第 57 卷 第 8 期 2008 年 8 月
1000-3290/2008/57(08)/4649-03
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.57, No.8, August, 2008

广义 Birkhoff 系统动力学的一类逆问题*

梅凤翔† 解加芳 铁强

(北京理工大学力学系 北京 100081)

(2007 年 10 月 19 日收到；2007 年 11 月 26 日收到修改稿)

针对广义 Birkhoff 系统动力学，提出广义 Birkhoff 系统动力学的一类逆问题，研究由已知积分流形来建立广义 Birkhoff 方程．这类逆问题的解通常不是唯一的，需给出必要的补充要求．最后举例说明结果的应用．

关键词：广义 Birkhoff 系统，动力学逆问题，积分流形

PACC：0320

1. 引　　言

Birkhoff 力学是 Hamilton 力学的推广．1927 年，Birkhoff[1] 提出一类积分变分原理和一类新型运动微分方程．1978 年美国强子物理学家 Santilli 将这类方程推广到包含时间的情形，并建议命名为 Birkhoff 方程．文献[1]中提出的积分变分原理后来也被称为 Pfaff-Birkhoff 原理．1983 年 Santilli[2] 研究了 Birkhoff 方程、Birkhoff 方程的变换理论以及 Galilei 相对论的推广，并提出"Birkhoff 力学"的称谓．文献[3]建立了 Birkhoff 系统动力学的基本理论框架，证明了所有非完整系统都可纳入 Birkhoff 系统，研究了 Birkhoff 系统的积分理论、动力学逆问题、运动稳定性等．近些年对 Birkhoff 系统的对称性与守恒量研究已取得重要进展[4—13]．文献[14]提出了广义 Birkhoff 方程并研究了 Birkhoff 系统和广义 Birkhoff 系统的 Noether 对称性与 Noether 守恒量．因为通常的 Birkhoff 系统不容易构造，而广义 Birkhoff 方程的实现则较易，并且有更多的"自由度"．因此，对广义 Birkhoff 系统动力学的研究有重要意义．本文研究广义 Birkhoff 系统一类逆问题：已知系统的积分流形来求系统的微分方程．

2. 广义 Birkhoff 系统的方程

广义 Birkhoff 系统的方程具有如下形式[14]：

$$\Omega_{\mu\nu}\dot{a}^{\nu}-\frac{\partial B}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial R_{\mu}}{\partial t}=-\Lambda^{\mu}$$
$$(\mu,\nu=1,2,\cdots,2n),\tag{1}$$

其中 $B=B(t,\boldsymbol{a})$ 为 Birkhoff 函数，$R_{\mu}=R_{\mu}(t,\boldsymbol{a})$ 为 Birkhoff 函数组，$\Lambda_{\mu}=\Lambda_{\mu}(t,\boldsymbol{a})$ 为附加项，

$$\Omega_{\mu\nu}=\frac{\partial R_{\nu}}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial R_{\mu}}{\partial a^{\nu}}\tag{2}$$

称为 Birkhoff 张量．假设方程(1)非奇异，即设

$$\det(\Omega_{\mu\nu})\neq 0,\tag{3}$$

则可由方程(1)解得所有 $\dot{a}^{\mu}$，

$$\dot{a}^{\mu}=\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}+\frac{\partial R_{\nu}}{\partial t}-\Lambda_{\nu}\right),\tag{4}$$

其中

$$\Omega^{\mu\nu}\Omega_{\nu\rho}=\delta^{\mu}_{\rho}.\tag{5}$$

如果

$$\Lambda_{\mu}=0\qquad(\mu=1,2,\cdots,2n),\tag{6}$$

则方程(1)成为通常的 Birkhoff 方程

$$\Omega_{\mu\nu}\dot{a}^{\nu}-\frac{\partial B}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial R_{\mu}}{\partial t}=0.\tag{7}$$

3. 广义 Birkhoff 系统动力学的一类逆问题

下面提出广义 Birkhoff 系统动力学的一类逆问题．已知积分流形

$$\omega: I_{\rho}=I_{\rho}(t,\boldsymbol{a})=C_{\rho}\qquad(\rho=1,2,\cdots,m\leqslant 2n),\tag{8}$$

* 国家自然科学基金(批准号：10572021，10772025)和高等学校博士学科点专项科研基金(批准号：20040007022)资助的课题．

† E-mail：meifx@bit.edu.cn

试建立广义 Birkhoff 方程(1).

