

# 有限开敞介质光子晶体的模式及其带结构分析<sup>\*</sup>

殷海荣<sup>†</sup> 宫玉彬 魏彦玉 岳玲娜 路志刚 巩华荣 黄民智 王文祥

(电子科技大学物理电子学院, 成都 610054)

(2007 年 9 月 5 日收到, 2007 年 9 月 27 日收到修改稿)

针对光子晶体在行波管中的应用, 对有限开敞介质光子晶体的模式和带结构进行了分析和计算. 分析表明, 有限开敞介质光子晶体中所能存在的模式包括 EH 和 HE 混合模式. 如果是二维光子晶体, 还存在 E 模式,  $E_1$  模式即为无限光子晶体中的 E 极化. 计算表明, 被用作行波管慢波电路的光子晶体可以不必拥有完全带隙, 而只需要具有带间隙即可.

关键词: 光子晶体, 本征值方程, 行波管, 带结构

PACC: 4270Q, 5270G, 5235H

## 1. 引 言

光子晶体<sup>[1]</sup>是一类具有电磁传输禁带的人工材料. 自 Yablonovitch<sup>[2]</sup>发明第一块具完全禁带的光子晶体以来, 光子晶体获得了广泛的研究, 其应用研究领域主要包括布拉格光栅纤维、微带平板电路、微谐振腔和激光器等<sup>[3-6]</sup>. 进入 21 世纪以来, 对光子晶体的研究逐渐扩展到了真空微波器件之中. 在速调管、回旋管和加速器中应用光子晶体的研究已经取得了成功<sup>[7-9]</sup>, 光子晶体行波管的研究也正在进行之中<sup>[10]</sup>.

对于使用了光子晶体的行波管, 由于利用慢波工作, 需要重新研究透彻揭示光子晶体禁带和器件工作频带, 以及光子晶体传输模式和工作慢电磁波的关系. 尽管对光子晶体的理论研究已经很多, 但这些研究均不能满足行波管中光子晶体理论的需要. 其原因在于, 首先, 研究带结构的理论侧重于分析光子晶体的特征带隙, 因而通常假定光子晶体在空间上无限延伸, 并分析其中最简单的两种极化方式, 即 E 和 H 极化(或者 TE 和 TM 极化), 由于这两种极化方式与行波管中的工作模式并不对应, 因此得到的禁带与工作模式无关; 其次, 已经得到研究的光子晶体传输线与行波管中的具体情况不相对应, 如光子晶体微带传输线的工作模式是类 TEM 波, 布

拉格光纤的介电常数变化是微扰的, 使用耦合模理论或变分法就足以进行研究了, 光子晶体微谐振腔的工作模式是对应于 E 或 H 极化的最低模式等等.

由于利用开敞光子晶体(即光子晶体直接与自由空间相接)作为慢波电路有利于行波管中的非工作模式向外辐射, 从而减小振荡产生的可能性, 行波管中所使用的光子晶体通常为开敞结构的有限光子晶体(即实际使用的空间尺寸有限的光子晶体). 为了建立光子晶体行波管的设计理论, 首先必须对有限开敞光子晶体中的模式进行全面分析, 并分析这些模式的带结构. 本文将利用平面波、场论方法, 对有限开敞介质光子晶体中的模式及其带结构进行分析和计算, 并以此为依据, 分析如何确定行波管中的工作模式.

## 2. 理 论

如图 1 所示, 作为行波管慢波线时, 光子晶体缺陷既是电子束通道, 也是工作电磁波的传输载体, 光子晶体的作用是将工作电磁波束缚在缺陷之内, 使之不向外辐射. 这就要求, 当特定频率的工作电磁波入射光子晶体区域之后, 不能激发起任何可以在光子晶体区域内存在的电磁波模式. 反之, 如果分析清楚了可以在光子晶体区域内存在的任意电磁波模式及其频段, 则工作模式的频段便可被完全确定.

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号: 60532010 和 60601005)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: yhr555@sohu.com

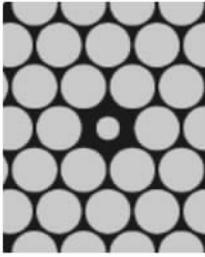


图1 一类作为行波管慢电磁波传输线的光子晶体及其缺陷

为了让行波管中所产生的非工作模式能够向外

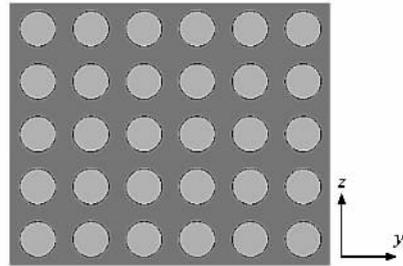
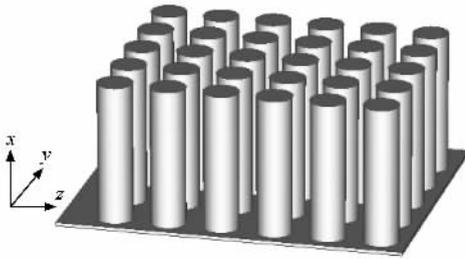


图2 一个方向上无限延伸的光子晶体

将光子晶体及其外面的无界真空分为两个区域加以讨论. 首先研究光子晶体区域的场. 在光子晶体区域, 麦克斯韦方程组的两旋度方程为

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon_f(x, z)\mathbf{E}, \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_0\mathbf{H}, \quad (2)$$

其中  $f(x, z) = 1 - (1 - \epsilon_r)S_{(y, z)}$ . 当场点位于光子晶体内部时, 函数  $S_{(y, z)} = 1$ , 否则  $S_{(y, z)} = 0$ .  $S_{(y, z)}$  函数为周期性函数, 其周期等于光子晶体的倒格子晶矢.  $\epsilon_r = \epsilon_p/\epsilon_f$  为晶体材料相对于背景材料的相对介电常数.

