第 57 卷 第 7 期 2008 年 7 月
1000-3290/2008/57(07)/3978-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.57, No.7, July, 2008

有限温度下的二维暗能量星模型*

邓 强† 颜 骏

(四川师范大学物理系,成都 610066)

(2007 年 11 月 29 日收到;2007 年 12 月 28 日收到修改稿)

研究了具有奇异物质作用的二维暗能量星模型,推导出了场方程和星体平衡方程,并获得了一些解析解,计算出了星体质量.另外,还研究了温度对星体质量的影响,发现几种情况下星体总质量都具有上限.

关键词:暗能量星,奇异物质,有限温度

PACC:0420,0490,9760

1. 引 言

通常认为,由于宇宙中恒星质量的不同,恒星演化有三种最终状态——白矮星、中子星和黑洞[1],其中白矮星和中子星的存在都已得到天文观测证实,而黑洞虽然有一些天体作为候选者,但其重要特征——事件视界暂时还没有观测证据[2],因此人们猜测星体引力塌缩后可能存在其他最终状态,如暗能量星[3—5],暗星[6]及非塌缩尘埃球[7]等.近年来,由于对 Ia 型超新星的观测[8,9]和宇宙微波背景辐射[10]都证明宇宙在加速膨胀,而暗能量被认为是加速膨胀的最可能推动者,因此 Chapline 等人提出宇宙中可能存在暗能量星[3,4],且星体内的真空能密度大于宇宙中的真空能密度,由于暗能量和奇异物质产生的等效斥力作用,阻止了星体进一步的引力塌缩,就可能形成各种不同形式的暗能量星.

本文即构造一个新的暗能量星模型,把标量场 ϕ 作为暗能量,研究普通或奇异物质与暗能量共同作用下的静态暗能量星,由于真实的四维星体模型比较复杂,因此先研究二维时空[11—14]中的暗能量星,推导出场方程和星体平衡方程,并求出解析解和星体质量,讨论了温度 T 对总质量的影响,为真实的四维模型提供对比和参考.

2. 有限温度下的二维引力模型

二维 Brans-Dicke 引力作用量为[13]

$$S=\int \mathrm{d}^2 x\sqrt{-g}\Big[\phi R+V(\phi,T)-\frac{\omega}{\phi}\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi+S_{\mathrm M}\Big], \tag{1}$$

对 ϕ 变分得标量场方程

$$R+\frac{\partial V(\phi,T)}{\partial\phi}-\frac{\omega}{\phi^2}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi+\frac{2\omega}{\phi}\Box\phi=0, \tag{2}$$

对 $g^{\mu\nu}$ 变分得 Einstein 场方程

$$\begin{aligned}&\phi\Big(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\Big)-\nabla_\mu\nabla_\nu\phi+g_{\mu\nu}\Box\phi-8\pi T_{\mu\nu}\\&=\frac{1}{2}g_{\mu\nu}V(\phi,T)+\frac{\omega}{\phi}\\&\times\Big(\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla_\sigma\phi\nabla^\sigma\phi\Big),\end{aligned} \tag{3}$$

式中 $g_{\mu\nu}$ 为时空度规,$g=\det(g_{\mu\nu})$,R 为标量曲率,$\phi=\phi(x)$ 为标量场,$T=T(x)$ 为星体温度,x 即点到星体中心的距离,$V(\phi,T)$ 为标量场的势能,ω 为耦合常数,$S_{\mathrm M}$ 为物质作用量.静态球对称度规在二维情形下的形式为

$$g_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}-\alpha(x) & 0\\ 0 & \alpha^{-1}(x)\end{pmatrix}, \tag{4}$$

这里 $\alpha(x)$ 为标度因子.由(4)式可得

$$R_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\alpha\alpha'' & 0\\ 0 & -\frac{\alpha''}{2\alpha}\end{pmatrix}, R=-\alpha''. \tag{5}$$

本文中 α' 代表 α 对 x 求导数,α'' 代表 α 对 x 求二阶导数,ϕ',ϕ'',p' 等符号亦如此.物质的能量–动量张

* 四川师范大学自然科学基金(批准号:061k004)资助的课题.