为解上述逆问题,将(8)式对 t 求导数,并利用方程(4),得到

$$\frac{\partial I_\rho}{\partial t}+\frac{\partial I_\rho}{\partial a^\mu}\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu}+\frac{\partial R_\nu}{\partial t}-\Lambda_\nu\right)=\Phi_\rho(\omega,t,\boldsymbol{a})\qquad(\rho=1,2,\cdots,m),\tag{9}$$

其中 Φ_ρ 为 Erugin 函数[15].当 $C_\rho\neq 0$ 时,$\Phi_\rho=0$;当 $C_\rho=0$ 时,Φ_ρ 为在积分流形(8)式上趋于零的任意函数.由(9)式求出 $4n+1$ 个未知函数 B,R_ν,Λ_ν,就解决了上述所提逆问题.

由此可见,上述逆问题没有唯一解.为解逆问题,同其他逆问题一样,需要给出补充限制,如优化、稳定性等.

4. 算 例

已知二阶系统的一个积分

$$I=a^1\cos t+a^2\sin t=C,\tag{10}$$

其中 $C\neq 0$,试建立广义 Birkhoff 方程.

由(9)式给出

$$-a^1\sin t+a^2\cos t+\Omega^{12}\left(\frac{\partial B}{\partial a^2}+\frac{\partial R_2}{\partial t}-\Lambda_2\right)\cos t+\Omega^{21}\left(\frac{\partial B}{\partial a^1}+\frac{\partial R_1}{\partial t}-\Lambda_1\right)\sin t=0.\tag{11}$$

因 $C\neq 0$,Erugin 函数 $\Phi=0$.(11)式中有 5 个未知函数 $R_1,R_2,B,\Lambda_1,\Lambda_2$,故没有唯一解.因此,需要给出补充限制.作如下假设:

$$\frac{\partial R_1}{\partial t}=\frac{\partial R_2}{\partial t}=0,\tag{12}$$

由(11)式给出

$$\Omega^{12}\left(\frac{\partial B}{\partial a^2}-\Lambda_2\right)\cos t+\Omega^{21}\left(\frac{\partial B}{\partial a^1}-\Lambda_1\right)\sin t=a^1\sin t-a^2\cos t.\tag{13}$$

由方程(4)可得

$$\begin{aligned}\dot a^1&=\Omega^{12}\left(\frac{\partial B}{\partial a^2}-\Lambda_2\right),\\ \dot a^2&=\Omega^{21}\left(\frac{\partial B}{\partial a^1}-\Lambda_1\right).\end{aligned}\tag{14}$$

下面提出要求方程(14)的零解稳定的补充要求.为此,取 Lyapunov 函数为

$$V=\frac{1}{2}\{(a^1)^2+(a^2)^2\}.\tag{15}$$

使按方程(14)求得的 $\dot V$ 为零,即

$$\begin{aligned}\dot V&=a^1\dot a^1+a^2\dot a^2\\&=\Omega^{12}a^1\left(\frac{\partial B}{\partial a^2}-\Lambda_2\right)+\Omega^{21}a^2\left(\frac{\partial B}{\partial a^1}-\Lambda_1\right)\\&=0.\end{aligned}\tag{16}$$

因 $\Omega^{12}=-\Omega^{21}$,得

$$a^1\left(\frac{\partial B}{\partial a^2}-\Lambda_2\right)=a^2\left(\frac{\partial B}{\partial a^1}-\Lambda_1\right).\tag{17}$$