光子晶体区域任一场分量可以表示为如下形式的傅里叶展开级数:

$$F_{(i)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{m, n}^{(i)} f(x) e^{jk_m y} e^{-j\beta_n z}, \quad (3)$$

上式中,  $\beta_n = \beta_z + 2n\pi/p_z$ ,  $k_m = k_y + 2m\pi/p_y$ ,  $\beta_z$  是电磁波  $z$  向的传播常数,  $k_y$  是电磁波  $y$  向的传播常数,  $i$  的不同取值代表不同的场分量. 需要指出的是, 对于这里  $y$  向有限的光子晶体, 一旦确定了  $z$  向的传播常数函数, 其  $y$  向的传播常数  $k_y$  也就被唯一地确定了.  $f(x)$  的可能表达式为

$$f(x) = \begin{cases} \sin(l\pi x/a) \\ \cos(l\pi x/a) \end{cases}, \quad 0 \leq x \leq a, l \geq 0, \quad (4)$$

其中  $l$  的不同取值对应  $x$  方向具有不同场分布的电

辐射. 光子晶体一般暴露在真空之中, 并且在传输方向上可以视为无限延伸. 为了适应行波管慢波线的具体结构, 以图2所示的有限光子晶体作为分析对象. 图2中,  $x$  方向为二维光子晶体的均匀方向, 其两端被电壁所封闭, 设其高度为  $a$ ,  $z$  方向是周期性的,  $y$  方向为有限的, 其外为无界真空. 这种结构只在一个方向是开敞的, 但关于它的理论只要稍加变化便可适用于完全开敞的结构. 二维光子晶体的布拉格周期为  $p_y e_y + p_z e_z$ , 光子晶体柱的介电常数为  $\epsilon_p$ , 背景材料的介电常数为  $\epsilon_f$ .

磁波模式.

为了方便地在频域进行分析, 将(3)式变换为

$$F_{(i)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{m, n}^{(i)} \exp(j\mathbf{t} \cdot \mathbf{r}), \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{m, n} &= (t_{(x)}\mathbf{a}_x + t_{(y)}\mathbf{a}_y + t_{(z)}\mathbf{a}_z) \\ &= \mathbf{a}_x(l\pi/a) + \mathbf{a}_y k_m - \mathbf{a}_z \beta_n, \end{aligned} \quad (5a)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}_x x + \mathbf{a}_y y + \mathbf{a}_z z, \quad (5b)$$

将麦氏方程(1)和(2)也相应变换到频域, 有

$$\mathbf{t}_{m, n} \times \mathbf{H} \delta_{(m-m', n-n')} = \omega\epsilon_f \mathbf{E}, \quad (6a)$$

$$\mathbf{t}_{m, n} \times \mathbf{E} \delta_{(m-m', n-n')} = -\omega\mu_0 \mathbf{H}, \quad (6b)$$

其中  $\delta$  表示当有关  $m$  和  $n$  项的下标运算都为零时, 取1, 否则, 等于0.

## 2.1. 可能存在的模式

为方便讨论, 将所有可能模式分为第一、二和三类, 分别对应模式电场分量的个数等于、少于和多于磁场分量的个数. 对于第一类标量场分布模式, 从数学角度看, 只有  $\text{TEM}_y(E_x, 0, E_z; H_x, 0, H_z)$  模式和  $\text{EH}$  模式或  $\text{HE}$  模式(六个电磁场矢量均存在)可以存在; 第二类模式包括了六类具体模式, 它们是  $\text{E}_{(x)}(E_x, 0, 0, 0, H_y, H_z)$ ,  $\text{E}_{(y)}(0, E_y, 0, 0, H_x, 0, H_z)$ ,  $\text{E}_{(z)}(0, 0, E_z, H_x, H_y, 0)$ ,  $\text{TE}_z(E_x, E_y, 0, H_x, H_y, H_z)$ ,  $\text{TE}_y(E_x, 0, E_z, H_x, H_y, H_z)$  和  $\text{TE}_x$

$(0, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z)$  TE 模式可以看成是适当 E 模式的叠加;第三类模式包括  $H_{(x)}$  ( $H_x, 0, 0, 0, E_y, E_z$ ),  $H_{(y)}$  ( $0, H_y, 0, E_x, 0, E_z$ ),  $H_{(z)}$  ( $0, 0, H_z, E_x, E_y, 0$ ),  $TM_z$  ( $H_x, H_y, 0, E_x, E_y, E_z$ ),  $TM_y$  ( $H_x, 0, H_z, E_x, E_y, E_z$ ) 和  $TM_x$  ( $0, H_y, H_z, E_x, E_y, E_z$ ) 六类具体模式.

用  $t$  对 (6b) 式作矢量积, 得

$$\begin{aligned} & t_{m,n} \times t_{m,n} \times E \delta_{(m-m', n-n')} \\ &= [ (t_{m,n} \cdot E) t_{m,n} - (t_{m,n} \cdot t_{m,n}) E ] \delta_{(m-m', n-n')} \\ &= -k^2 fE, \end{aligned} \quad (7)$$

其中  $k^2 = \omega^2 \epsilon_r u_0$ .

对于  $E_{(y)}$  模式, 由 (7) 式可知, 各场分量首先必须满足

$$[ (t_{m,n} \cdot E) t_{(x)m,n} ] \delta_{(m-m', n-n')} = 0, \quad (8a)$$

$$[ (t_{m,n} \cdot E) t_{(z)m,n} ] \delta_{(m-m', n-n')} = 0. \quad (8b)$$

由于  $E_{(y)}$  模式的电场分量只有  $E_y$  (8a) 式只有当  $l$  为零时才可能满足, 而 (8b) 式则永远得不到满足. 因此  $E_{(y)}$  模式不可能存在. 同理  $E_{(z)}$  模式也不能存在.

$E_{(x)}$  模式首先必须满足

$$[ (t_{m,n} \cdot E) t_{(y)m,n} ] \delta_{(m-m', n-n')} = 0, \quad (9a)$$

$$[ (t_{m,n} \cdot E) t_{(z)m,n} ] \delta_{(m-m', n-n')} = 0, \quad (9b)$$

上式只有当  $l$  为零时才成立. 当  $l$  为零时, 有

$$(t_{(y)m,n}^2 + t_{(z)m,n}^2) E_x \delta_{(m-m', n-n')} = -k^2 fE_x \quad (10)$$

(10) 式便是  $E_{(x)}$  模式的标量波动方程. 由场分量和波动方程可知,  $E_{(x)}$  模式对应于无限光子晶体中 E 极化的情况.

