

三势阱中玻色-爱因斯坦凝聚的开关特性*

王海雷^{1,2)} 杨世平¹⁾

1) 河北师范大学物理科学与信息工程学院, 石家庄 050016)

2) 北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088)

(2007 年 12 月 8 日收到, 2008 年 2 月 15 日收到修改稿)

应用平均场近似的方法, 研究了弱耦合的三势阱中玻色-爱因斯坦凝聚的开关效应. 当粒子置于左阱时, 可以通过在中间势阱中加入少量粒子控制左阱粒子向右阱的隧穿, 从而呈现出明显的导通与截止行为. 对中间势阱的深度和相对相位的影响也进行了讨论, 并指出了该理论模型的一些潜在应用前景.

关键词: 玻色-爱因斯坦凝聚, 开关效应, 三势阱, 平均场近似

PACC: 0530J, 0365, 4250, 7335

1. 引 言

自从 1995 年第一次实现玻色-爱因斯坦凝聚 (BEC) 以来, 超冷原子气体的研究激发了大量理论和实验工作者的兴趣^[1]. BEC 具有重要的理论研究价值, 在精密测量、原子芯片和量子计算机等领域也有着广阔的应用前景. 最近几年, 有过许多基于 BEC 装置的研究报道, 其中不少工作致力于类比经典电路中的电子元器件. Stickney 等^[2]研究了三势阱中 BEC 的类三极管行为; Seaman 等^[3]做了超冷原子器件与一些基本电子元件的类比, 提出了实现这些原子器件的方法; 一维光晶格中单原子三极管的实现

方案也有报道^[4].

我们知道, 电子元件的导通和截止对应于基本逻辑常量 0 和 1, 是构成如今大规模集成电路的基础. 本文研究了三势阱 BEC 系统的粒子输运行为, 发现当中间和两边势阱具有不同相互作用时, 系统呈现出类似开关的导通和截止行为, 如图 1 所示.

本文的理论模型是在平均场框架下从 Gross-Pitaevski (G-P) 方程得到的. 以前的许多工作都对两势阱或三势阱的 BEC 系统作了研究^[5-10], 其中文献 [11] 研究了两势阱系统中的 Rosen-Zener 跃迁, 文献 [12-14] 还讨论了三势阱系统中的非线性 Landau-Zener 隧穿以及 Josephson 振荡到自俘获的转变.

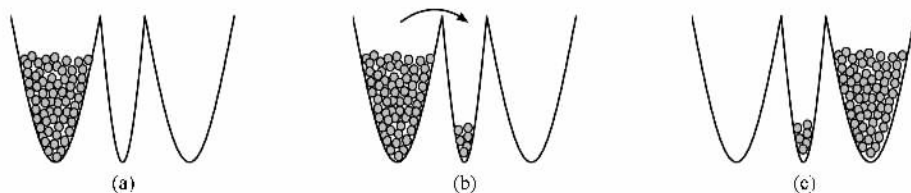


图 1 三势阱的导通和截止示意图 (a) 将所有粒子置于左阱中, 系统处于截止状态 (b) 在中间势阱中放入极少量的粒子以增大中间势阱中的能量 (c) 一段时间后, 几乎所有初始布居在左阱的粒子隧穿到了右阱中, 而中间阱中一直保持很少的粒子

2. 模 型

G-P 方程很好描述

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + u(r) + g(r)|\Psi|^2 \right] \Psi, \quad (1)$$

对于超冷原子系统凝聚体的动力学行为可以用

* 国家自然科学基金(批准号:10725521, 10604009)和国家重点基础研究发展规划(批准号:2006CB921400, 2007CB814800)资助的课题.

式中 m 是原子质量,

$$g(r) = \frac{4\pi \hbar^2 a(r)N}{m},$$

其中 $a(r)$ 是粒子间相互作用散射长度. 对于三势阱系统 G-P 方程中的波函数 $\Psi(r, t)$ 可以展成每个阱中波函数的叠加, 即

$$\Psi(r, t) = a_l(t)\phi_l(r) + a_m(t)\phi_m(r) + a_r(t)\phi_r(r), \quad (2)$$

式中 $\phi_l(r)$, $\phi_m(r)$ 和 $\phi_r(r)$ 分别是左阱、中间阱和右阱中的波函数. 方程 (1) 可以写为

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a_l \\ a_m \\ a_r \end{pmatrix} = \hat{H} \begin{pmatrix} a_l \\ a_m \\ a_r \end{pmatrix}. \quad (3)$$

我们的模型中选择左阱和右阱具有相同的基态能量和粒子间相互作用. 考虑能量为相对量, 这里左右阱中的基态能量可以取为零, 则 (3) 式的 Hamilton 量可以写成

