

# 复合随机 Duffing 系统可靠性分析\*

张义民<sup>†</sup> 张旭方

(东北大学机械工程与自动化学院, 沈阳 110004)

(2007 年 10 月 19 日收到, 2007 年 12 月 12 日收到修改稿)

基于参数  $\alpha = 2$  的 Gegenbauer 正交多项式展开方法, 研究了大变异系数情况下复合随机强 Duffing 体系的可靠性分析问题. 应用随机空间的正交多项式展开方法, Edgeworth 级数逼近技术求取了强非线性随机振动系统响应的前四阶矩以及概率密度函数. 基于首次超越模型, 讨论了复合随机强 Duffing 体系的可靠性分析问题. 提出了系统动态可靠度与系统平均可靠度的区别、联系以及各自特点, 发展了可靠度数值计算公式. 分析计算结果与 Monte-Carlo 模拟结果较好符合, 表明该方法的正确与有效.

关键词: 随机 Duffing 方程, 动态可靠度, 平均可靠度, Gegenbauer 正交多项式

PACC: 0545

## 1. 引言

随机现象作为客观物理模型的本质现象之一越来越多的受到广大科研工作者的重视. 随之而发展起来随机摄动技术<sup>[1,2]</sup>和随机模拟理论<sup>[3,4]</sup>作为研究随机非线性系统动力特征的有力手段应用愈来愈广泛. 然而, 基于小参数的随机摄动技术, 对于弱非线性小变异系数(一般在 5% 以下)问题可以给出近乎精确的解. 但随着非线性项作用的增强以及随机参数变异系数的增大, 其应用范围由于复杂的理论推导和求解的精确性而受到了制约. 随机模拟虽然可以得到任何非线性问题的精确解, 但耗费的人力物力是惊人的. 以 Iwan 等人<sup>[5,6]</sup>发展起来的正交多项式展开方法, 克服了摄动技术的小参数限制和随机模拟耗时长缺点, 取得了较为满意的结果. 文献<sup>[7]</sup>在综合文献<sup>[5,6]</sup>成果的基础上, 发展了随机空间展开的扩阶系统方法. 方同等<sup>[8-10]</sup>应用正交多项式展开方法, 研究了随机参数非线性系统随机混沌、分岔及控制等动力学行为.

作为随机动力学重要分支之一的可靠性问题由于其在系统安全评估中的重要作用, 在近年来迅速蓬勃兴起, 取得了丰硕的研究成果. 然而对于大变异系数复合强非线性随机振动系统整体可靠性评估问

题尚未找到较为有效的方法. Duffing 系统是典型的非线性系统之一, 受到了非线性问题研究者的广泛关注. 本文基于参数  $\alpha = 2$  的 Gegenbauer 正交多项式展开方法, 研究了大变异系数情况下复合随机强 Duffing 体系的可靠性分析问题. 在随机参数变异系数较大和系统非线性程度较强的前提下, 利用正交多项式展开方法, 获得随机振动系统响应的前四阶矩. 应用 Edgeworth 级数逼近技术, 求取系统响应的概率密度函数. 基于首次超越模型, 讨论了复合随机强 Duffing 体系的可靠性分析问题. 提出了系统动态可靠度与平均可靠度的区别、联系以及各自特点, 发展了可靠度数值计算公式. 分析计算结果与 Monte-Carlo 模拟结果较好符合, 表明该方法的正确与有效, 从而解决了强 Duffing 随机系统可靠性分析问题.

## 2. 随机空间的正交分解

定义随机函数空间内积

$$f, g = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) f(x) g(x) dx, \quad (1)$$

其中  $\cdot, \cdot$  为内积算子,  $\rho(x)$  为权函数. 在此基础上可导出该空间中定义的各类范数, 进而证明该随机空间为一完备泛函空间<sup>[7]</sup>. 在此完备随机空间中的任意随机函数可按空间标准正交基  $H(x)$  展开, 即

\* 国家高技术研究发展计划(863)项目(批准号: 2007AA04Z442), 国家自然科学基金重点项目(批准号: 50535010), 辽宁省自然科学基金(批准号: 20052034)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: zhangymneu@sohu.com

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i H_i(x), \quad (2)$$

其中

$$a_i = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) H_i(x) dx, \quad (3)$$

为函数  $f(x)$  在基函数  $H(x)$  上的投影. 同时, 正交多项式具有如下性质:

$$\int_{\Omega} \rho(x) H_i(x) H_j(x) dx = \delta_{ij} \quad (i, j = 0, 1, \dots, n), \quad (4)$$

其中  $\rho(x)$  为权函数,  $\delta_{ij}$  为克罗内克符号,  $\Omega$  为函数积分域.

