

# 洛伦兹光束的传输特性研究<sup>\*</sup>

周国泉<sup>†</sup>

(浙江林学院理学院, 临安 311300)

(2007 年 10 月 25 日收到, 2007 年 11 月 14 日收到修改稿)

运用光束传输的二阶矩理论, 对洛伦兹光束的传输特性进行了研究, 给出了束腰、横向发散角和光束传输因子的表达式. 横向束腰仅取决于对应方向上的光束参数, 而横向发散角和光束传输因子却取决于两横向上的光束参数. 给出了光束传输因子随两横向光束参数的变化关系曲线. 结果表明, 两横向上的光束传输因子随两光束参数的变化规律是不相同的, 而整体的光束传输因子随两光束参数的变化是前两者的综合体现. 但在傍轴情形下, 光束传输因子趋向于常数 1.41. 因此, 对于相同束腰, 其傍轴条件下的发散性为对应高斯光束的 1.41 倍. 所以, 洛伦兹光束适合用于描述某些发散程度较大的激光光源.

关键词: 洛伦兹光束, 光束传输, 二阶矩

PACC: 4210Q, 4225B

## 1. 引 言

近几年来, 不同形态分布的激光束由于在实际应用中具有特殊用途而引起广大光学工作者的极大兴趣. 洛伦兹光束就是其中之一. 作为一种可实现的光束, 洛伦兹光束由 Gawhary 和 Severini 所引入<sup>[1]</sup>. 而且, 他们研究了洛伦兹光束在菲涅耳近似下的传输性质, 给出了在任一横截面上用标量表示的闭析解. 洛伦兹分布由于具有在相同空间分布下角扩展程度相对较大<sup>[2]</sup>, 适合用于描述某些发散程度较大的激光光源. 例如, 双异结  $\text{Ga}_{1-x}\text{Al}_x\text{As}$  激光器, 高斯分布描述就不再适合了, 而洛伦兹分布却是一个相对较好的近似. 另一方面, 激光束的表征一直是激光光学中比较活跃的一个领域. 在傍轴近似的框架内和非傍轴范围内均对光束质量开展了广泛的研究<sup>[3-6]</sup>. 光束传输因子被建议用于表征激光束的光束质量. 而且, 光束传输因子在表征激光束的光束质量方面的确起了重要作用<sup>[7,8]</sup>. 目前, 有关洛伦兹光束传输因子的研究还未见报道. 因此, 本文基于光束传输的二阶矩理论研究了洛伦兹光束的光束传输因子, 以揭示其传输特性. 既然洛伦兹分布是用于描写发散程度较大的激光束, 其涉及的光源尺度相对较

小, 所以本文摒弃了标量表述, 而采用全矢量表述的电磁场角谱理论表征洛伦兹光束.

## 2. 理论分析

在直角坐标系  $z=0$  的源平面上, 洛伦兹光束的初始分布为<sup>[1]</sup>

$$\begin{pmatrix} E_x(x, y, 0) \\ E_y(x, y, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{w_{0x}w_{0y} [1 + (x/w_{0x})^2] [1 + (y/w_{0y})^2]} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

式中  $w_{0x}$  和  $w_{0y}$  分别为与  $x$  和  $y$  方向上光束宽度相关的光束参数. 基于全矢量表述的电磁场角谱理论<sup>[9,10]</sup>, 可得到向自由半空间  $z \geq 0$  传输的洛伦兹光束:

$$E(x, y, z) = \exp(-i\omega t) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A^E(p, q) \times \exp[ik(px + qy + mz)] dp dq, \quad (2)$$

和

$$H(x, y, z) = \exp(-i\omega t) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A^H(p, q) \times \exp[ik(px + qy + mz)] dp dq, \quad (3)$$

其中

<sup>\*</sup> 浙江省教育厅科研基金(批准号 20060677)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: zhouguoquan178@sohu.com

$$A^E(p, q) = \pi^2 \exp[-k(w_{0x}|p| + w_{0y}|q|)] \times \left( \mathbf{i} - \frac{p}{m} \mathbf{k} \right), \quad (4)$$

$$A^H(p, q) = c\pi^2 \exp[-k(w_{0x}|p| + w_{0y}|q|)] \times \left( \frac{-pq\mathbf{i}}{m} + \frac{1-q^2}{m}\mathbf{j} - q\mathbf{k} \right), \quad (5)$$