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} c_l |a_l|^2 & -\frac{v}{2} & 0 \\ -\frac{v}{2} & \gamma_m + c_m |a_m|^2 & -\frac{v}{2} \\ 0 & -\frac{v}{2} & c_r |a_r|^2 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

这里 γ_m 是中间阱与左右两阱的基态能量差; v 是相邻两阱的耦合参数, 本文中令 $v = 1$; c_l , c_m 和 c_r 分别是左阱、中间阱和右阱中的相互作用强度. 实验上, 粒子间的相互作用强度可以通过 Feshbach 共振技术来调节^[15-17]. 定义

$$\begin{aligned} n_l &= |a_l|^2, \\ n_m &= |a_m|^2, \\ n_r &= |a_r|^2 \end{aligned}$$

为在左阱、中间阱和右阱中找到粒子数的概率, 则总概率满足归一化条件

$$n_l + n_m + n_r = 1.$$

2.1. $\gamma_m = 0$ 的情形

首先讨论每个阱中具有相同的基态能量的情况 ($\gamma_m = 0$). 图 2 给出了中间阱和右阱中的粒子数随时间的变化曲线, 图 2(a) 和 (b) 的粒子初始分布分别为 $n_l = 1, n_m = 0$ 和 $n_l = 0.99, n_m = 0.01$. 从图 2 可以看到, 当所有粒子置于左阱时, 中间阱和右阱的粒子数几乎为零且不随时间大幅度地改变, 好像

所有的粒子被“截止”在左阱中; 当我们将很少量的粒子置于中间阱时, 随着时间的演化, 右阱中的粒子数明显增加, 最终几乎所有的粒子都从左阱隧穿到右阱, 而中间阱中粒子数总是很少且几乎不随时间变化, 对应于开关的导通.

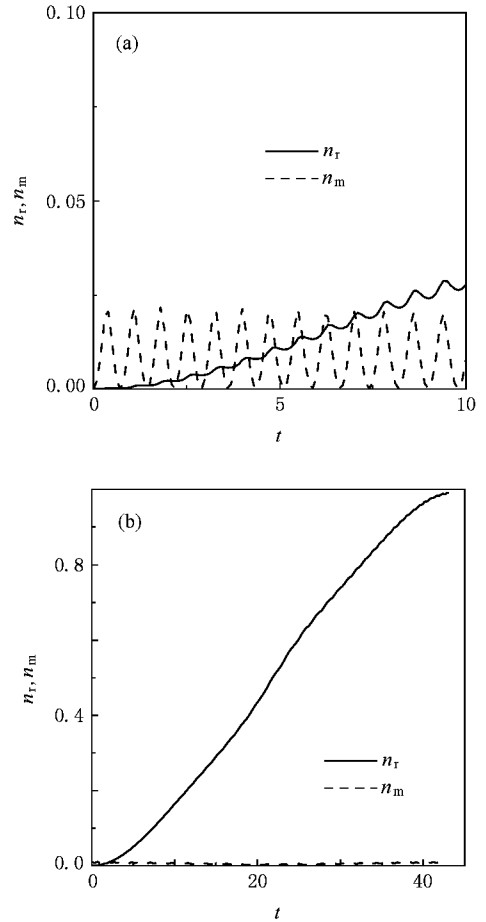


图 2 右阱和中间阱中粒子数随时间的变化 $v = 1, \gamma_m = 0, c_l = c_r = 0.25, c_m = 630$. (a) 初始原子分布为 $n_l = 0.99, n_m = 0.01$ 和 $n_r = 0$; (b) 初始原子分布为 $n_l = 1, n_m = 0, n_r = 0$

上述截止和导通现象的物理机制可以作如下理解: 在弱耦合 ($v = 1$) 情况下, 当相邻阱中的能量相差不大时, 两个阱中的粒子会发生共振隧穿. 我们期待以中间阱中较少的粒子数控制左右两阱中粒子的导通与截止. 这就要求增大中间阱的相互作用以实现通过微小地改变中间阱的粒子来调节阱中的能量, 并使势阱间的隧穿敏感地依赖于中间阱中粒子数的变化. 当所有粒子置于左阱时, 中间阱的能量相对很低, 粒子会一直被抑制在左阱中; 把很少的粒子置于中间阱以提高阱中的能量, 使之与左右两阱的能量大致匹配, 粒子将从左阱隧穿到右阱. 这样就实

现了以很少的粒子控制系统的导通与截止的功能.

