

耦合孔对微波腔的影响研究^{*}

廖 旭[†] 任学藻 周自刚

(西南科技大学理学院, 绵阳 621010)

(2007 年 12 月 14 日收到, 2007 年 12 月 30 日收到修改稿)

从 Maxwell 方程出发, 将微波腔中的实际微波场按其本征模式展开, 进行微波腔的工作特性(如工作频率、场分布等)的研究. 在具体处理过程中, 根据复杂结构微波腔的具体边界, 将微波腔分成规则形状微波腔和非规则(含耦合孔)部分, 建立实际微波腔模式同规则形状微波腔模式之间的场耦合方程, 从而确定耦合孔对微波腔模式的影响, 并对开耦合孔的圆柱腔进行了相应的理论和模拟研究.

关键词: 微波腔, 模式, 场耦合, 圆柱微波腔

PACC: 0200, 4100

1. 引 言

无论是射频加速器, 还是高功率微波, 都要在微波腔上开耦合孔^[1-3], 输入或输出相应的微波, 然而由于耦合孔的关系, 微波腔的频率、场分布和品质因子都要发生变化, 这个变化甚至可以影响到系统的正常工作. 根据微波腔的具体情况, 实际微波腔的边界可以看成闭合规则微波腔边界和不规则边界(耦合边界)两部分组成. 利用电磁场的等效原理可以将不规则边界看作微波腔中的一个驱动源, 微波腔的本征模式由闭合规则边界微波腔决定, 由此根据不规则边界可以建立谐振腔的强迫振荡方程^[4-6], 由强迫振荡方程可以求出不规则边界对微波腔的影响(频率、场分布和品质因子). 本文将耦合孔看成不规则边界, 由此确定耦合孔对微波腔的影响.

2. 谐振腔的强迫振荡方程

根据谐振腔的理论^[7], 微波腔中微波场可按微波腔的本征模式展开(即微波腔中的微波场是微波腔本征模式 $E_n(\mathbf{r})$ 的组合).

$$E(\mathbf{r}, t) = \sum_n A_n(t) E_n(\mathbf{r}), \quad (1)$$

式中展开系数 $A_n(t)$ 是时间的函数, 微波腔中微波

场的瞬态行为可由这些随时间变化的展开系数 $A_n(t)$ 来描述, 展开系数 $A_n(t)$ 受馈送微波功率和 RF 腔束流的影响.

将功率馈送系统以及束流的作用视为微波腔的外加强迫作用, 根据麦克斯韦方程, 可得微波场展开系数 $A_n(t)$ 的强迫振荡方程^[8], 即

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 A_n(t)}{dt^2} + \omega_n^2 A_n(t) \\ &= - \frac{\omega_n}{\sqrt{\epsilon \mu_s}} \int_s (\mathbf{E} \times \mathbf{H}_n) \cdot d\mathbf{s} \\ &+ \frac{1}{\epsilon} \frac{d}{dt} \int_{s'} (\mathbf{H} \times \mathbf{E}_n) \cdot d\mathbf{s} \\ &- \frac{1}{\epsilon} \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_n dV, \quad (2a) \end{aligned}$$

式中 $E_n(\mathbf{r}), H_n(\mathbf{r})$ 是闭合理想边界微波腔的本征模式, ω_n 是微波腔的本征频率.

方程(2a)是处理 RF 腔瞬态问题的基本方程. 方程右边为强迫力, 其中第一项是沿腔的非理想金属表面 s 积分, 表示腔壁损耗对场的影响; 第二项是沿腔壁上开孔处表面 s' 积分, 表示腔与外部系统(如波导)的耦合对场的影响; 第三项表示束流与腔的相互作用, 即束流负载对场的影响.

当耦合波导中只有一种传播模式(如矩形波导中 TE_{01} 模)时, 对方程(2a)进行进一步处理后, 强迫振荡方程可以写为

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 10347009)资助的课题.

[†] E-mail: xkliao@126.com

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 A_n}{dt^2} + \omega_n^2 A_n \\ &= -(1+j) \frac{\omega_n}{Q_{0n}} \frac{dA_n}{dt} + C_0 V_n e^{j\omega t} \\ & - \frac{V_n}{\epsilon Z_g} \sum \left(V_{n'} \frac{dA_{n'}}{dt} \right) + \frac{1}{\epsilon} \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_n dV. \quad (2b) \end{aligned}$$

方程(2b)右边是强迫振荡方程的强迫力,第一项表示腔壁损耗对场的影响;第二项是经耦合窗进入 RF 腔的微波,第三项是由 RF 腔反射回波导的微波,第四项表示束流与腔的相互作用(即束流负载效应); $C_0 = j2\omega H_0/\epsilon Z_g$ 是一个依赖于入射波的振幅及频率的参数.