对于 TE<sub>x</sub> 模式, 由 (7) 式可知下式必须成立:

$$[ (t_{m,n} \cdot E_{x,z}) t_{(y)m,n} ] \delta_{(m-m', n-n')} = 0, \quad (11)$$

显然 (11) 式难以满足, 因此 TE<sub>x</sub> 模式不能存在, 同理 TE<sub>z</sub> 模式也不可能存在.

对于 TE<sub>y</sub> 模式, 必须有

$$[ (t_{m,n} \cdot E_{y,z}) t_{(x)m,n} ] \delta_{(m-m', n-n')} = 0, \quad (12)$$

只有当  $l$  为零时上式才能成立. 当  $l$  为零时, 场分量  $E_y, E_z$  和  $H_x$  都必须为零, 因而 TE<sub>y</sub> 模式不能存在.

以上对所有第二类模式进行了讨论. 在对第三类模式进行讨论之前, 用  $t$  对 (6a) 式作矢量积:

$$\begin{aligned} & t_{m,n} \times t_{m,n} \times H \delta_{(m-m', n-n')} \\ &= [ (t_{m,n} \cdot H) t_{m,n} - (t_{m,n} \cdot t_{m,n}) H ] \delta_{(m-m', n-n')} \\ &= -k^2 fH, \end{aligned} \quad (13)$$

由 (13) 式可知, 第三类模式与第二类模式呈对偶关系, 因而只有  $H_{(x)}$  模式可能存在. 然而对于均匀方向被电壁所封闭的情况, 当  $l$  为零时, 场分量  $H_x$  必须为零, 所以无法存在.

现在讨论第一类模式. 对于 TEM<sub>x</sub> 模式, 由 (7) 式有

$$[ (t_{m,n} \cdot E_{y,z}) t_{(x)m,n} ] \delta_{(m-m', n-n')} = 0, \quad (14)$$

仍然只有当  $l$  为零时才可能满足, 而当  $l$  为零时, 场分量  $E_y, E_z$  必须为零, 所以 TEM<sub>x</sub> 模式不能存在.

EH 模式或 HE 模式由于六个场分量均存在, 因此任何情况下都有可能存在. 综上所述, 图 2 所示光子晶体中所能存在的模式包括当  $l$  为零时的  $E_{(x)}$  模式和 EH 模式或 HE 模式. 值得一提的是, 虽然上述讨论是针对二维光子晶体进行的, 但三维与二维的区别仅在于 (5a) 式中  $t_{(x)}$  不相同, 因此除了 E 模式在三维中不能存在, 其余结构都适用于三维光子晶体.

### 2.2. 本征值方程

对 (1) 和 (2) 式分别求旋, 有

$$\nabla(\nabla \cdot E) - (\nabla \cdot \nabla)E = k^2 fE, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla \cdot H) - (\nabla \cdot \nabla)H &= k^2 fH + j\omega\epsilon_r \nabla f \times E, \\ & \quad (16) \end{aligned}$$

将函数  $S_{(y,z)}$  展开为如下的二维傅里叶级数:

$$S_{(y,z)} = \sum_m \sum_n G_{m,n} e^{j \left( \frac{2m\pi}{p_y} y + \frac{2n\pi}{p_z} z \right)}, \quad (17)$$

于是有

$$\begin{aligned} \nabla f &= -(1 - \epsilon_r) \nabla S \\ &= -(1 - \epsilon_r) [ j t'_{(y)m,n} S a_y \\ & \quad + j t'_{(z)m,n} S a_z ] \delta_{(m-m', n-n')}, \end{aligned} \quad (18)$$

其中  $t'_{(y)m,n} = a_y (2m\pi/p_y) + a_z (2n\pi/p_z) = a_y t'_{(y)m,n} + a_z t'_{(z)m,n}$ .

由 (5) 式有

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla \cdot F) - \nabla^2 F &= -[ a_x (t_{(x)} t_{(y)} F_y + t_{(z)} t_{(x)} F_z) \\ & \quad - a_y (t_{(x)} t_{(y)} F_x + t_{(y)} t_{(z)} F_z) \\ & \quad - a_z (t_{(x)} t_{(z)} F_x + t_{(y)} t_{(z)} F_y) ] \delta, \end{aligned} \quad (19)$$

其中,  $F$  分别可代表  $E$  和  $H$ ,  $t$  和  $\delta$  的书写均省去了下标.

综合 (15) — (19) 式, 可得

$$\begin{aligned} & -[ t_{(x)} t_{(y)} E_y + t_{(z)} t_{(x)} E_z ] \delta = k^2 fE_x, \\ & -[ t_{(x)} t_{(y)} E_x + t_{(y)} t_{(z)} E_z ] \delta = k^2 fE_y, \quad (20) \\ & -[ t_{(x)} t_{(z)} E_x + t_{(y)} t_{(z)} E_y ] \delta = k^2 fE_z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -[t_{(x)}t_{(y)}H_y + t_{(z)}t_{(x)}H_z] \delta \\
= & k^2 fH_x - \omega \Delta \epsilon St'_{(z)} E_y, \\
& -[t_{(x)}t_{(y)}H_x + t_{(y)}t_{(z)}H_z] \delta \\
= & k^2 fH_y + j\omega \Delta \epsilon S(t'_{(z)} E_x - t'_{(x)} E_z), \\
& -[t_{(x)}t_{(z)}H_x + t_{(y)}t_{(z)}H_y] \delta \\
= & k^2 fH_z + j\omega \Delta \epsilon St'_{(x)} E_y,
\end{aligned} \quad (21)$$

其中  $\Delta \epsilon = \epsilon_f - \epsilon_p$ .