是洛伦兹源分布的矢量角谱.  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  为波长;  $m = (1 - b^2)^{1/2}$ ;  $b = (p^2 + q^2)^{1/2}$ ;  $c = (\epsilon_0/\mu_0)^{1/2}$ .  $\epsilon_0$  和  $\mu_0$  分别为真空的电容率和磁导率,  $\omega$  为圆频率.  $p/\lambda$  和  $q/\lambda$  分别为横向空间频率.  $m/\lambda$  为纵向空间频率.  $b < 1$  的值对应于和  $z$  轴成角度  $\sin^{-1} b$  传输的均幅平面波; 而  $b > 1$  的值对应于倏逝波.

当洛伦兹光束通过任一  $z$  为常数的平面时, 其

总功率  $P$  可利用傅里叶变换的基本性质得到:

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re}\{A^E(p, q) \times A^{H*}(p, q)\}_z \times \exp(-4\pi z \operatorname{Im} m) dp dq = \iint_{b < 1} c\pi^4 \exp[-2k(w_{0x}|p| + w_{0y}|q|)] \times \frac{1-q^2}{m} dp dq, \quad (6)$$

式中,  $\operatorname{Re}$  表示取实部, 星号表示取复共轭, 下标  $z$  表示取相应的  $z$  分量,  $\operatorname{Im}$  表示取虚部. 显然,  $P$  与  $z$  无关, 说明洛伦兹光束在沿  $z$  轴传输过程中总功率保持不变. 洛伦兹光束中心的横坐标  $X(z)$ ,  $Y(z)$  可由坡印亭矢量  $z$  分量的一阶矩给出<sup>[11]</sup>

$$X(z) = \frac{1}{P} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x S_z dx dy = \frac{c\pi^3}{2P} \operatorname{Im} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-k(w_{0x}|p| + 2w_{0y}|q|)] \times \frac{1-q^2}{m} \frac{\partial \exp(-kw_{0x}|p|)}{\partial p} dp dq \right\} = 0, \quad (7)$$

$$Y(z) = \frac{1}{P} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y S_z dx dy = \frac{c\pi^3}{2P} \operatorname{Im} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-k(2w_{0x}|p| + w_{0y}|q|)] \times \frac{1-q^2}{m} \frac{\partial \exp(-kw_{0y}|q|)}{\partial q} dp dq \right\} = 0, \quad (8)$$

式中  $S_z$  是对时间平均的坡印亭矢量的  $z$  分量. 洛伦兹光束在沿  $z$  轴传输过程中, 光束中心始终保持在传输轴上. 因此, 基于光束中心坐标二阶矩定义的洛伦兹光束宽度可用矩阵形式表示为

$$\begin{pmatrix} W_x^2(z) & W_{xy}^2(z) \\ W_{xy}^2(z) & W_y^2(z) \end{pmatrix} = \frac{4}{P} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_z \begin{pmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix} dx dy. \quad (9)$$

选取平面  $z = 0$  为参考平面, 则光束宽度沿  $z$  轴传输满足双曲线变化规律

$$\begin{pmatrix} W_x^2(z) & W_{xy}^2(z) \\ W_{xy}^2(z) & W_y^2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_x^2(0) & W_{xy}^2(0) \\ W_{xy}^2(0) & W_y^2(0) \end{pmatrix} + 2z \begin{pmatrix} \frac{W_x^2(0)}{R_x(0)} & \frac{W_{xy}^2(0)}{R_{xy}(0)} \\ \frac{W_{xy}^2(0)}{R_{xy}(0)} & \frac{W_y^2(0)}{R_y(0)} \end{pmatrix} + z^2 \begin{pmatrix} \tan^2 \theta_x & \tan^2 \theta_{xy} \\ \tan^2 \theta_{xy} & \tan^2 \theta_y \end{pmatrix}. \quad (10)$$

