 ] Wu B ,Niu Q 2001 *Phys. Rev. A* **64** 061603
- [ 3 ] Konotop V V ,Salerno M 2002 *Phys. Rev. A* **65** 021602
- [ 4 ] Kasamatsu K ,Tsubota M 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 100402
- [ 5 ] Smerzi A ,Trombettoni A ,Kevrekidis P G ,Bishop A R 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 170402
- [ 6 ] Hall D S ,Matthews M R ,Ensher J R ,Wieman C E ,Cornell E A 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 1539
- [ 7 ] Timmermans E 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 5718
- [ 8 ] Ao P ,Chui S T 1998 *Phys. Rev. A* **58** 4836
- [ 9 ] Li L ,Malomed B A ,Mihalache D ,Liu W M 2006 *Phys. Rev. E* **73** 066610
- [ 10 ] Zhang T ,Yue R H ,Liu W M 2005 *Phys. Lett. A* **340** 228
- [ 11 ] Jin G R ,Kim C K ,Nahm K 2005 *Phys. Rev. A* **72** 045601
- [ 12 ] Santos L ,Shlyapnikov G V ,Zoller P ,Lewenstein M 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 1791
- [ 13 ] Goral K ,Santos L ,Lewenstein M 2003 *Phys. Rev. Lett.* **88** 170406
- [ 14 ] Xie Z W ,Liu W M 2004 *Phys. Rev. A* **70** 045602
- [ 15 ] Smerzi A ,Trombettoni A 2003 *Phys. Rev. A* **68** 023613
- [ 16 ] Kivshar Y S ,Peyrard M 1992 *Phys. Rev. A* **46** 3198

## Modulational instability of two-component dipolar Bose-Einstein condensates in an optical lattice<sup>\*</sup>

Huang Jin-Song<sup>1)</sup> Chen Hai-Feng<sup>2)</sup> Xie Zheng-Wei<sup>1)†</sup>

1 *College of Physics and Electronic Engineering ,Laboratory for Low-dimensional Structure Physics ,Sichuan Normal University ,Chengdu 610066 ,China )*

2 *Physics Teaching and Research Section ,North Sichuan Medical College ,Nanchong 637000 ,China )*

( Received 1 November 2007 ; revised manuscript received 18 November 2007 )

### Abstract

From the linear stability analysis ,the modulational instability ( MI ) of two-component dipolar Bose-Einstein condensates ( BECs ) in an optical lattice is studied. The relation of the region of MI with the on-site interaction and the site-to-site interaction induced by the dipole-dipole interaction is obtained. The results show that there is a great influence of site-to-site interaction on the MI of the two-component dipolar BECs in the optical lattices. This gives us some useful information for manipulating two-component dipolar BECs in practice.

**Keywords :** optical lattices , two-component Bose-Einstein condensates , modulational instability , dipole-dipole interaction

**PACC :** 3280 , 4250 , 7530D , 7540F

<sup>\*</sup> Project supported by the National Nature Science Foundation of China ( Grant No. 10447004 ) and the Key Foundation of Sichuan Province Education Bureau , China ( Grant No. 2004A087 ).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail : zzwxie@yahoo.com.cn