由(20)式分别消去  $E_x$ 、 $E_z$  和  $E_y$  得:

$$\begin{aligned}
& [t_{(x)}t'_{(y)} - k^2 ft_{(x)}] E_y \delta \\
= & [t'_{(x)}t_{(y)} - k^2 ft_{(y)}] E_x \delta, \\
& [t_{(y)}t'_{(z)} - k^2 ft_{(y)}] E_z \delta \\
= & [t'_{(y)}t_{(z)} - k^2 ft_{(z)}] E_y \delta, \\
& [t'_{(x)}t_{(z)} - k^2 ft_{(z)}] E_x \delta \\
= & [t_{(x)}t'_{(z)} - k^2 ft_{(x)}] E_z \delta, \\
& [t_{(x)}t'_{(y)} - k^2 ft_{(x)}] H_y \delta \\
= & [t'_{(x)}t_{(y)} - k^2 ft_{(y)}] H_x \delta \\
& + \omega \Delta \epsilon S[t'_{(z)}t_{(y)} E_y + t_{(x)}(t'_{(z)} E_x - t'_{(x)} E_z)] \delta', \\
& [t_{(y)}t'_{(z)} - k^2 ft_{(y)}] H_z \delta \\
= & [t'_{(y)}t_{(z)} - k^2 ft_{(z)}] H_y \delta \\
& - \omega \Delta \epsilon S[t_{(z)}(t'_{(z)} E_x - t'_{(x)} E_z) - t_{(y)}t'_{(x)} E_y] \delta', \\
& [t'_{(x)}t_{(z)} - k^2 ft_{(z)}] H_x \delta \\
= & [t_{(x)}t'_{(z)} - k^2 ft_{(x)}] H_z \delta \\
& - \omega \Delta \epsilon S[t_{(x)}t'_{(x)} - t_{(z)}t'_{(z)}] E_y \delta',
\end{aligned} \quad (22)$$

$\delta'$  表示关于  $S_{(y,z)}$  函数下标的  $\delta$  函数.

利用正交性,由上两式可以得到如下的矩阵方程:

$$\begin{aligned}
& (|T^x||T^y|^2 - k^2|T^x| \\
& + k^2(1 - \epsilon_r)|D^{ix}|)|A^y| \\
= & (|T^x|^2|T^y| - k^2|T^y| \\
& + k^2(1 - \epsilon_r)|D^{iy}|)|A^x|, \quad (24a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (|T^y||T^z|^2 - k^2|T^y| \\
& + k^2(1 - \epsilon_r)|D^{yz}|)|A^z| \\
= & (|T^y|^2|T^z| - k^2|T^z| \\
& + k^2(1 - \epsilon_r)|D^{zx}|)|A^y|, \quad (24b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (|T^z||T^x|^2 - k^2|T^z| \\
& + k^2(1 - \epsilon_r)|D^{zx}|)|A^x| \\
= & (|T^z|^2|T^x| - k^2|T^x| \\
& + k^2(1 - \epsilon_r)|D^{ix}|)|A^z|, \quad (24c)
\end{aligned}$$

$$(|T^x||T^y|^2 - k^2|T^x|$$

$$\begin{aligned}
& + k^2(1 - \epsilon_r)|D^{ix}|)|B^y| \\
= & (|T^x|^2|T^y| - k^2|T^y| \\
& + k^2(1 - \epsilon_r)|D^{iy}|)|B^x| \\
& + \omega \Delta \epsilon (|D^{ixy}|)|A^y| \\
& + |D^{ixz}|)|A^x| - |D^{ixz}|)|A^z|), \quad (25a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (|T^y||T^z|^2 - k^2|T^y| \\
& + k^2(1 - \epsilon_r)|D^{yz}|)|B^z| \\
= & (|T^y|^2|T^z| - k^2|T^z| \\
& + k^2(1 - \epsilon_r)|D^{yz}|)|B^y| \\
& - \omega \Delta \epsilon (|D^{yzx}|)|A^x| \\
& - |D^{yzx}|)|A^z| - |D^{yzx}|)|A^y|), \quad (25b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (|T^z||T^x|^2 - k^2|T^z| \\
& + k^2(1 - \epsilon_r)|D^{zx}|)|B^x| \\
= & (|T^z|^2|T^x| - k^2|T^x| \\
& + k^2(1 - \epsilon_r)|D^{ix}|)|B^z| \\
& - \omega \Delta \epsilon (|D^{ixz}|)|A^y| - |D^{ixz}|)|A^x|), \quad (25c)
\end{aligned}$$

其中  $T$  是对角矩阵,假定所取最大平面波数为  $(2M + 1) \times (2N + 1)$ ,  $T$  的元素为

$$T_{ij}^{x,y,z} = t_{(x,y,z)} \mathbf{I}_{-M+(i-1)N_1, -N+i-(i-1)N_1N-1} \delta_{ij}, \quad (26)$$

$A$  和  $B$  是列矩阵,代表相应电场和磁场分量,各元素为

$$A(B)_i^{x,y,z} = A(B)_{-M+(i-1)N_1, -N+i-(i-1)N_1N-1}^{x,y,z}, \quad (27)$$

$D$  是满秩矩阵,各元素为

$$\begin{aligned}
& D_{ij}^{ix, iy, iz} \\
= & t_{(x,y,z)} \mathbf{I}_{-M+(i-1)N_1, -N+i-(i-1)N_1N-1} \\
& \times G_{[(j-1)N_1 - (i-1)N_1, i-j - (i-1)N_1N + (j-1)N_1N]} \\
& D_{ij}^{i(x,y,z)}(x,y,z) \\
= & t'_{(x,y,z)} \mathbf{I}_{-M+(j-1)N_1, -N+j-(j-1)N_1N-1} \\
& \times t_{(x,y,z)} \mathbf{I}_{-M+(i-1)N_1, -N+i-(i-1)N_1N-1} \\
& \times G_{[(j-1)N_1 - (i-1)N_1, i-j - (i-1)N_1N + (j-1)N_1N]}. \quad (29)
\end{aligned} \quad (28)$$