(10) 式右边的第二个矩阵是光束曲率矩阵, 具体表达式为

$$\begin{pmatrix} \frac{W_x^2(0)}{R_x(0)} & \frac{W_{xy}^2(0)}{R_{xy}(0)} \\ \frac{W_{xy}^2(0)}{R_{xy}(0)} & \frac{W_y^2(0)}{R_y(0)} \end{pmatrix} = \frac{4}{P} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} x S_x & \frac{1}{2}(x S_y + y S_x) \\ \frac{1}{2}(x S_y + y S_x) & y S_y \end{pmatrix} dx dy. \quad (11)$$

式中,  $S_x$  和  $S_y$  分别是对时间平均的坡印亭矢量的

$x$  和  $y$  分量. (10) 式中最后一个矩阵是发散度矩阵:

$$\begin{pmatrix} \tan^2 \theta_x & \tan^2 \theta_{xy} \\ \tan^2 \theta_{xy} & \tan^2 \theta_y \end{pmatrix} = \frac{4}{P} \iint_{b < 1} \frac{1}{m} \left[ \begin{array}{cc} p(A^E \times A^{H*})_x & \frac{1}{2}[p(A^E \times A^{H*})_y + q(A^E \times A^{H*})_x] \\ \frac{1}{2}[p(A^E \times A^{H*})_y + q(A^E \times A^{H*})_x] & q(A^E \times A^{H*})_y \end{array} \right] dpdq. \quad (12)$$

洛伦兹光束在  $x$  和  $y$  方向上的横向束腰  $W_x(0)$  和

$W_y(0)$  由(9)式经运算后为

$$W_x(0) = \frac{\lambda}{\pi} \left( \frac{\iint_{b < 1} \exp(-kw_{0x}|p|) \exp(-2kw_{0y}|q|) \frac{1-q^2}{m} \frac{\partial^2 \exp(-kw_{0x}|p|)}{\partial p^2} dpdq}{\iint_{b < 1} \exp(-2kw_{0x}|p|) \exp(-2kw_{0y}|q|) \frac{1-q^2}{m} dpdq} \right)^{1/2} = 2w_{0x}, \quad (13)$$

$$W_y(0) = \frac{\lambda}{\pi} \left( \frac{\iint_{b < 1} \exp(-2kw_{0x}|p|) \exp(-kw_{0y}|q|) \frac{1-q^2}{m} \frac{\partial^2 \exp(-kw_{0y}|q|)}{\partial q^2} dpdq}{\iint_{b < 1} \exp(-2kw_{0x}|p|) \exp(-2kw_{0y}|q|) \frac{1-q^2}{m} dpdq} \right)^{1/2} = 2w_{0y}. \quad (14)$$

横向束腰仅取决于相应方向上的光束参数,且始终等于光束参数的两倍.交叉光束束腰  $W_{xy}(0)$  经运算为零.同时,利用傅里叶变换的性质可以证明光束曲

率矩阵的每一个元均为零.洛伦兹光束在  $x$  方向和  $y$  方向上的横向远场发散角  $\theta_x$  和  $\theta_y$  由(12)式给出

$$\tan \theta_x = 2 \left( \frac{\int_0^1 p^2 \exp(-2kw_{0x}p) \int_0^{\sqrt{1-p^2}} \exp(-2kw_{0y}q) \frac{1-q^2}{m^3} dq dp}{\int_0^1 \exp(-2kw_{0x}p) \int_0^{\sqrt{1-p^2}} \exp(-2kw_{0y}q) \frac{1-q^2}{m} dq dp} \right)^{1/2}, \quad (15)$$

$$\tan \theta_y = 2 \left( \frac{\int_0^1 \exp(-2kw_{0x}p) \int_0^{\sqrt{1-p^2}} \exp(-2kw_{0y}q) \frac{1-q^2}{m^3} q^2 dq dp}{\int_0^1 \exp(-2kw_{0x}p) \int_0^{\sqrt{1-p^2}} \exp(-2kw_{0y}q) \frac{1-q^2}{m} dq dp} \right)^{1/2}. \quad (16)$$

而横向交叉发散角  $\theta_{xy}$  为零.  $x$  方向上的横向远场发散角  $\theta_x$  不仅取决于同一方向上的光束参数  $w_{0x}$ , 还受另一横向上的光束参数  $w_{0y}$  影响; 对于横向远场发散角  $\theta_y$  也如此. 由(10)式可知, 二阶矩定义下的两个横向洛伦兹光束宽度在沿  $z$  轴传输过程中满足最简单的双曲线变化规律.