方程(2b)中, V_n 是偶合面 s' 上,腔的本征模式电场 \mathbf{E}_n 与波导模式 e 的关系(在文中定义为耦合因子),不考虑耦合窗介质的影响时,则

$$V_n = \int_{s'} \mathbf{e} \cdot \mathbf{E}_n ds. \quad (3)$$

Z_g 是耦合波导阻抗,只考虑耦合波导的 TE_{01} 模传播模式时,波导阻抗为

$$Z_g = \eta_0 \sqrt{1 - \lambda_g/\lambda},$$

λ_g 为波导截止波长.

根据闭合理想边界微波腔的本征模式 $\mathbf{E}_n(\mathbf{r})$ 和本征频率 ω_n ,由强迫振荡方程(2b)可以确定微波腔中微波场的展开系数 A_n 和微波腔的频率,根据(1)式就可确定微波腔中微波场.由于闭合理想边界微波腔有无限多个本征模式,不可能将在闭合理想边界 RF 腔所有的本征模式都考虑,实际上只有靠近微波腔工作频率的模式对实际 RF 腔的影响较大,而其他远离工作频率的模式影响较小,当模式频率与工作频率相差到一定程度时,非工作模式影响可以忽略,因而在处理强迫振荡方程时,通常只考虑靠近微波腔工作频率附近的模式.

从理论上讲,由强迫振荡方程(2b)确定微波腔中微波场的展开系数 A_n 和微波腔的频率,根据(1)式就可确定微波腔中微波场.但是由于微波腔复杂的具体结构,使得微波腔本征模式 $\mathbf{E}_n(\mathbf{r})$ 的求解很困难,同时强迫振荡方程涉及到理想微波腔的本征模式 $\mathbf{E}_n(\mathbf{r})$,也使得求解强迫振荡方程很困难.

3. 耦合孔同微波腔之间的耦合方程

为了研究耦合孔对微波腔频率的影响,假设微波腔为理想金属表面,在耦合波导中无微波功率馈

入,微波腔中无电荷,则强迫振荡方程(2b)可以写为

$$\frac{d^2 A_n}{dt^2} + \omega_n^2 A_n = - \frac{V_n}{\epsilon Z_g} \sum \left(V_{n'} \frac{dA_{n'}}{dt} \right). \quad (4)$$

稳态时,方程(4)可以表示为

$$(\omega_n^2 - \omega^2) A_n = - j\omega \frac{V_n}{\epsilon Z_g} \sum (V_{n'} A_{n'}). \quad (5)$$

从理论上讲,由方程(5)可以确定微波腔中微波场的展开系数 A_n 和微波腔的频率,并根据(1)式就可确定开耦合孔后微波腔本征场.由于微波腔的本征模式是无限个,因而完全精确求解方程也很困难,而实际上微波腔工作在一个模式或频率上,对微波腔工作有影响的也只有模式同时也不是无限个.根据微波腔的情况,假设有 n 个模式对微波腔的工作有影响,由方程可以看出, n 个微波腔模式在开耦合孔后线性组合,构成微波腔在开耦合孔后的 n 个新模式.

4. 耦合分析

根据模式理论,考虑的模式越多(n 越大)就越能精确求解耦合孔对微波腔频率的影响.为了数学求解耦合孔对微波腔频率的影响,在这里只考虑工作模式的影响,而忽略其他模式的影响,则耦合方程(5)可以表示为

$$(\omega_1^2 - \omega^2) A_1 = - j \frac{\omega V_1^2}{\epsilon Z_g} A_1, \quad (6)$$

由于 $\omega_1 \gg \frac{V_1^2}{\epsilon Z_g}$, 则

$$\omega = \omega_1 + j \frac{V_1^2}{2\epsilon Z_g}. \quad (7)$$

根据线路理论,微波腔的 Q 值为

$$Q = \omega_1 \frac{2\epsilon Z_g}{V_1^2}. \quad (8)$$

由此可以看出,通过耦合因子可以求得微波腔的 Q 值,同时考虑两个模式的影响时,则耦合方程为

$$(\omega_1^2 - \omega^2) A_1 + j \frac{\omega V_1}{\epsilon Z_g} V_2 A_2 = - j \frac{\omega V_1^2}{\epsilon Z_g} A_1, \quad (9a)$$

$$(\omega_2^2 - \omega^2) A_2 + j \frac{\omega V_2}{\epsilon Z_g} V_1 A_1 = j \frac{\omega V_2^2}{\epsilon Z_g} A_2. \quad (9b)$$