将(24)式各项系数矩阵用相应简单的字母来代替,  $| \xi^y || A^y | = | \eta^x || A^x |$ . 显然(27)–(29)式的各个矩阵均是可逆的,因而(25)式各项系数矩阵也是可逆的,整理(24)和(25)式,最后可以得到

$$|M||A^z| = 0, \quad (30)$$

$$|M||B^z| = \omega \Delta \epsilon |N||A^z|, \quad (31)$$

其中

$$\begin{aligned}
|M| = & | \xi^y || \eta^y |^{-1} | \xi^z | \\
& - | \eta^x || \xi^x |^{-1} | \eta^z |, \quad (32)
\end{aligned}$$

$$|N| = \left( |D^{l'zxy}| + |D^{l'sxy}| - |D^{l'xtx}| + |D^{l'zdx}| \right) |\eta^y|^{-1} |\xi^z| + \left( |D^{l'zdx}| - |D^{l'zdx}| \right) |\xi^x|^{-1} |\eta^z| + |D^{l'zdx}| - |D^{l'xtx}|, \quad (33)$$

(30) 式是齐次方程 (31) 式的非齐次方程. 如果向量  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  分别是齐次和非齐次方程的解, 则纵向磁场可以为

$$H_z = \sum_{m,n} b_{m,n} \exp(\mathbf{j}t \cdot \mathbf{r}), \quad (34a)$$

$$H_z = \sum_{m,n} (a_{m,n} + b_{m,n}) \exp(\mathbf{j}t \cdot \mathbf{r}), \quad (34b)$$

(34a) 和 (34b) 式的电磁波纵向场分量具有不同主次, 即一个的纵向磁场分量较大, 另一个较小. 这两种模式为简并模式, 称磁场分量较小的标量场分布模式为 EH 模式, 另一个为 HE 模式.

要使齐次方程 (30) 有解, 必须有

$$\det M = 0, \quad (35)$$

在 (35) 式的基础上, 要使非齐次方程 (31) 有解, 必须有

$$\det N = 0, \quad (36)$$

综合以上两式, 得到 EH (HE) 模式的本征值方程

$$\det \begin{vmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{vmatrix} = 0, \quad (37)$$

(37) 式为光子晶体区域的本征值方程, 然而在求解之前必须先确定  $k_y$  的值. 为了确定  $k_y$  的值, 考查光子晶体  $y$  向外的无界真空区域, 由于电磁波沿  $z$  向传播, 纵向电场可以表示为

$$E_{z(o)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{(n)} \cos(\ell\pi x/a) e^{-\gamma_n y} e^{-j\beta_n z}, \quad (38)$$

其中  $\gamma_n^2 = \beta_n^2 + (\ell\pi/a)^2 - k^2$ .

根据 (38) 式和 (5) 式, 由光子晶体与无界真空边界处切向电场连续的边界条件有

$$A_{(o)n} = e^{\gamma_n y_0} \sum_m A_{(i)m,n} e^{j k_m y_0}, \quad (39)$$

$$B_{(o)n} = e^{\gamma_n y_0} \sum_m B_{(i)m,n} e^{j k_m y_0}, \quad (40)$$

其中  $A$  代表  $z$  向电场分量振幅的大小,  $B$  代表  $x$  向电场分量的大小,  $o$  和  $i$  分别代表无界真空区域和光子晶体区域. 可以看到, 只要光子晶体区域场分量各空间谐波振幅的大小确定了, 则无界真空区域内的相应量也就确定了.

由于混合电磁波模式的六个场分量同时存在, 因此不适用传统阻抗匹配的概念, 传统的阻抗表达式可替代为

$$z = \frac{\sum_{m,n} |E_{(z)m,n}|^2 + |E_{(x)m,n}|^2}{\sum_{m,n} E_{(x)m,n} H_{(z)m,n}^* - E_{(z)m,n} H_{(x)m,n}^*}. \quad (41)$$

在这里, 由于光子晶体结构中场分量之间关系的复杂性, 适用 (40) 式也无法得到一个简洁的表达式来界定  $k_y$  的值. 因此, 计算时, 针对某一传播常数  $\beta_0$ , 可以先为  $k_y$  假定一个初始值, 然后利用 (37) 式求解得到本征频率, 再为光子晶体区域的纵向电场分量的基波分量设一初始值, 利用 (37) 式得到各空间谐波分量的大小, 再利用 (24) 和 (25) 式求解得到其他各场分量空间谐波分量的大小; 在得到了光子晶体区域内各场分量空间谐波分量的大小之后, 利用边界条件 (39) 和 (40) 式计算得到无界空间区域  $z$  向和  $x$  向电场分量各空间谐波分量的值, 再利用无界空间各场分量之间的关系得到所有场分量空间谐波分量的大小, 由于无界空间中各场分量的关系较简单, 并且在一般教科书都已经列出, 因此限于篇幅, 不在这里再次列出. 这样, 光子晶体和无界真空区域的所有场分量的空间谐波分量的大小都已得知, 利用 (40) 式分别计算光子晶体区域和无界真空区域在交界面上的“阻抗”, 在误差范围内判断它们是否相等, 如果相等, 所得到的本征值即为所求, 如果不相等, 重新为  $k_y$  赋值, 重复上述步骤, 迭代计算直至相等.

### 2.3. 二维介质光子晶体作为行波管慢波电路

如图 3 和图 4 所示, 二维光子晶体的缺陷方向与光子晶体均匀方向有相互垂直和平行两种情况. 其中图 3 的结构对应于图 2 所讨论的情况, 图 3 中缺陷内的纵向电场可以表示为

$$E_{z(d)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [C_n \cosh \gamma_n y + D_n \sinh \gamma_n y] \times \cos(\ell\pi x/a) e^{-j\beta_n z}, \quad (42)$$