应用正交多项式对随机空间进行正交分解时, 权函数  $\rho(x)$  的选择可有多种选择, 如常数或者指数型权函数, 可参阅文献 [11]. 本文中权函数  $\rho(x)$  取为参数  $\alpha = 2$  的 Gegenbauer 正交多项式, 其表达式为

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{8}{3\pi} (1-x^2)^{1/2}, & x \in [-1, 1], \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad (5)$$

其概率密度曲线如图 1 所示.

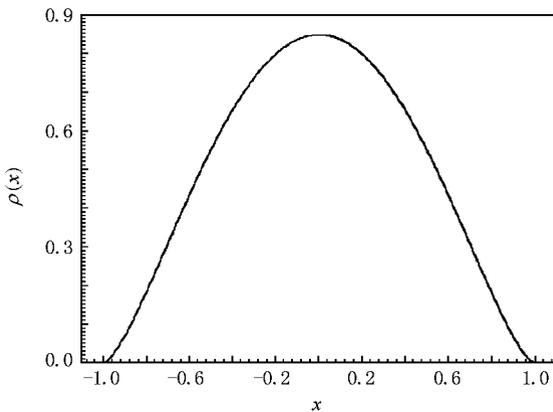


图 1 正交多项式权函数  $\rho(x)$

由多项式理论, 参数  $\alpha = 2$  的 Gegenbauer 正交多项式递推关系式为

$$C_{n+1}(x) = \frac{2(n+2)}{n+1} x C_n(x) - \frac{n+3}{n+1} C_{n-1}(x), \quad (6)$$

从而求得前几阶正交多项式为

$$\begin{aligned} C_0(x) &= 1, \\ C_1(x) &= 4x, \\ C_2(x) &= 12x^2 - 2, \\ C_3(x) &= 32x^3 - 12x, \\ &\dots, \end{aligned} \quad (7)$$

对于一般问题, 取正交展开阶次  $n = 3$  就能获得比较满意的逼近效果.

### 3. Duffing 体系随机响应分析

考虑随机 Duffing 方程

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n \dot{x}(t) + \omega_n^2(x(t) + \gamma x^3(t)) = f(t), \quad (8)$$

其中  $\xi$  为阻尼比,  $\omega_n$  为系统固有频率,  $\gamma$  为随机参数,  $f(t)$  为随机外激励. 一般情况下, 若非线性项系数  $\gamma$  或随机外激励  $f(t)$  相对系统本身特征参数较大时, 则可认为系统表现为强非线性.

将随机参数  $\gamma$  做线性变换

$$\gamma = \bar{\gamma} + \sigma_\gamma b, \quad (9)$$

其中  $\bar{\gamma}$  为  $\gamma$  均值,  $\sigma_\gamma$  为  $\gamma$  方差. 则  $b$  为均值为 0, 标准差为 1 的标准随机变量. 则可将 (8) 式改写为

$$\ddot{x}(b, t) + 2\xi\omega_n \dot{x}(b, t) + \omega_n^2 [x(b, t) + (\bar{\gamma} + \sigma_\gamma b)x^3(b, t)] = f(t). \quad (10)$$

由随机空间的正交多项式展开理论, 将  $x(b, t)$  做基于标准正交基  $H(x)$  的正交分解, 截取到  $N$  阶, 即

$$x(b, t) = \sum_{i=0}^N x_i(t) H_i(b), \quad (11)$$

将带其入 (10) 式整理得

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^n \ddot{x}_i(t) H_i(b) + 2\xi\omega_n \sum_{i=0}^n \dot{x}_i(t) H_i(b) \\ & + \omega_n^2 \left[ \sum_{i=0}^n x_i(t) H_i(b) + (\bar{\gamma} + \sigma_\gamma b) \right. \\ & \left. \times \left( \sum_{i=0}^n x_i(t) H_i(b) \right)^3 \right] \\ & = f(t), \end{aligned} \quad (12)$$