根据光束传输因子的定义<sup>[4,6,11]</sup>, 洛伦兹光束两个横向上的光束传输因子  $M_x^2$  和  $M_y^2$  分别为

$$M_j^2 = \frac{\pi}{\lambda} W_j(0) \tan \theta_j, \quad (17)$$

式中  $j$  分别等于  $x$  和  $y$ . 因此, 洛伦兹光束的光束传

输因子  $M^2$  可由上述两结果综合给出<sup>[12]</sup>:

$$M^2 = (M_x^2 M_y^2)^{1/2}. \quad (18)$$

### 3. 数值计算

(15) 和(16)式是积分形式, 不直观. 因此, 图 1 2 和 3 分别给出了洛伦兹光束的  $M_x^2$ ,  $M_y^2$  和  $M^2$  随光束参数  $w_{0x}$  和  $w_{0y}$  的变化关系. 在图 1(b), 2(b) 和 3(b) 中, 实线和虚线分别表示  $w_{0y}$  等于  $0.2\lambda$  和  $5\lambda$ . 在图 1(c), 2(c) 和 3(c) 中, 实线和虚线分别表示  $w_{0x}$  等于  $0.2\lambda$  和  $5\lambda$ . 显然, 当  $w_{0x}$  和  $w_{0y}$  均大于两个波长

时,  $M_x^2$ ,  $M_y^2$  和  $M^2$  都等于 1.41, 此时两个横向互不影响. 同时, 也意味着对于相同束腰, 傍轴洛伦兹光束的发散性为对应高斯光束的 1.41 倍. 当  $w_{0x}$  和  $w_{0y}$  分别小于两个波长时, 两横向的互相作用使得光束传输因子变化多端. 当  $w_{0y} = 5\lambda$  且  $w_{0x} < 2\lambda$  时,  $M_x^2$  和  $M^2$  呈现先从零开始增大后逐渐减小至 1.41 的变化规律; 而  $M_y^2$  遵循从最大值逐渐减小至 1.41 的规律. 当  $w_{0y} = 0.2\lambda$  且  $w_{0x} < 2\lambda$  时, 光束传输因子的变化规律与  $w_{0y} = 5\lambda$  时类似, 但相应的最大值却减小

了许多. 当  $w_{0x} = 0.2\lambda$  时,  $M_x^2$  和  $M^2$  随  $w_{0y}$  的增大分别先从 19.9 和零开始增大后逐渐减小至 23.9 和 25.0 而  $M_y^2$  从零开始增大趋向于饱和值 26.0. 当  $w_{0x} = 5\lambda$  时,  $M_x^2$  随  $w_{0y}$  的增大从最大值 2.11 逐渐降至 1.41; 而  $M_y^2$  和  $M^2$  分别从零开始增至 1.61 和 1.56 后逐渐降至 1.41. 比较图 1 和 2,  $M_x^2$  和  $M_y^2$  随光束参数  $w_{0x}$  和  $w_{0y}$  呈现不同的变化规律. 但  $M^2$  随光束参数  $w_{0x}$  和  $w_{0y}$  的变化是两者的综合体现.