由 (41) 式可以看到, 缺陷内的电磁波与 2.1 节

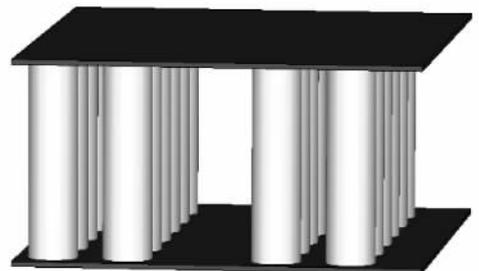


图 3 缺陷方向与光子晶体均匀方向相垂直

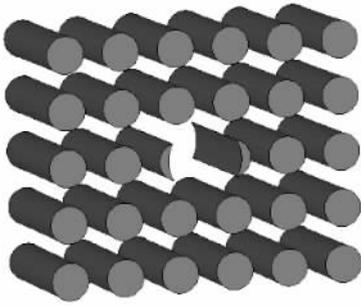


图4 缺陷方向与光子晶体均匀方向相平行

讨论的光子晶体内的电磁波在  $x$  方向具有同样的模式区分度. 由于 EH 与 HE 相简并, 缺陷内的电磁波入射到光子晶体区域以后既可能激励起 EH 模式, 也可能激励起 HE 模式. 因此, 要想电磁波被束缚在缺陷之内(以下称之为缺陷模式), 必然要求缺陷模式的电磁波频段处在由(37)式所确定的 EH 和 HE 模式的共同禁带之内. 由于  $l$  的不同取值对应于不同的缺陷模式, 因此对应于不同的缺陷模式, 有限光子晶体具有不同的带结构.

具有传播常数  $\beta_0$  的电磁波由缺陷入射到光子晶体区域后, 同方向的传播常数的可能值为  $\beta_0 + 2n\pi/p_z$ , 于是, 对应于不同传播常数  $\beta_0$  电磁波具有不同的带结构, 但由于传播常数是传播系统的特征量, 而不是电磁波本身的特征量, 无法保证输入装置耦合入缺陷的电磁波拥有期望的传播常数值, 即系统中传播常数  $\beta_0$  和  $k_y$  具有协商不确定性, 因此一般情况下, 为了保证电磁波被束缚在缺陷之内, 需要电磁波处在对应于任意传播常数  $\beta_0$  的禁带之内.

对于图4的情况, 将(5a)换成如下的形式:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{m,n} &= (t_{(x)}\mathbf{a}_x + t_{(y)}\mathbf{a}_y + t_{(z)}\mathbf{a}_z) \\ &= \mathbf{a}_x\beta_0 + \mathbf{a}_y k_m + \mathbf{a}_z k_n, \end{aligned} \quad (43)$$

其中,  $x$  方向是均匀方向并且是传播方向,  $k_m = 2m\pi/p_y$ ,  $k_n = 2n\pi/p_z$ . 使用(42)式后(37)式便成为图4所示的有限光子晶体的本征值方程.

图4中缺陷内的纵向电场可以表示为

$$\begin{aligned} E_{z(d)} &= \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} [C_m \cosh \tau_m y + D_m \sinh \tau_m y] \\ &\quad \times [C'_n \cosh \tau_n z + D'_n \sinh \tau_n z] e^{-j\beta_0 x}, \end{aligned} \quad (44)$$

其中,  $\tau_m$  和  $\tau_n$  为常数.

比较使用了(42)式后的(5)和(43)式可以知道, 当具有传播常数  $\beta_0$  的电磁波由缺陷入射到光子晶体区域以后, 其传播常数  $\beta_0$  保持不变, 因此对应于

具有不同传播常数  $\beta_0$  的电磁波光子晶体具有不同的带结构. 由于电磁波的传播常数是传输系统的特征量, 而不是电磁波本身的特征量, 因此无法保证由输入装置耦合入缺陷的电磁波具有期望的传播常数值, 也就无法保证它被束缚在缺陷之内传播. 为了解决这一问题, 首先可以考虑设计一种特殊的输入结构, 使得由它所入射的电磁波在光子晶体缺陷区域的传播常数等于缺陷模式的传播常数. 另外, 可以在图4的光子晶体区域中沿均匀方向周期性地安排一电壁, 使由缺陷入射的电磁波在光子晶体区域只能激励起  $\beta_0 = n\pi/p$  的电磁波,  $p$  为周期性电壁的宽度.

由以上分析可知, 不管行波管中光子晶体的具体结构如何, 而只要知道了光子晶体中的各个模式及其带结构, 各具体结构的工作带隙便可以依据具体情况确定下来.

### 3. 数值计算和分析

假定图2中的  $y$  方向存在5个光子晶体周期, 光子晶体柱为方形, 其长和宽均为1 mm, 光子晶体一个周期的长度为  $1.5\mathbf{e}_y + 1.5\mathbf{e}_z$ , 光子晶体柱为真空, 背景材料的相对介电常数为9.5,  $x$  方向的高度为6 mm. 由弗洛奎定理和(3)式可知,  $y$  方向的模式区分度为7, 即(3)式中的  $m$  可以由0取到7.

图5为分别使用本文方法和 HFSS (high frequency structure simulator) 计算  $E_1$  模式的结果. 由于 HFSS 在计算多个模式以后, 计算时间很长, 并且精度下降, 因此这里仅对  $E_1$  这个最低模式进行了对比. 可以看到, 两种方法相差甚微.