由于忽略其他模式的影响,微波腔本征频率可以表示为一个复数频率,令

$$\omega_{10} = \omega_1 + j \frac{V_1^2}{2\epsilon Z_g},$$

$$\omega_{20} = \omega_1 + j \frac{V_1^2}{2\varepsilon Z_g},$$

进一步近似处理,可得

$$(\omega_{10}^2 - \omega^2)A_1 + j \frac{\omega V_1}{\varepsilon Z_g} V_2 A_2 = 0,$$

$$(\omega_{20}^2 - \omega^2)A_2 + j \frac{\omega V_2}{\varepsilon Z_g} V_1 A_1 = 0.$$

在考虑其他模式影响后,开耦合孔后微波腔的频率为

$$\omega'_1 \approx \omega_{10} - \frac{V_1 V_2}{\omega_1 (\varepsilon Z_g)^2} \frac{\omega_2^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2}, \quad (10a)$$

$$\omega'_2 \approx \omega_{20} + \frac{V_1 V_2}{\omega_2 (\varepsilon Z_g)^2} \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2}. \quad (10b)$$

分别对应的微波场模式为

$$\begin{aligned} E'_1(\mathbf{r}) &= E_1(\mathbf{r}) \\ &- j \frac{(\omega_{10}^2 - \omega_1'^2)}{\omega_1'} \frac{\varepsilon Z_g}{V_1 V_2} E_2(\mathbf{r}), \quad (11a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E'_2(\mathbf{r}) &= E_2(\mathbf{r}) \\ &- j \frac{(\omega_{20}^2 - \omega_2'^2)}{\omega_2'} \frac{\varepsilon Z_g}{V_1 V_2} E_1(\mathbf{r}). \quad (11b) \end{aligned}$$

由式可知,由于耦合孔,微波腔的模式(即场分布)发生变化,微波腔的频率也发生变化,频率低的模式,频率进一步降低,当耦合孔较小时,该模式的频率降低为

$$\Delta\omega_1 \approx \frac{V_1 V_2}{\omega_1 (\varepsilon Z_g)^2} \frac{\omega_2^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2}. \quad (12)$$

对应的微波场模式为

$$\begin{aligned} E'_1(\mathbf{r}) &= E_1(\mathbf{r}) - j2\Delta\omega_1 \frac{\varepsilon Z_g}{V_1 V_2} E_2(\mathbf{r}) \\ &= E_1(\mathbf{r}) - j \frac{2}{\omega_1} \frac{\omega_2^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \frac{1}{\varepsilon Z_g} E_2(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

频率高的模式,频率提高,当耦合孔较小时,该模式的频率提高为

$$\Delta\omega_2 \approx \frac{V_1 V_2}{\omega_2 (\varepsilon Z_g)^2} \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2}. \quad (13)$$

对应的微波场模式为

$$\begin{aligned} E'_2(\mathbf{r}) &= E_2(\mathbf{r}) - j2\Delta\omega_2 \frac{\varepsilon Z_g}{V_1 V_2} E_1(\mathbf{r}) \\ &= E_2(\mathbf{r}) - j \frac{2}{\omega_2} \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \frac{1}{\varepsilon Z_g} E_1(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

通过前面分析可以看出,耦合孔的影响有三个: 1) 影响 Q 值 2) 影响微波腔频率, 决定于耦合强度, 3) 影响微波腔模式场分布, 主要决定于相邻模式的频率差。

5. 开耦合孔的圆柱腔

5.1. 微波腔本征模式同耦合波导之间的耦合

为了进行数学求解处理,在这里考虑开耦合孔圆柱腔微波腔(圆柱腔半径 R , 长为 L)的情况,实际 RF 腔的边界可以等效成闭合圆柱微波腔边界和耦合波导两部分组成(如图 1). 耦合波导(波导宽边长为 a , 窄边 b)中只有一种传播模式(矩形波导中的 TE_{01} 模),则波导模式为