† E-mail:sicnudq@yahoo.com.cn

量取理想流体形式

$$T_{\mu\nu} = (p+\rho)u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}, \tag{6}$$

其中 p 为物质压强,ρ 为物质密度.(6)式中四速度 u_μ 满足条件

$$g^{\mu\nu}u_\mu u_\nu = -1. \tag{7}$$

在星体中心坐标系中,星体处于静止状态,因此 $u_1 = u_x = 0$,代入(7)式得

$$u_0 = u_t = \sqrt{\frac{-1}{g^{00}}} = \sqrt{\alpha}, \tag{8}$$

把 u_1, u_0 代入(6)式得

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho\alpha & 0 \\ 0 & \dfrac{p}{\alpha} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

(5)和(9)式代入(2)和(3)式得二维引力场基本方程组

$$8\pi\rho + \frac{\omega}{2\phi}\alpha\phi'^2 + \frac{1}{2}\alpha'\phi' + \alpha\phi'' = \frac{1}{2}V(\phi,T), \tag{10}$$

$$8\pi p + \frac{\omega}{2\phi}\alpha\phi'^2 - \frac{1}{2}\alpha'\phi' = -\frac{1}{2}V(\phi,T), \tag{11}$$

$$-\phi\alpha'' + \phi\frac{\partial V(\phi,T)}{\partial\phi} = \frac{\omega}{\phi}\alpha\phi'^2 - 2\omega\alpha'\phi' - 2\omega\alpha\phi''. \tag{12}$$

由(10),(11)和(12)式得

$$(p+\rho) + \left(2p' + \frac{T'}{8\pi}\frac{\partial V}{\partial T}\right)\frac{\alpha}{\alpha'} = 0. \tag{13}$$

星体中物质的物态方程设为

$$p = \gamma\rho. \tag{14}$$

下面研究方程组(10),(11),(13)及(14)式的解并讨论其物理意义.

3. 场方程的静态解与暗能量星的质量

不失一般性,我们取势能 $V(\phi,T) = -2T\phi$. 设 $\alpha = \alpha_0 e^{mx}$, $T = T_0 e^{tx}$, $\phi = \phi_0 e^{nx}$,并设 $\rho = \rho_0 e^{kx}$, $p = \gamma\rho_0 e^{kx}$,其中 T_0 与 ρ_0 恒为正.把各量表达式代入(10),(11)及(13)式,由各项指数相等得

$$t = m, k = m + n, \tag{15}$$

因此各物理量的表达式可写为

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 e^{mx}, \\ T &= T_0 e^{mx}, \\ \phi &= \phi_0 e^{nx}, \\ \rho &= \rho_0 e^{(m+n)x}, \\ p &= \gamma\rho_0 e^{(m+n)x}, \end{aligned} \tag{16}$$

其中边界条件要求 $m<0$, $m+n<0$,且 $|mR|\gg1$, $|nR|\gg1$, $|(m+n)R|\gg1$,这里 R 为星体半径.由方程(10),(11)和(13)式两边系数相等得

$$\begin{aligned} E_0(1-\gamma) + 2n(m+n) &= -2T_M^2 h, \\ \gamma E_0 + \omega n^2 - mn &= T_M^2 h, \\ mE_0(\gamma+1) + 2\gamma E_0(m+n) &= 2mT_M^2 h, \end{aligned} \tag{17}$$

(17)式中 $E_0 = 16\pi\rho_0/\phi_0\alpha_0$, $h = |\alpha_0|/\alpha_0$, $T_M^2 = 2T_0/|\alpha_0|$(其中中心约化温度 $T_M > 0$),以下讨论两种特殊情况下方程组(17)的解.