其中

$$\begin{aligned} & \left[ \left( \sum_{i=0}^n x_i(t) H_i(b) \right)^3 \right] \\ & = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{p=0}^n x_i(t) x_j(t) x_p(t) \\ & \quad \times H_i(b) H_j(b) H_p(b), \end{aligned} \quad (13)$$

用多项式  $H_q(b)$  ( $q = 0, 1, \dots, n$ ) 乘以方程 (12) 两边, 并取数学期望, 由 (4) 式正交多项式性质有

$$\begin{aligned} & \ddot{x}_q(t) + 2\xi\omega_n \dot{x}_q(t) \\ & + \omega_n^2 x_q(t) + \omega_n^2 (\bar{\gamma} T_q + \sigma_\gamma S_q) = f_{0q}(t) \end{aligned} \quad (q = 0, 1, \dots, n), \quad (14)$$

其中

$$f_{0q}(t) = f(t)\delta_{0q} \quad (q = 0, 1, \dots, m), \quad (15)$$

$$T_q = E \left[ \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{p=0}^n x_i(t)x_j(t)x_p(t) \times H_i(b)H_j(b)H_p(b)H_q(b) \right] \quad (q = 0, 1, \dots, m), \quad (16)$$

$$S_q = E \left[ \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{p=0}^n bx_i(t)x_j(t)x_p(t) \times H_i(b)H_j(b)H_p(b)H_q(b) \right] \quad (q = 0, 1, \dots, m), \quad (17)$$

式中  $T_q$  和  $S_q$  的计算可通过正交多项式对称性和递推关系进行简化计算。

根据二项式展开定理

$$(x - \nu_1)^k = \sum_{i=0}^k C_k^i x^i (-\nu_1)^{k-i}, \quad (18)$$

由概率理论，随机变量的各阶中心矩与原点矩的递推关系为

$$\begin{aligned} \mu_k &= E[(x - \nu_1)^k] = \sum_{i=0}^k C_k^i E[x^i] (-\nu_1)^{k-i} \\ &= \sum_{i=0}^k C_k^i \nu_i (-\nu_1)^{k-i} \quad (k = 1, 2, \dots, m), \end{aligned} \quad (19)$$

其中  $\nu_i = E[x^i]$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) 为各阶原点矩。展开整理取前四阶

$$s^2 = \nu_2 - \nu_1^2, \quad (20)$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3, \quad (21)$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4, \quad (22)$$

对于系统响应  $x(b, t)$  利用正交多项式的正交性质，求取前四阶原点矩为

$$\nu_1 = E[x(b, t)] = E \left[ \sum_{i=0}^n x_i(t)H_i(b) \right] = \sum_{i=0}^n x_i(t)E[H_i(b)] = x_0(t), \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \nu_2 &= E[x^2(b, t)] = E \left[ \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n x_i(t)x_j(t)H_i(b)H_j(b) \right] \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n x_i(t)x_j(t)E[H_i(b)H_j(b)] = \sum_{j=0}^n x_j^2(t), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\nu_3 = E[x^3(b, t)] = E \left[ \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{p=0}^n x_i(t)x_j(t)x_p(t)H_i(b)H_j(b)H_p(b) \right], \quad (25)$$

$$\nu_4 = E[x^4(b, t)] = E \left[ \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^n x_i(t)x_j(t)x_p(t)x_q(t)H_i(b)H_j(b)H_p(b)H_q(b) \right]. \quad (26)$$