$$e = \frac{2}{ab} \cos\left(\frac{\pi z}{2a}\right)x,$$

在这种情况下,耦合波导同圆柱腔中 TE 模之间的耦合为 0, 只存在同 TM 模之间耦合。

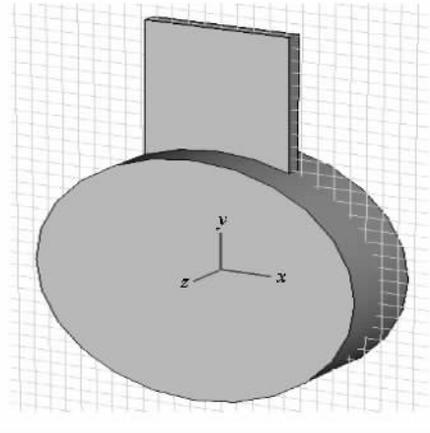


图 1 开耦合孔圆柱腔 RF 腔模型

圆柱微波腔的 TM 模式可以表示为

$$\begin{aligned} H_\theta(mnp) &= H_{mn} J_{m+1}(k_m r) \\ &\times \cos(m\theta) \cos\left(\frac{(2p+1)\pi z}{L}\right), \quad (14) \end{aligned}$$

式中

$$H_{mn} = \sqrt{\frac{2}{\pi L R^2 J_2^2(k_{mn} R)}}.$$

相应的频率为

$$\omega = c \sqrt{k_{mn}^2 + \left(\frac{(2p+1)\pi}{L}\right)^2}. \quad (15)$$

利用电磁场的等效原理可得,在耦合孔处,本征模式电场 E_n 的 z 向分量 E_{nz} 为

$$E_{nz} = \frac{\eta_0}{2} H_{mn} J_{m+1}(k_m R) \cos\left(\frac{(2p+1)\pi z}{L}\right) \cos(m\theta). \quad (16)$$

在不考虑耦合窗介质的影响时,根据偶面 s'

上,腔的本征模式电场 E_n 与波导模式 e 的关系,

$$V_n = \int_s \mathbf{e} \cdot \mathbf{E}_n ds,$$

可得

$$V_n = \frac{\eta_0}{ab} H_n J_1(k_m R) \times \int_s \cos \frac{\pi}{2a} z \cos \frac{(2p+1)\pi}{L} z \cos(m\theta) ds, \quad (17)$$

$$V_n = \frac{\eta_0 B}{2ab} H_n J_1(k_m R) \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2a} - \frac{(2p+1)\pi}{L}\right)a}{\frac{\pi}{2a} - \frac{(2p+1)\pi}{L}} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2a} + \frac{(2p+1)\pi}{L}\right)a}{\frac{\pi}{2a} + \frac{(2p+1)\pi}{L}} \right] \times 2R \frac{\sin\left(m \frac{b}{R}\right)}{m}. \quad (18)$$

由此根据 (18) 式可以计算出微波腔中各个模式同耦合波导之间的耦合 V_n , 由 (5) 式求出开耦合孔圆柱腔的实际微波本征模式和由 (8) 式给出其品质因子.

5.2. 实例分析

如图 1 圆柱腔 $R = 10 \text{ cm}$, $L = 6 \text{ cm}$ 耦合波导参数为 $a = 9 \text{ cm}$, $b = 1 \text{ cm}$, 工作模式 TM_{020} 模. 图 2 为工作模式场分布^[9], 由图可以看出工作模式为 TM_{020} 模. 图 3 为微波腔的谐振特性, 给出了实际微波腔中各个模式的模拟频率.

(15) 式给出了各个模式未考虑耦合时的理论频

表 1 微波腔中各个模式的理论频率、耦合 V_n 、模拟频率和修正频率

模式	TM_{010}	TM_{110}	TM_{210}	TM_{020}	TM_{310}	TM_{120}	TM_{410}
理论频率/GHz	1.149	1.850	2.460	2.675	3.048	3.352	3.624
耦合 V_n	波导截止	0.015	0.018	0.020	0.010	0.018	0.008
模拟频率		1.824	2.447	2.627	3.037	3.336	3.611
修正频率		1.830	2.450	2.640	3.037	3.334	3.620

注 耦合波导 ($a = 9 \text{ cm}$, $b = 1 \text{ cm}$).