3.1. $m = n$ 时方程组的解及讨论

$m = n$ 时,设 $\alpha_0 > 0$,则 $h = 1$,代入方程组(17)得

$$m = -\frac{T_M}{\sqrt{3\omega - 1}}, \tag{18}$$

$$\omega = -\frac{\gamma}{2\gamma+1}, \tag{19}$$

$$\frac{T_M^2}{E_0} = \frac{1}{2}(5\gamma+1). \tag{20}$$

由(18)和(19)式可得 $\omega > 1/3$, $-1/2 < \gamma < -1/5$,这时物质处于奇异流体状态.由(20)式可得 $E_0 < 0$,因此 $\phi_0 < 0$,标量场 ϕ 恒为负.下面计算总能量密度 ρ_{eff} 和总压强 p_{eff},由(10),(11)式得

$$\rho_{eff} = \rho + \rho_\phi = \rho + \frac{\omega\alpha}{16\pi\phi}\phi'^2 + \frac{T\phi}{8\pi}, \tag{21}$$

$$p_{eff} = p + p_\phi = \gamma\rho + \frac{\omega\alpha}{16\pi\phi}\phi'^2 - \frac{T\phi}{8\pi}. \tag{22}$$

把(16),(19)和(20)式代入(21)与(22)式并化简得

$$\rho_{eff} = 3\left(\gamma + \frac{1}{2}\right)\rho_0 e^{2mx}, \tag{23}$$

$$P_{eff} = -\left(\gamma + \frac{1}{2}\right)\rho_0 e^{2mx}. \tag{24}$$

可见总能量密度 $\rho_{eff} > 0$,总压强 $p_{eff} < 0$,而总状态方程参量

$$w = \frac{p_{eff}}{\rho_{eff}} = -\frac{1}{3} < 0, \tag{25}$$

可见暗能量的存在使星体总体上处于负状态参量的状态,这有别于普通物质组成的星体.下面计算暗能量星的总质量,由(21)式,总质量

$$M = \int_0^R \rho_{eff} dx = \int_0^R 3\left(\gamma + \frac{1}{2}\right)\rho_0 e^{2mx} dx, \tag{26}$$

将场方程解(18),(19)式代入得

$$M = \frac{3}{4}g(\gamma)\frac{\rho_0}{T_M}\left(1 - e^{-2f(\gamma)T_M R}\right), \tag{27}$$

其中

$$f(\gamma)=\sqrt{-\frac{2\gamma+1}{5\gamma+1}},$$

$$g(\gamma)=\sqrt{-(5\gamma+1)(2\gamma+1)}.$$

由(27)式得

$$\frac{\partial M}{\partial T_{\mathrm{M}}}=\frac{3g(\gamma)\rho_0}{4T_{\mathrm{M}}^2}\times\left[(1+2T_{\mathrm{M}}f(\gamma)R)\mathrm{e}^{-2T_{\mathrm{M}}f(\gamma)R}-1\right],\qquad(28)$$

由于$(1+2T_{\mathrm{M}}f(\gamma)R)\mathrm{e}^{-2T_{\mathrm{M}}f(\gamma)R}-1=0$只有唯一解$T_{\mathrm{M}}=0$,但这导致(28)式无意义,且星体中心温度总为有限值,因此有$\partial M/\partial T_{\mathrm{M}}\neq0$.由(28)式得

$$\lim_{T_{\mathrm{M}}\to0^+}\frac{\partial M}{\partial T_{\mathrm{M}}}=-\frac{3}{2}g(\gamma)\rho_0f^2(\gamma)R^2<0,\qquad(29)$$

又因$\partial M/\partial T_{\mathrm{M}}$在$T_{\mathrm{M}}>0$时连续,所以始终为负,即星体质量随中心约化温度$T_{\mathrm{M}}$增大而减小,由(27)式得,临界质量

$$M_{\mathrm{C}}=\lim_{T_{\mathrm{M}}\to0^+}M(T_{\mathrm{M}})=\frac{3}{2}(2\gamma+1)\rho_0R,\qquad(30)$$

所以星体质量具有上限M_{C}.

3.2. $m\neq n$, $E_0=T_{\mathrm{M}}^2$ 时方程组的解及讨论

$E_0=T_{\mathrm{M}}^2$时,$E_0>0$,由(17)式得如下解.