当多项式阶次  $n$  确定时 (25)–(26) 式的计算利用多项式性质求可得具体解析式。

本文取参数  $\alpha = 2$  的 Gegenbauer 正交多项式，展开阶次  $n = 3$ ，分别计算  $\nu_3$  与  $\nu_4$  有

$$\begin{aligned} \nu_3 &= x_0[x_0^2 + 3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)] \\ &+ \sqrt{5}x_2 \left( \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{15}{25}x_2^2 + \frac{9\sqrt{3}}{5}x_1x_3 + \frac{21}{10}x_3^2 \right) \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \nu_4 &= x_0^4 + 6x_0^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \\ &+ \sqrt{5}x_0x_2 \left( 6x_1^2 + \frac{36\sqrt{3}}{5}x_1x_3 + \frac{64}{25}x_2^2 + \frac{42}{5}x_3^2 \right) \\ &+ 3x_1^3 \left( \frac{3}{4}x_1 + \sqrt{3}x_3 \right) \\ &+ x_2^2 \left( \frac{144}{25}x_2^2 + \frac{108\sqrt{3}}{5}x_1x_3 + \frac{78}{5}x_1^2 \right) \\ &+ x_3^2 \left( \frac{33}{2}x_1^2 + \frac{165}{5}x_2^2 + 9\sqrt{3}x_1x_3 + \frac{33}{4}x_3^2 \right). \end{aligned} \quad (28)$$

将 (23)–(26) 式代入 (20)–(22) 式中，即可求得系统响应的前四阶中心矩。

当随机变量  $y$  前四阶中心矩已知时，其概率密度函数的求取可应用 Edgeworth 级数方法。根据 Edgeworth 级数展开理论，可以把服从任意分布标准化了的随机变量概率分布函数以任意精度近似的展开成标准正态分布函数<sup>[12]</sup>

$$\begin{aligned} F(y) &= \Phi(y) - \phi(y) \\ &\times \left[ \frac{1}{6} \frac{\mu_3}{\sigma^3} H_2(y) + \frac{1}{24} \left( \frac{\mu_3}{\sigma^4} - 3 \right) \right. \\ &\times H_3(y) + \left. \frac{1}{72} \left( \frac{\mu_3}{\sigma^3} \right)^2 H_5(y) \right], \end{aligned} \quad (29)$$

式中  $\Phi(\cdot)$  为标准正态分布函数， $\phi(\cdot)$  为标准正态概率函数， $\mu_i$  ( $i = 3, 4$ ) 为随机变量  $y$  的三阶和四阶

中心矩,  $H_i(y)$  为  $i$  阶 Hermit 多项式, 其递推关系为

$$\begin{aligned} H_{i+1}(y) &= yH_i(y) - iH_{i-1}(y), \\ H_0(y) &= 1, H_1(y) = y, \end{aligned} \quad (30)$$

同时 Hermit 正交多项式具有如下性质:

$$H'_n(y) = nH_{n-1}(y), \quad (31)$$

$$\begin{aligned} H_{n+1}(y) &= yH_n(y) - nH_{n-1}(y) \\ (n &= 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (32)$$

Edgeworth 级数可以较高精度地逼近随机变量的真实分布, 但通常取级数的前四项即可得到较好的近似. 对 (29) 式两端求导并应用 (31)–(32) 式, 求得系统响应概率密度函数为

$$\begin{aligned} f(y) &= \phi(y) \left\{ 1 + \frac{1}{6} \frac{\mu_3}{s^3} H_3(y) + \frac{1}{24} \left( \frac{\mu_4}{s^4} - 3 \right) \right. \\ &\quad \left. \times H_4(y) + \frac{1}{72} \left( \frac{\mu_3}{s^3} \right)^2 H_6(y) \right\}. \end{aligned} \quad (33)$$

至此可以获得随机响应的概率密度函数.

对方程 (8) 选取参数  $\omega_n = 1 \text{ rad/s}$ ,  $\xi = 0.01$ ,  $\bar{\gamma} = 2$ ,  $s_\gamma = 1$ , 外激励  $f(t)$  为水平方向的 El-Centro 地震波如图 2 所示. 由于随机参数  $\gamma$  以及外激励相对于系统本身特征参数要大得多, 可以理解此系统动力学特性表现为强非线性. 为说明本方法求解问题的精确性, 选取 1000 个概率密度函数服从  $\rho(x)$  的随机样本, 进行 Monte-Carlo 模拟, 将计算求得结果同 Monte-Carlo 模拟进行对比如图 3–4 所示.