图6显示了  $\text{EH}_{11}$  和  $\text{HE}_{11}$  模式的色散曲线. 图6

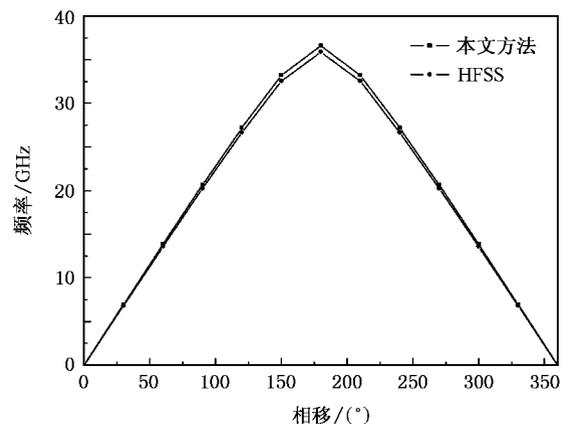


图5 本文方法与 HFSS 的对比

中,按频率由低往高的各条通带分别为  $HE_{11}$  模式和  $EH_{11}$  模式的基本模式、第一和第二高次模式的通带,横坐标为结构  $z$  方向的相移.这里所使用的模式下标的第一个整数代表  $x$  方向的模式识别数,即(4)式中  $l$  的不同取值,第二个整数代表  $y$  方向的模式识别数,即(3)式中  $m$  的不同取值.图7显示了  $EH_{12}$  和  $HE_{12}$  模式的色散曲线.由2.3节的分析可知,对于在图2中设置缺陷,按图3的方式用作行波管慢波电路的情况,缺陷内电磁波入射到光子晶体区域后所激励起的模式的  $y$  向模式识别数,即式(3)中的  $m$  取值不是唯一的,只有由模式  $EH_{1m}$  和  $HE_{1m}$  ( $m = 1, 2, \dots, 7$ ) 共同确定的带隙才可能存在缺陷模式.因此,可以将各个模式绘到一起形成一个三维图,如图8所示.图8为  $HE_{1m}$  的基本模式,图9为  $HE_{1m}$  的第一高次模式.