第一种情况 当$\alpha_0<0$时,有$h=-1$,$\phi_0<0$,由(17)式可得场方程解为(考虑到$m<0$,$m+n<0$)

$$\omega=-\frac{2(2\gamma+3)}{3(\gamma+1)},\qquad(31)$$

$$m_1=\frac{2}{3}\gamma\sqrt{\frac{3}{2(\gamma+3)}}T_{\mathrm{M}},\qquad(32)$$

$$n_1=-(\gamma+1)\sqrt{\frac{3}{2(\gamma+3)}}T_{\mathrm{M}}.\qquad(33)$$

其中由$E_0>0$可得$\gamma>-3$.

第二种情况 当$\alpha_0>0$时,有$h=1$,$\phi_0>0$,由(17)式可得场方程另一组解为(考虑到$m<0$,$m+n<0$)

$$\omega=-\frac{2(2\gamma^2-5\gamma+1)}{(\gamma-3)(3\gamma-1)},\qquad(34)$$

$$m_2=-2\gamma\sqrt{\frac{(\gamma-3)}{2(\gamma-3)(3\gamma-1)}}T_{\mathrm{M}},\qquad(35)$$

$$n_2=\sqrt{\frac{(\gamma-3)(3\gamma-1)}{2(\gamma-1)}}T_{\mathrm{M}}.\qquad(36)$$

其中由$E_0>0$得$\gamma>3$或$1/3<\gamma<1$.下面计算总能量密度和总压强,由(21)式得

$$\rho_{\mathrm{eff}}=\begin{cases}-\rho_0\dfrac{(2\gamma+3)(\gamma+1)}{\gamma+3}\mathrm{e}^{(m_1+n_1)x}, & (h=-1\text{时}),\\ -\rho_0\dfrac{(\gamma-3)(2\gamma-1)}{\gamma-1}\mathrm{e}^{(m_2+n_2)x}. & (h=1\text{时}),\end{cases}\qquad(37)$$

可见,标量场为负($h=-1$)时,须有$-3/2<\gamma<-1$才能保证总能量密度ρ_{eff}恒为正,因此$h=-1$时应限制$-3/2<\gamma<-1$,这时物质处于奇异流体状态;而标量场为正($h=1$)时,满足条件$1/3<\gamma<1/2$才保证ρ_{eff}为正,因此$h=1$时应限制$1/3<\gamma<1/2$,这时物质处于正常流体状态.由(22)式得

$$p_{\mathrm{eff}}=\begin{cases}-\rho_0\dfrac{\gamma(\gamma+1)}{\gamma+3}\mathrm{e}^{(m_1+n_1)x}<0, & (h=-1\text{时}),\\ -\rho_0\dfrac{\gamma(\gamma-3)}{\gamma-1}\mathrm{e}^{(m_2+n_2)x}<0, & (h=1\text{时}),\end{cases}\qquad(38)$$

可见,无论标量场为正为负,总压强p_{eff}都为负.总状态方程参量

$$w=\frac{p_{\mathrm{eff}}}{\rho_{\mathrm{eff}}}=\begin{cases}\dfrac{\gamma}{2\gamma+3}, & (h=-1\text{时}),\\ \dfrac{\gamma}{2\gamma-1}. & (h=1\text{时}),\end{cases}\qquad(39)$$

可见总状态方程参量w始终为负.下面计算暗能量星的总质量

$$M=\int_0^R\rho_{\mathrm{eff}}\mathrm{d}x,$$

将两种情况下的ρ_{eff}代入M得

$$M_i=-\frac{\rho_0k_i(\gamma)}{f_i(\gamma)T_{\mathrm{M}}}(1-\mathrm{e}^{f_i(\gamma)RT_{\mathrm{M}}}),\qquad(40)$$