由图 3 和图 4 表明, 基于参数  $\alpha = 2$  的 Gegenbauer 正交多项式展开方法计算所得随机响应的概率统计特性同 Monte-Carlo 随机模拟结果符合较好, 表明在强非线性与随机参数变异系数较大 (随机参数  $\gamma$  的变异系数为 50%) 情况下, 本文方法仍具有较高的计算精度.

应用 (33) 式, 绘制系统位移响应典型时刻的概率密度曲线, 如图 5 和图 6 所示.

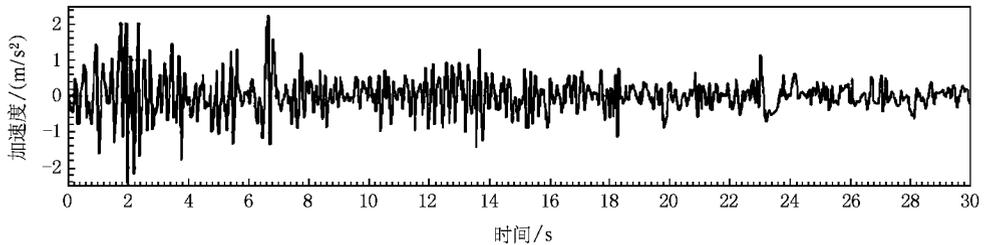


图 2 地震波时程曲线

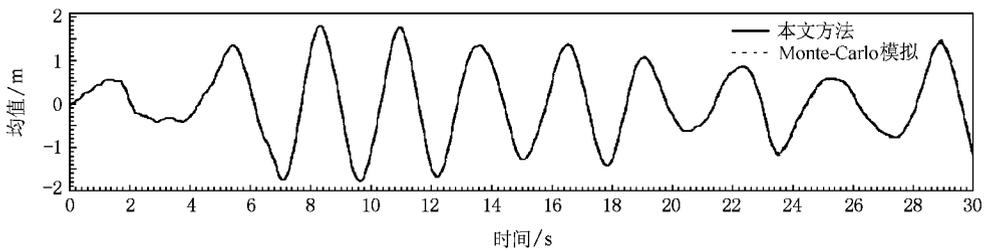


图 3 系统位移响应均值对比曲线

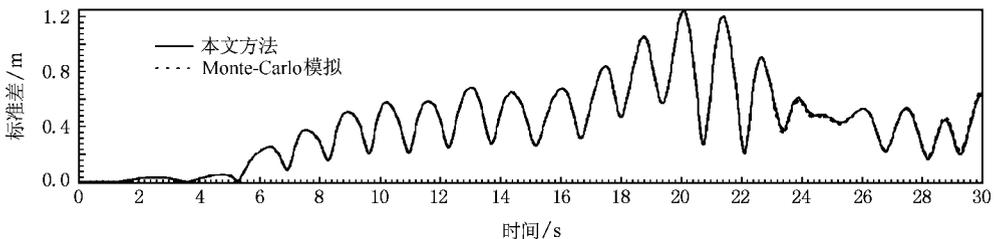
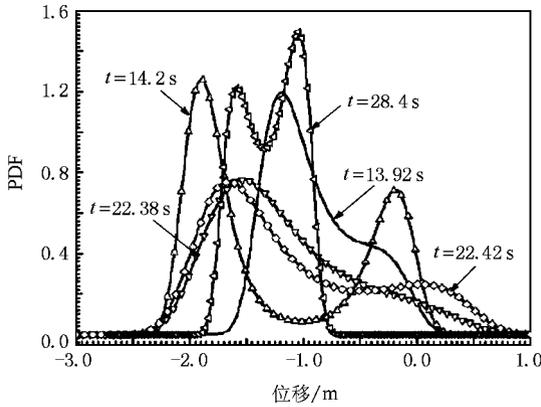
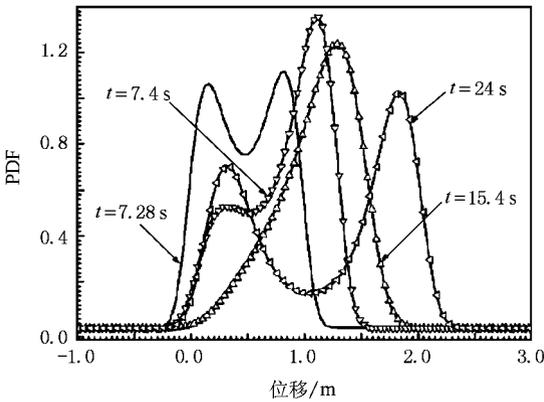