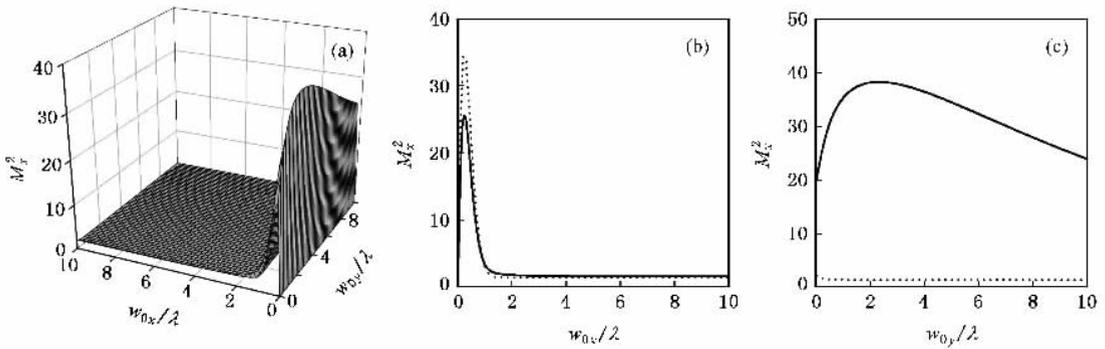


图 1 (a)  $M_x^2$  随  $w_{0x}$  和  $w_{0y}$  的变化关系 (b)  $M_x^2$  随  $w_{0x}$  的变化关系, 实线表示  $w_{0y} = 0.2\lambda$ , 虚线表示  $w_{0y} = 5\lambda$  (c)  $M_x^2$  随  $w_{0y}$  的变化关系, 实线表示  $w_{0x} = 0.2\lambda$ , 虚线表示  $w_{0x} = 5\lambda$

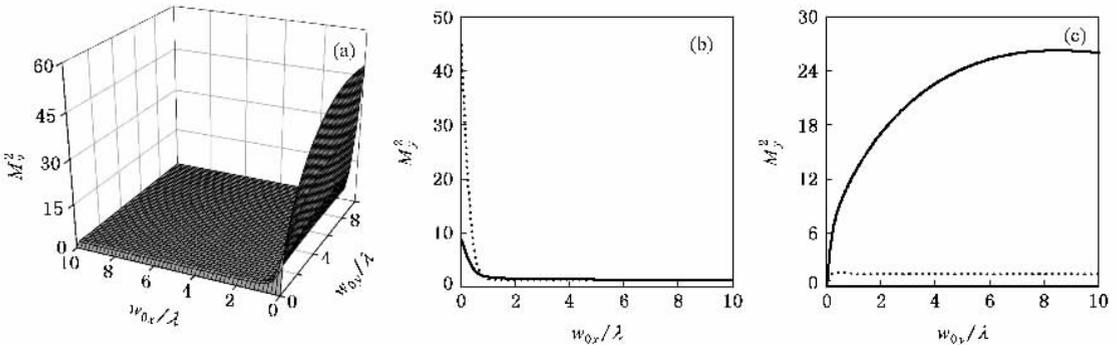


图 2 (a)  $M_y^2$  随  $w_{0x}$  和  $w_{0y}$  的变化关系 (b)  $M_y^2$  随  $w_{0x}$  的变化关系, 实线表示  $w_{0y} = 0.2\lambda$ , 虚线表示  $w_{0y} = 5\lambda$  (c)  $M_y^2$  随  $w_{0y}$  的变化关系, 实线表示  $w_{0x} = 0.2\lambda$ , 虚线表示  $w_{0x} = 5\lambda$

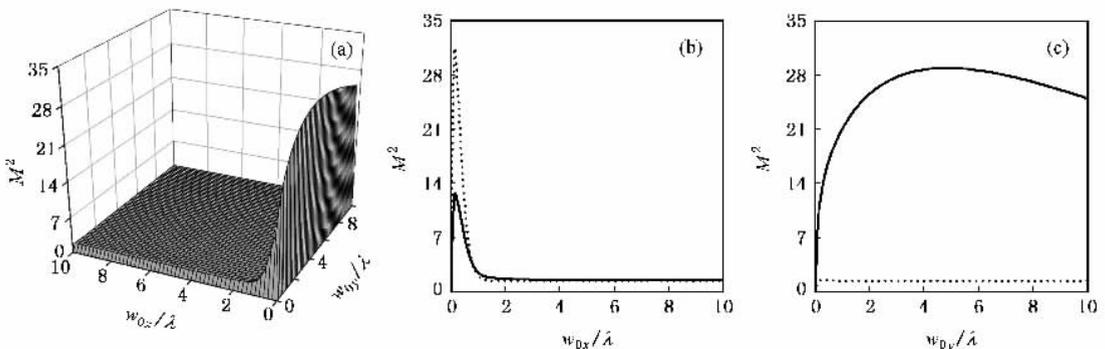


图 3 (a)  $M^2$  随  $w_{0x}$  和  $w_{0y}$  的变化关系 (b)  $M^2$  随  $w_{0x}$  的变化关系, 实线表示  $w_{0y} = 0.2\lambda$ , 虚线表示  $w_{0y} = 5\lambda$  (c)  $M^2$  随  $w_{0y}$  的变化关系, 实线表示  $w_{0x} = 0.2\lambda$ , 虚线表示  $w_{0x} = 5\lambda$