6. 结 论

将开耦合孔的圆柱腔等效为规则圆柱微波腔和耦合孔两部分, 把耦合孔看作激励源, 通过建立实际微波腔模式同圆柱微波腔模式之间的耦合方程, 研

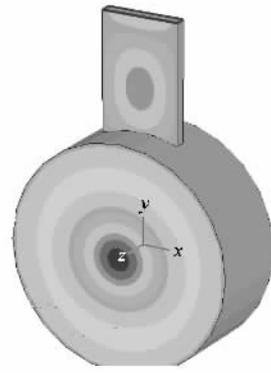


图 2 微波腔工作模式场分布 (TM_{020} 模)

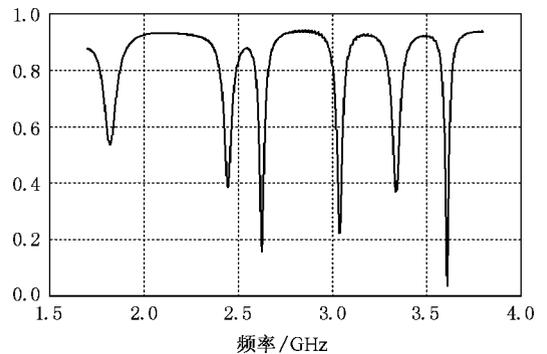


图 3 微波腔的模拟谐振特性

率 (18) 式给出了各个模式同耦合波导之间的耦合 V_n , 由此可计算出有耦合孔时微波腔中各个模式的谐振频率 (下称修正频率). 表 1 为上述微波腔中各个模式的理论频率、修正频率和模拟频率的对比. 通过比较可以看出, 尽管这三个频率比较接近, 由于考虑了耦合波导的影响, 修正频率更加接近模拟结果.

究了耦合孔对微波腔模式的影响. 结果表明: 由于考虑了耦合孔的影响, 计算出的修正频率与单纯圆柱微波腔的理论频率存在一定的差异, 耦合孔对谐振频率的影响较为明显. 软件模拟表明, 实际微波腔的模拟频率与考虑耦合孔时的修正频率基本趋于一致.

- [1] Li Z H ,Chang A B ,Ju B Q 2007 *Acta Phys . Sin .* **56** 2603 (in Chinese)[李正红、常安碧、鞠炳全 2007 物理学报 **56** 2603]
- [2] Xie H Q ,Liu P K 2006 *Chinese Physics* **15** 2402
- [3] Xie H Q ,Liu P K 2007 *Chinese Physics* **16** 766
- [4] Li Z H ,Huang H ,Meng F B 2005 *Acta Phys . Sin .* **54** 1564 (in Chinese)[李正红、黄 华、孟凡宝 2005 物理学报 **54** 1564]
- [5] Huang H ,Fan Z K ,Tan J *et al* 2004 *Acta Phys . Sin .* **53** 1129 (in Chinese)[黄 华、范植开、谭 杰等 2004 物理学报 **53** 1129]
- [6] Zhu M ,Wu H S 1987 *Acta Electronics* **4** 8 (in Chinese)[朱 敏、吴鸿适 1987 电子学报 **4** 8]
- [7] Wang S H ,Luo Z H ,Luo Y X 1980 *Principle of Linac for Proton* (Beijing : Atomic Energy Press) p143 (in Chinese)[王书鸿、罗紫华、罗应雄 1980 质子直线加速器原理(北京 :原子能出版社) 第 143 页]
- [8] Wu H S 1986 *Principle of Microwave Electronics* (Beijing : Science Press) p250 (in Chinese)[吴宏适 1986 微波电子学原理(北京 :科学出版社) 第 250 页]
- [9] Li Z H 2000 *Ph . D . Thesis* (Mianyang ,CAEP)(in Chinese)[李正红 2000 博士论文(绵阳 :中国工程物理研究院研究生部)]

Study on the influence of the coupling hole on RF cavity^{*}

Liao Xu[†] Ren Xue-Zao Zhou Zi-Gang

(Science College ,Southwest University of Science and Technology ,Mianyang 621010 ,China)

(Received 14 December 2007 ; revised manuscript received 30 December 2007)

Abstract

The RF field in the RF cavity can be expressed by the modes of the cavity. And the characters of the cavity is determined by such modes as the frequency and field. In the paper ,an actual cavity is divided into two parts : the normal part (such as a normal cylindrical cavity) and the abnormal part (including a coupling hole). According to Maxwell theory ,there exists a coupling equation between the modes of normal part and the modes of the cavity. So the influence of the coupling hole can be studied. Utilizing the method ,an L-band cylindrical cavity with a coupling hole is studied ,the calculated frequency of the working mode is very close to the simulated value.

Keywords : RF cavity , mode , couple , cylindrical cavity

PACC : 0200 , 4100

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10347009).

[†] E-mail : xkliao@126.com