图 4 系统位移响应标准差对比曲线

图5 响应概率密度曲线 ( $\mu_x < 0$ )图6 响应概率密度曲线 ( $\mu_x > 0$ )

由图5和图6表明,由于非线性因素的影响,系统响应概率密度曲线出现多峰现象,并且在单峰与多峰之间相互过渡,具有随时间演化的性质。

#### 4. 随机 Duffing 体系可靠性分析

可靠性分析的一个基本问题是计算结构系统可靠度的积分,即

$$R = \int_{g(z) > 0} f_z(z) dz, \quad (34)$$

式中  $f_z(z)$  为随机变量  $z = [A, x]$  的联合概率密度函数,  $A$  为系统响应  $x$  门槛值,  $g(z)$  为可靠度状态函数,表示为

$$\begin{aligned} g(z) > 0, & \text{安全状态,} \\ g(z) \leq 0 & \text{失效状态,} \end{aligned} \quad (35)$$

其中  $g(z) = 0$  为极限状态方程.对于随机 Duffing 体系,可靠度求取采用首次超越准则即

$$g(z) = A - x. \quad (36)$$

当假设系统位移响应门槛值与系统响应统计独

立时,由概率知识可以将系统失效状态函数  $g(A, x)$  的前四阶矩表示为

$$\mu_g = E[g(A, x)] = E[A] - E[x], \quad (37)$$

$$\sigma_g^2 = \text{Var}[g(A, x)] = \sigma_A^2 + \sigma_x^2, \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \mu_{3g} &= E[g(A, x) - \bar{g}(A, x)]^3 \\ &= \mu_{3A} - \mu_{3x}, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \mu_{4g} &= E[g(A, x) - \bar{g}(A, x)]^4 \\ &= \mu_{4A} + 6\mu_{2A}\mu_{2x} + \mu_{4x}. \end{aligned} \quad (40)$$

由上,当门槛值  $A$  的概率统计特性已知时,极限状态方程的前四阶矩可求得.可靠度指标

$$\beta = \mu_g / s_g = \frac{E[g(A, x)]}{\sqrt{\text{Var}[g(A, x)]}},$$

由可靠性理论可知,用失败点处状态曲面的切平面近似地模拟极限状态表面,可以获得可靠度的一阶估计量

$$R = 1 - \Phi(-\beta) = 1 - \Phi\left(-\frac{\mu_g}{\sigma_g}\right), \quad (41)$$

式中  $\Phi(\cdot)$  为标准正态分布函数.然而在复合随机强 Duffing 系统中,由于非线性的影响,线性系统叠加原理不再成立,系统对于正态输入的响应已不是正态输出,所以可靠度  $R$  的计算由于输出的非正态性而显得比较困难.应用(29)式可以求得极限状态方程的分布函数

$$\begin{aligned} F(y) &= \Phi(y) - \phi(y) \\ &\times \left[ \frac{1}{6} \frac{\mu_{3g}}{\sigma_g^3} H_2(y) + \frac{1}{24} \left( \frac{\mu_{4g}}{\sigma_g^4} - 3 \right) \right. \\ &\times H_3(y) + \left. \frac{1}{72} \left( \frac{\mu_{3g}}{\sigma_g^3} \right)^2 H_5(y) \right]. \end{aligned} \quad (42)$$

据此系统可靠度为

$$R = P(g(A, x) > 0) = 1 - F(-\beta). \quad (43)$$

用上式计算可靠度时,有时会出现  $R > 1$  的情况.当  $R > 1$  时,采用下述经验公式<sup>[13,14]</sup>进行修正:

$$R^* = F(\beta) - \frac{F(\beta) - \Phi(\beta)}{\{1 + \beta[F(\beta) - \Phi(\beta)]\}^2}. \quad (44)$$