其中,

$$k_1(\gamma)=-(2\gamma+3)(\gamma+1)/(\gamma+3),$$

$$k_2(\gamma)=-(\gamma-3)(2\gamma-1)/(\gamma-1),$$

$$f_1(\gamma)=-\sqrt{3(\gamma+3)/2}/3,$$

$$f_2(\gamma)=-\sqrt{(\gamma-3)(\gamma-1)/(2(3\gamma-1))},$$

$i=1,2$分别对应$h=-1,1$,由(40)式得

$$\frac{\partial M_i}{\partial T_{\mathrm{M}}}=\frac{\rho_0k_i(\gamma)}{f_i(\gamma)T_{\mathrm{M}}^2}\times\left[(T_{\mathrm{M}}f_i(\gamma)R-1)\mathrm{e}^{T_{\mathrm{M}}f_i(\gamma)R}+1\right].\qquad(41)$$

$h=-1$(即$i=1$)时,与$m=n$情况类似的讨论可得$\partial M_1/\partial T_{\mathrm{M}}\neq0$,由(41)式得

$$\lim_{T_{\mathrm{M}}\to0^+}\frac{\partial M_1}{\partial T_{\mathrm{M}}}=\frac{1}{2}k_1(\gamma)f_1(\gamma)\rho_0R^2<0,\qquad(42)$$

又因 $\partial M_1/\partial T_M$ 在 $T_M>0$ 时连续,因此始终为负,即星体质量随 T_M 增大而减小,星体质量小于 $T_M\to 0$ 时的质量 M_{C1},由(40)式得临界质量

$$M_{C1}=\lim_{T_M\to 0^+}M_1=-\frac{(2\gamma+3)(\gamma+1)}{\gamma+3}R\rho_0.\quad(43)$$

$h=1$(即 $i=2$)时,$M_2(T_M)$与 $m=n$ 的情况相同,因此同样有 $T_M>0$ 时 $\partial M_2/\partial T_M$ 为负,星体质量仍随 T_M 增大而减小,星体质量小于 $T_M\to 0$ 时的质量 M_{C2},由(40)式得临界质量

$$M_{C2}=\lim_{T_M\to 0^+}M_2=-\frac{(\gamma-3)(2\gamma-1)}{\gamma-1}R\rho_0.\quad(44)$$

4. 星体平衡方程

由(13)式得

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{2}(\rho+p)\frac{\alpha'}{\alpha}-\frac{T'}{16\pi}\frac{\partial V}{\partial T}.\quad(45)$$

由(10),(11)式得

$$-\alpha\phi''-\frac{1}{2}\alpha'\phi'=8\pi\rho_{\mathrm{eff}},\quad(46)$$

$$\frac{1}{2}\alpha'\phi'=8\pi p_{\mathrm{eff}},\quad(47)$$

由(46),(47)式得

$$(\alpha\phi')'=8\pi(p_{\mathrm{eff}}-\rho_{\mathrm{eff}}),\quad(48)$$

积分得

$$\alpha\phi'=8\pi\int(w-1)\rho_{\mathrm{eff}}\mathrm{d}x,\quad(49)$$

把(47)和(49)式代入(45)式得

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=-(\rho+p)\frac{w\rho_{\mathrm{eff}}}{\int(w-1)\rho_{\mathrm{eff}}\mathrm{d}x}-\frac{T'}{16\pi}\frac{\partial V}{\partial T}.\quad(50)$$

(50)式即是考虑了暗能量存在后的星体平衡方程.当总状态方程参量 w 不含 x 时,设质量函数

$$M(x)=\int\rho_{\mathrm{eff}}\mathrm{d}x,$$

并把 $V(\phi,T)$取为 $-2T\phi$,则(50)式可化为

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=-(\rho+p)\frac{w}{w-1}\frac{\rho_{\mathrm{eff}}}{M(x)}+\frac{T'}{8\pi}\phi,\quad(51)$$

容易验证前面求出的三组解都满足此方程.与通常星体平衡方程相比,(51)式多了 $T'\phi/8\pi$ 一项(以下称温度项),且右边第一项(以下称引力项)也有标量场 ϕ 的作用,可见暗能量对应的标量场对星体平衡有一定的影响.当 $m=n$ 时,$\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$ 为正,引力项为正,温度项也为正.$E_0=T_M^2$ 时,若标量场为负($h=-1$),则 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$ 为正,引力项为负,温度项为正.若标量场为正($h=1$),则 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$ 为负,引力项为正,温度项为负.