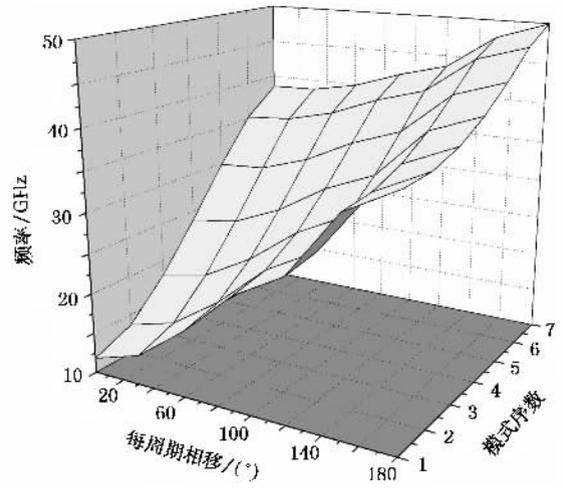


图8  $HE_{1m}$  ( $m = 1, 2, \dots, 7$ ) 的基本模式

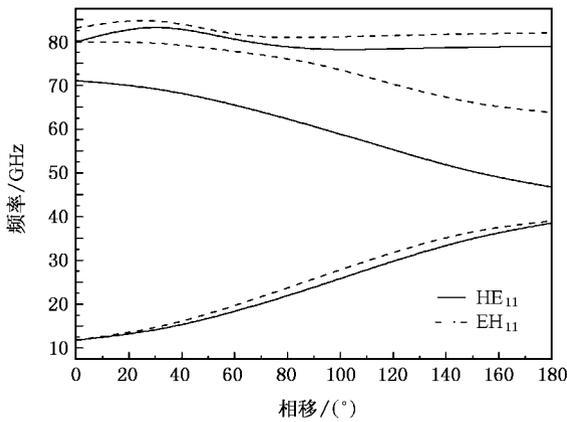


图6  $EH_{11}$  和  $HE_{11}$  模式

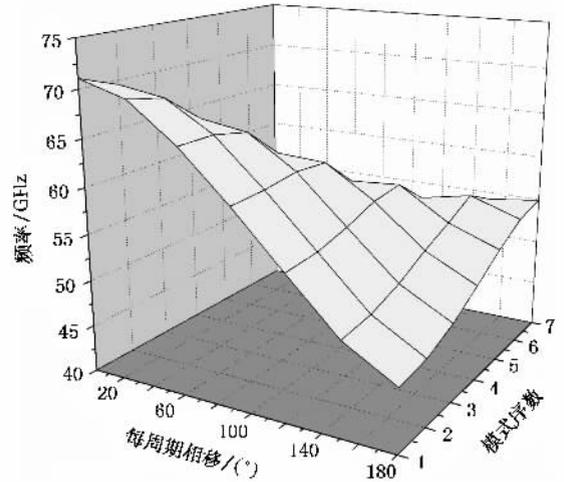


图9  $HE_{1m}$  ( $m = 1, 2, \dots, 7$ ) 的第一高次模式

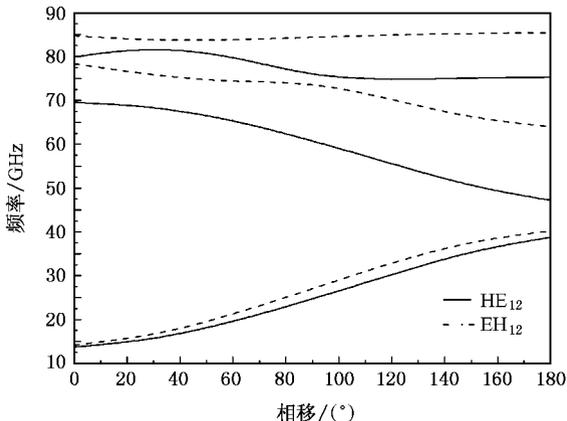


图7  $EH_{12}$  和  $HE_{12}$  模式

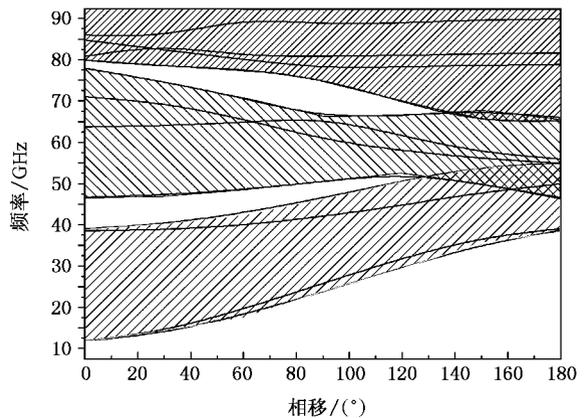


图10  $EH_{1m}$  和  $HE_{1m}$  模式 ( $m = 1, 2, \dots, 7$ ) 的共同带结构

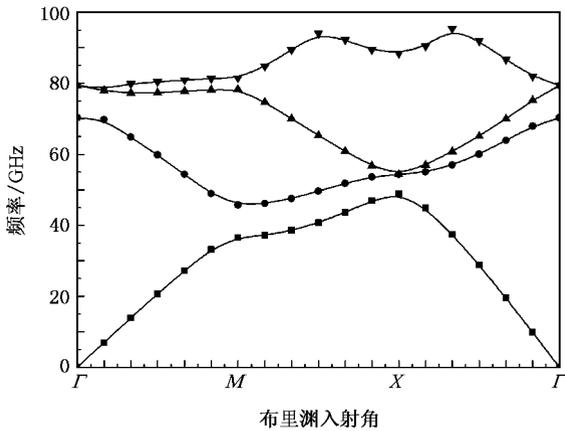
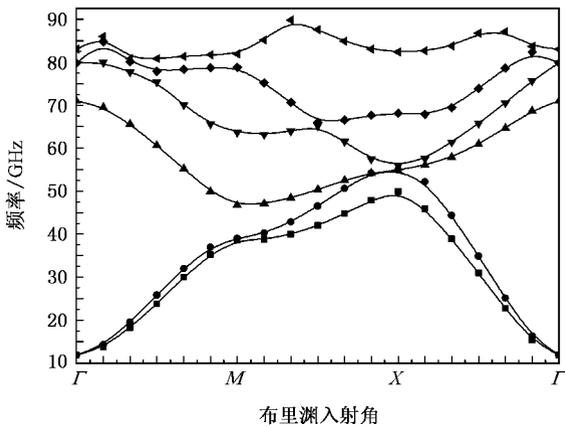


图 11 E 极化的完全带结构

图 12  $EH_1$  和  $HE_1$  模式的共同完全带结构

行波管所利用的模式必须具有纵向电场分量,并且在  $x$  方向的模式识别数为 1,因此这里仅关心  $EH_{1m}$  和  $HE_{1m}$  模式。由于缺陷模式处在  $EH_{1m}$  和  $HE_{1m}$  模式所形成的共同带隙之内,为了方便观察,取  $EH_{1m}$  和  $HE_{1m}$  模式各通带的最低和最高频率绘成二

维图,第  $n$  条通带的最高频率与第  $n+1$  条通带的最低频率之间的带间隙便形成第  $n$  条通带,如图 10 所示。图 10 中,阴影所填充的区域为通带,未填充区域为  $EH_{1m}$  和  $HE_{1m}$  模式所形成的共同带隙。其中,当频率低于 11.83 GHz 时,具有任何传播常数的电磁波不能在光子晶体区域中传播,在其余带隙区域,一定频率的电磁波是否能在光子晶体中传播则视其传播常数而定。理论上,所有带隙都可以被利用为光子晶体行波管的工作频段,然而在高于 11.83 GHz 的带隙区域,则需要设计适当的输入结构以使缺陷中传播的电磁波具有适当的传播常数,从而被束缚在缺陷之内形成工作模式。

图 10 显示,所计算的光子晶体不具有完全带隙,图 11 和图 12 所显示的相同结构的一个周期光子晶体的基于布里渊入射三角的完全带结构也反应了这一现象。因此,不必要求光子晶体具有完全带隙,只要某一光子晶体具有带隙,也可以被利用到行波管中。图 11 为  $E_1$  模式的完全带结构,它与无限光子晶体中的  $E$  极化相对应。

## 4. 结 论

本文研究了开敞结构有限光子晶体中的模式,并针对行波管中的光子晶体计算了开敞结构有限光子晶体的带结构。本文的计算结果得到了 HFSS 的验证。分析和计算表明,开敞结构有限二维介质光子晶体中所能存在的模式包括与均匀方向无关的  $E$  模式,  $EH$  和  $HE$  混合模式;只要结构存在带间隙,一定模式和具有一定传播常数的电磁波便可以束缚在光子晶体缺陷之中,从而可以被利用为光子晶体行波管的工作模式。

- [ 1 ] Yablonovitch E, Gmitter T J 1986 *Phys. Rev. Lett.* **63** 1950
- [ 2 ] Yablonovitch E 1987 *Phys. Rev. Lett.* **58** 2059
- [ 3 ] Willner A E, Feng K M, Cai J, Lee S, Peng J, Sun H 1999 *Quantum Electron* **5** 1298
- [ 4 ] Brown E R, Parker C D, Yablonovitch E 1993 *J. Opt. Soc.* **10** 404
- [ 5 ] Sigalas M M, Biswas R, Ho K M 1996 *Microwave Opt. Technol. Lett.* **13** 205

- [ 6 ] Yang H Y D, Alexopoulos N G, Yablonovitch E 1997 *IEEE Trans. Antennas & Propag.* **45** 185
- [ 7 ] Sirigiri J R 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 5628
- [ 8 ] Evgenya I S, Amit S K, Ivan M 2005 *Phys. Rev. Lett.* **76** 4801
- [ 9 ] Chen C P, Qian B L, Temkin J 2003 *United States Patent of Provisional Application* No: 60/483852
- [ 10 ] Louis J J, Jr Fulton J 2003 *United States Patent of Application* No: 6664734



# Mode and band analysis of finite dielectric photonic crystals<sup>\*</sup>

Yin Hai-Rong<sup>†</sup> Gong Yu-Bin Wei Yan-Yu Yue Ling-Na Lu Zhi-Gang Gong Hua-Rong  
Huang Min-Zhi Wang Wen-Xiang

(*School of Physical Electronics, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 61005, China*)

(Received 5 September 2007; revised manuscript received 27 September 2007)

## Abstract

In this article, dielectric photonic crystals (PhC) with finite dimensions and exposed in air is analyzed for its potential value in traveling wave tubes (TWTs). The modes existing in finite dielectric PhC are EH and HE, and also E if the finite PhC is two-dimensiond. The  $E_1$  mode is the E polarization in infinite dielectric PhC. Calculation shows that only the existence of gaps of pass-bands is necessary for PhC in TWTs, while the complete photonic crystal band gaps are superfluous.

**Keywords** : photonic crystals, eigenvalue equation, traveling wave tubes, band structure

**PACC** : 4270Q, 5270G, 5235H

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 60532010 and 60601005).

<sup>†</sup> E-mail : yhr555@sohu.com