由系统可靠性指标  $\beta$  定义及(42)式可知,系统在时刻  $t$  可靠度  $R^*(t)$  的获得,只与时刻  $t$  的系统失效模式前四阶矩有关,而与时刻  $t$  之前的失效模式统计特征无关,这等价于  $t$  时刻之前系统可靠性对  $t$  时刻及其以后系统可靠性无影响.如果应用  $R^*(t)$  直接作为系统整体可靠性能的评估,与实际情况是不符的.因为在时刻  $t$  以前,系统在外界激励作用下自身安全性能已受到影响,不再是初始状态时“完全健康”系统,同时系统本身不具有“自愈”功

能,因此系统整体可靠性曲线应具有单调非升的特点.在获得系统动态可靠性  $R^*(t)$  以后,应该对其在考虑累积效应下总体可靠性的评估问题.据此,本文提出以下系统平均可靠性概念.

所谓系统平均可靠性,就是按照(44)式获得系统动态可靠性  $R^*(t)$  以后,考虑时刻  $t$  以前系统可靠性状况对  $t$  时刻影响,做如下定义:

$$\bar{R}(T) = 1 - \frac{1}{N} \sum_{t \leq T} [1 - R^*(t)], \quad (45)$$

这里  $\bar{R}(T)$  为时刻  $T$  系统平均可靠度,  $N$  为截止时刻  $T$  确定当前动态可靠度数值算法所采取的离散样本点总数,  $R^*(t)$  为(44)式所得时刻  $t$  系统动态可靠度,据此可进行系统整体可靠性能的评估.

## 5. 数值算例

为验证本文方法的有效性,对在水平方向 El-Centro 随机地震波激励下的随机 Duffing 系统(系统参数如第 3 部分所示),应用(42)~(45)式,选取服从正态分布的穿越门槛值  $A$  为 1.5 m,标准差为 0.15 m,微分方程采用四阶变步长 Ronge-Kutta 数值算法,步长取为 0.01,分别计算系统动态可靠度曲线和平均可靠性曲线如图 7 和图 8 所示.

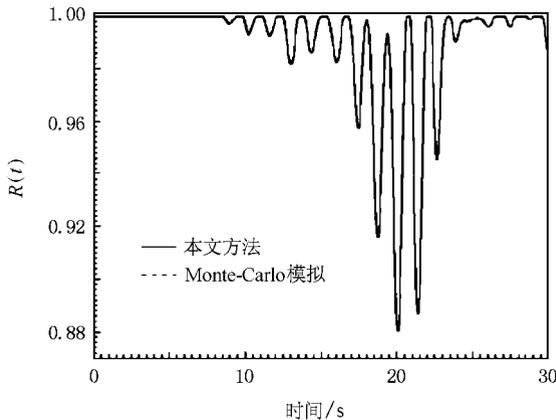


图 7 系统动态可靠度  $R(t)$

由图 7 和图 8 对比系统动态可靠度曲线与系统平均可靠度曲线可得,动态可靠度曲线注重系统可靠度变化的实时细节,通过观察曲线便可知系统

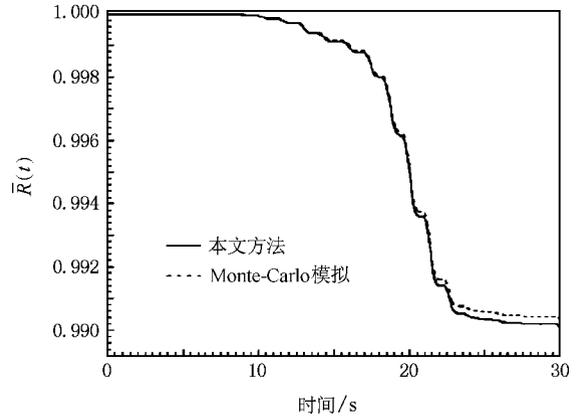


图 8 系统平均可靠度  $\bar{R}(t)$

危险点、次危险点等位置,表征了系统在外载荷激励下不同时刻可靠度变化实时状况,因此其在系统的动态设计以及控制过程中,具有其现实意义.系统平均可靠度曲线呈现单调非增阶梯状变化,注重系统整体安全状态评估,但由于其整体平均效应,掩盖了系统可靠性演变过程中的个别危险点,这是其不足之处.此外,由各自数学定义可知,不同的动态可靠度曲线可以有相同的平均可靠度曲线,而两系统累积平均可靠度曲线相同,但其可靠度演变过程则不一定相同.综上所述,系统动态可靠性曲线和系统平均可靠度曲线相辅相成,应综合考虑以求对系统安全性做到全面正确评价.应用本文方法所得系统可靠度随时间变化曲线和 Monte-Carlo 模拟结果符合较好,说明本文方法的有效性.