5. 结论与讨论

在二维暗能量星模型中,当 $m=n$ 即标量场与温度的空间分布相似时,状态方程参量满足 $-1/2<\gamma<-1/5$,标量场恒为负值,总能量密度 $\rho_{\mathrm{eff}}>0$,总压强 $p_{\mathrm{eff}}<0$,总状态方程参量 $w=-1/3$,星体总质量 M 随温度增大而减小,星体具有质量上限 M_C.在星体平衡上,负压强使星体向内塌缩,标量场和奇异物质对星体物质产生向外的"反引力",温度梯度也产生向外的斥力.$E_0=T_M^2$ 时,若标量场为负,状态参量须满足 $-3/2<\gamma<-1$,总能量密度 $\rho_{\mathrm{eff}}>0$,总压强 $p_{\mathrm{eff}}<0$,w 恒为负,星体总质量 M 随温度增大而减小,星体具有质量上限 M_{C1},此时,负压强使星体塌缩,标量场和奇异物质对物质产生向内的引力(与普通星体相似),温度梯度则产生斥力.若标量场为正,状态参量须满足 $1/3<\gamma<1/2$,但仍有 $\rho_{\mathrm{eff}}>0$,$p_{\mathrm{eff}}<0$,$w<0$,星体总质量 M 仍随温度增大而减小,星体具有质量上限 M_{C2},此时,正压强抵抗星体塌缩(与普通星体相似),标量场和奇异物质对物质产生向外的"反引力",温度梯度则产生向内的引力.可见,在标量场和奇异物质作用下,暗能量星与普通塌缩星有较大的差别.

[1] Liu L, Zhao Z 2004 *General Relativity* (Beijing: Higher Education Press) p179 (in Chinese) [刘　辽、赵　峥 2004 广义相对论 (北京 高等教育出版社)第 179 页]

[2] Abramowicz M A, Kluzniak W, Lasota J P 2002 *Astron. Astrophys.* L **31** 396

[3] Chapline G 2004 Proceedings of the Texas Conference on Relativistic Astrophysics

[4] Chapline G, Hohlfeld E, Laughlin R B, Santiago D I 2003 *Int. J. Mod. Phys.* A **18** 3587

[5] Lobo F S N 2006 *Class. Quant. Grav.* **23** 1525

[6] Liu L, Pei S Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4980 (in Chinese) [刘 辽、裴寿镛 2006 物理学报 **55** 4980]

[7] Chen G 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2971 (in Chinese) [陈 光 2005 物理学报 **54** 2971]

[8] Riess A G, Nugent P E, Schmidt B P *et al* 2001 *Astrophys. J.* **560** 49

[9] Perlmutter S, Turner M S, White M 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 670

[10] Bennett C L, Halpern M, Hinshaw G *et al* 2003 *Astrophys. J. Suppl.* **148** 1

[11] Yan J, Qiu X M 1998 *Gen. Rel. Grav.* **30** 1319

[12] Yan J, Wang S J, Tao B Y 2001 *Commun. Theor. Phys.* **35** 19

[13] Osorio M A R, Vázquez-Mozo M A 1993 *Mod. Phys. Lett.* A **8** 3111

[14] Liu C Z, Zhang C P 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1928 (in Chinese) [刘成周、张昌平 2007 物理学报 **56** 1928]

A two-dimensional dark energy star model at finite temperature*

Deng Qiang† Yan Jun

(*Department of Physics, Sichuan Normal University, Chengdu* 610066, *China*)

(Received 29 November 2007; revised manuscript received 28 December 2007)

Abstract

A 2-D dark energy star model with the action of strange matter is studied in this article. Equation set of the field and balance equation of star have been deduced, and some analytical solutions are obtained, which can be used to calculate the mass of the star. Moreover, we also investigated the influence of temperature on the mass of star and find that the gross mass of star has a upper limit in each case.

Keywords: dark energy star, strange matter, finite temperature

PACC: 0420, 0490, 9760

* Project supported by the Natural Science Foundation of Sichuan Normal University, China (Grant No. 061k004).

† E-mail: sicnudq@yahoo.com.cn