## 4. 结 论

运用光束传输的二阶矩理论,对洛伦兹光束的传输特性进行了研究,给出了束腰、横向发散角和光束传输因子的表达式. 横向束腰光束仅取决于相应方向上的光束参数,且始终等于光束参数的两倍. 而横向发散角和传输因子不仅取决于同一方向上的光束参数,还受另一横向上光束参数的影响. 直观起

见,给出了  $M_x^2$ 、 $M_y^2$  和  $M^2$  随光束参数  $w_{0x}$  和  $w_{0y}$  的变化关系图;且分别讨论了光束传输因子随  $w_{0x}$  或  $w_{0y}$  的变化规律. 数值计算结果显示,  $M_x^2$  和  $M_y^2$  随光束参数  $w_{0x}$  和  $w_{0y}$  呈现不同的变化规律. 但  $M^2$  随光束参数  $w_{0x}$  和  $w_{0y}$  的变化是前两者的综合. 在傍轴情形下,光束传输因子趋向于常数 1.41. 因此,对于相同束腰,其傍轴条件的发散性为对应高斯光束的 1.41 倍. 所以,洛伦兹光束适合用于描述某些发散程度较大的激光光源.

- [ 1 ] Gawhary O E , Severini S 2006 *J. Opt. A : Pure Appl. Opt.* **8** 409  
 [ 2 ] Naqwi A , Durst F 1990 *Appl. Opt.* **29** 1780  
 [ 3 ] Siegman A E 1990 *Proc. SPIE* **1224** 2  
 [ 4 ] Zhou G Q 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1572 ( in Chinese ) [ 周国泉 2005 物理学报 **54** 1572 ]  
 [ 5 ] Wang S M , Zhao D M , Lu Z D , Zhou G Q , Huang F Q , Xu J X 2001 *Opt. Commun.* **194** 425  
 [ 6 ] Kang X P , Lü B D 2005 *Acta Phys. Sin.* **55** 4563 ( in Chinese )

[ 康小平、吕百达 2005 物理学报 **55** 4563 ]

- [ 7 ] Belanger P A 1991 *Opt. Lett.* **16** 196  
 [ 8 ] Borghi R , Santarsiero M 1997 *Opt. Lett.* **22** 262  
 [ 9 ] Rhodes D R 1964 *Proc. IEEE* **52** 1013  
 [ 10 ] Rhodes D R 1966 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **14** 676  
 [ 11 ] Porras M A 1996 *Opt. Commun.* **127** 79  
 [ 12 ] Nemes G , Serna J 1998 *OSA TOPS* **17** 200

## Study on the propagation properties of Lorentz beam<sup>\*</sup>

Zhou Guo-Quan<sup>†</sup>

( School of Sciences , Zhejiang Forestry University , Lin 'an 311300 , China )

( Received 25 October 2007 ; revised manuscript received 14 November 2007 )

### Abstract

Based on the second-order moment theory of beam propagation ,the properties of Lorentz beam have been investigated . The expressions of the beam waists ,the transverse divergence angle and the beam propagation factor have been presented . The transverse beam waist only depends on the corresponding beam parameter . However ,the transverse divergence angle and the beam propagation factor are both determined by the two transverse beam parameters . The curves of the beam propagation factor versus the two transverse beam parameters are also given . The numerical results show that variational laws of the beam propagation factor in the  $x$ -and  $y$ -directions versus the two transverse beam parameters are apparently different ,while the variational rule of the integrated beam propagation factor versus the two transverse beam parameters is the composite manifestation of the above cases . In the paraxial case ,the beam propagation factor trends to a constant value of 1.41 . With the beam waist being the same ,therefore ,the divergence of Lorentz beam is 1.41 times that of the Gaussian beam in the paraxial case . Accordingly ,Lorentz beam is an appropriate model to describe certain laser sources with high divergence .

**Keywords :** Lorentz beam , beam propagation , second-order moment

**PACC :** 4210Q , 4225B

<sup>\*</sup> Project supported by the Scientific Research Fund of Education Department of Zhejiang Province ,China ( Grant No. 20060677 ).

<sup>†</sup> E-mail : zhouguoquan178@sohu.com