## 6. 结 论

本文应用参数  $\alpha = 2$  的 Gegenbauer 正交多项式展开方法,研究了大变异系数下复合随机强 Duffing 体系的可靠性分析问题.基于首次穿越模型,应用四阶矩技术、Edgeworth 级数逼近技术和正交多项式展开方法,对多复合强 Duffing 随机体系可靠性问题进行分析,求取了响应的概率密度函数和可靠度计算数值公式,并且绘制了典型时刻响应的概率密度函数.讨论了动态可靠度与平均可靠度的区别、联系以及各自特点.

- [ 5 ] Jense H ,Iwan W D 1992 *ASCE Eng. Mech.* **118** 1012
- [ 6 ] Iwan W D ,Huang C T 1996 *Int. J. NonLinear Mech.* **31** 631
- [ 7 ] Li J 1996 *Stochastic Structural System : Analysis and Modeling* ( Beijing : Science Press )( in Chinese )[ 李 杰 1996 随机结构体系-分析与建模 ( 北京 : 科学出版社 )]
- [ 8 ] Wu C L ,Ma S J ,Sun Z K ,Fang T 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 6253 ( in Chinese )[ 吴存利、马少娟、孙中奎、方 同 2006 物理学报 **55** 6253 ]
- [ 9 ] Xu W ,He Q ,Rong H W ,Fang T 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1365 ( in Chinese )[ 徐 伟、贺 群、戎海武、方 同 2003 物理学报 **52** 1365 ]
- [ 10 ] Rong H W ,Wang X D ,Xu W ,Meng G ,Fang T 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2557 ( in Chinese )[ 戎海武、王向东、徐 伟、孟 光、方 同 2005 物理学报 **54** 2557 ]
- [ 11 ] *Mathematics Handbook* 1979 ( Beijing : Higher Education Press )( in Chinese )[ 《数学手册》编写组 1979 数学手册 ( 北京 : 高等教育出版社 )]
- [ 12 ] Cramer H 1964 *Mathematical Methods of Statistics* ( New Jersey : Princeton University Press )
- [ 13 ] Zhang Y M ,Wang S ,Liu Q L *et al* 2003 *Science in China E* **33** 804
- [ 14 ] Zhang Y M ,Liu Q L ,Wen B C 2002 *AIAA Journal* **40** 585

## Reliability analysis of double random Duffing system <sup>\*</sup>

Zhang Yi-Min<sup>†</sup> Zhang Xu-Fang

( *School of Mechanical Engineering and Automation ,Northeastern University ,Shenyang 110004 ,China* )

( Received 19 October 2007 ; revised manuscript received 12 December 2007 )

### Abstract

By using of Gegenbauer orthogonal polynomials ,an effective numerical method for the reliability analysis of double random Duffing system with large coefficient of variation is presented. On the basis of the first passage model ,the fourth-moment technique ,the Edgeworth series approximation theory and the orthogonal polynomial expansion method are employed to develop a reliability analysis method systematically. The dynamic reliability and mean reliability of the system is discussed. The results obtained by this method are verified by Monte-Carlo simulations.

**Keywords** : double random Duffing systems , dynamic reliability , mean reliability , Gegenbauer orthogonal polynomials

**PACC** : 0545

<sup>\*</sup> Project supported by the National High Technology Research and Development Program of China ( Grant No. 2007AA04Z442 ) , the State Key Program of National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 50535010 ) and the Natural Science Foundation of Liaoning Province , China ( Grant No. 20052034 ).

<sup>†</sup> E-mail : zhangymneu@sohu.com