由此求得

$$B=0,\quad \Lambda_1=a^1,\quad \Lambda_2=a^2;\tag{18}$$

$$\Lambda_1=\Lambda_2=0,\quad B=\frac{1}{2}\{(a^1)^2+(a^2)^2\}.\tag{19}$$

将(18)或(19)式代入(13)式,可求得

$$\Omega^{12}=1.\tag{20}$$

最后有

$$R_1=0,\quad R_2=-a^1,\quad B=0,\quad \Lambda_1=a^1,\quad \Lambda_2=a^2;\tag{21}$$

$$R_1=a^2,\quad R_2=0,\quad B=\frac{1}{2}\{(a^1)^2+(a^2)^2\},\quad \Lambda_1=\Lambda_2=0.\tag{22}$$

(21)式对应一个广义 Birkhoff 系统,(22)式对应一个 Birkhoff 系统.

5. 结 论

本文提出并解决了广义 Birkhoff 系统的一类逆问题:已知积分流形来建立系统的方程.这种逆问题的提法具有普遍性.如果再加些限制,例如再给定函数 B 和 R_μ 来确定 Λ_μ,只是本文的一种特例.

[1] Birkhoff G D 1927 *Dynamical Systems* (Providence: AMS College Publisher)

[2] Santilli R M 1983 *Foundations of Theoretical Mechanics* Ⅱ (New York: Springer-Verlag)

[3] Mei F X, Shi R C, Zhang Y F, Wu H B 1996 *Dynamics of Birkhoffian Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔、史荣昌、张永发、吴惠彬 1996 Birkhoff 系统动力学(北京 北京理工大学出版社)]

[4] Zhang Y 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 461 (in Chinese) [张　毅 2002 物理学报 **51** 461]

[5] Fu J L, Chen L Q, Xue Y 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 256 (in Chinese) [傅景礼、陈立群、薛　纭 2003 物理学报 **52** 256]

[6] Fu J L, Chen L Q 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 2664 (in Chinese) [傅景礼、陈立群 2003 物理学报 **52** 2664]

[7] Zhang Y, Mei F X 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 2419 (in Chinese) [张　毅、梅凤翔 2004 物理学报 **53** 2419]

[8] Xu Z X 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 4971 (in Chinese) [许志新 2005 物理学报 **54** 4971]

[9] Zhang R C, Chen X W, Mei F X 2001 *Chin*. *Phys*. **10** 12

[10] Luo S K, Chen X W, Fu J L 2001 *Chin*. *Phys*. **10** 271

[11] Zhang H B 2002 *Chin*. *Phys*. **11** 765

[12] Luo S K 2003 *Chin*. *Phys*. **12** 140

[13] Chen X W 2003 *Chin*. *Phys*. **12** 586

[14] Mei F X 1993 *Sci*. *China* A **36** 1456

[15] Galiullin A S 1986 *Methods of Solution of Inverse Problems of Dynamics* (Moscow: Nauka) (in Russian)

An inverse problem of dynamics of a generalized Birkhoff system *

Mei Feng-Xiang†　Xie Jia-Fang　Gang Tie-Qiang

(*Department of Mechanics*, *Beijing Institute of Technology*, *Beijing*　100081, *China*)

(Received 19 October 2007; revised manuscript received 26 November 2007)

Abstract

For the generalized Birkhoff system dynamics, the authors present a kind of inverse problem. The generalized Birkhoff system equations are established by using given integral manifolds. The solution of the problem, in general, is not unique. In order to obtain a determining solution, some additional conditions are required. An example is given to illustrate the application of the result.

Keywords: generalized Birkhoff system, inverse problem of dyanmics, integral manifold

PACC: 0320

---

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10572021, 10772025) and the Doctoral Program Foundation of Institution of Higher Education of China (Grant No. 20040007022).

† E-mail: meifx@bit.edu.cn