本文只考虑排斥相互作用情形. 即 c_l, c_r 和 c_m 均大于零. 按照上述物理机制, 我们对左右两阱选取较小的相互作用(这里以 $c_l = c_r = 0.25$ 为例), 考察随着中间阱中相互作用 c_m 的增加, 隧穿到右阱的粒子数最大值的变化情况. 从图(3)可以看出, 对于 $n_l = 1, n_m = 0$ 情形(图 3(a)), 随着 c_m 的增加, 隧穿到右阱的粒子数 n_r^{\max} 急剧减小并趋于零

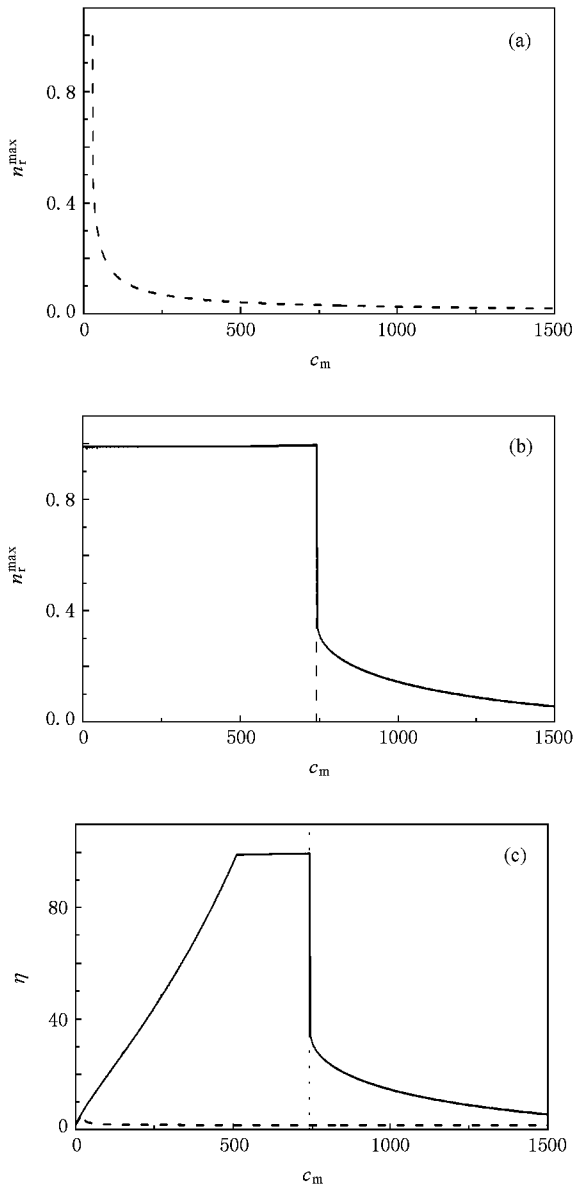


图 3 右阱中粒子数的最大值以及与中间阱粒子数比值 η 随 c_m 的变化情况 (a) $n_l = 1, n_m = 0$ (b) $n_l = 0.99, n_m = 0.01$ (c) η 随 c_m 的变化, 实线和虚线分别对应于 $n_l = 0.99, n_m = 0.01$ 和 $n_l = 1, n_m = 0$

($c_m > 30$); 而对中间阱有少量粒子($n_l = 0.99, n_m = 0.01$)情形(图 3(b)), c_m 在较大的取值范围内, 总能保证 n_r^{\max} 达到最大($n_r^{\max} \approx 1$), 但仍存在一个临界值, 使得当相互作用大于这个临界值($c_m^k = 743$)时 n_r^{\max} 会急剧减小. 因此, c_m 在 30—743 范围为可以实现导通和截止的工作参数区间, 我们可以选择在这个范围内的任意 c_m 值以实现导通和截止功能.

为了更直观地刻画系统导通和截止效应的优劣, 我们定义 η 为右阱与中间势阱的最大粒子数比值

$$\eta = \frac{n_r^{\max}}{n_m^{\max}}. \quad (5)$$

图 3(c) 给出了 η 随中间阱相互作用强度 c_m 的变化曲线. 从图 3(c) 可以看出, 当初始粒子数分布为 $n_l = 1, n_m = 0$ 时, 右阱和中间阱的最大粒子数比值 η 接近于零(图中虚线); 而把少量粒子置于中间阱($n_l = 0.99, n_m = 0.01$)时, η 将随中间阱的粒子相互作用强度的增大而增大(图中实线). c_m 在一定的范围内 η 值达到最大($\eta \approx 100$), 并形成稳定的平台区. 因此, 选择平台区内的 c_m 值使 η 处于稳定的最大值可以获取更明显和更稳定的开关效应. 事实上, 对于不同的左右两阱的相互作用强度 c_l 和 c_r , 临界值 c_m^k 也不同.

下面讨论系统对中间势阱初始粒子数的敏感性. 为方便对比, 这里选取与上面相同的参数, $\gamma_m = 0, w = 1, c_l = c_r = 0.25, c_m = 630$. 定义 n_m^{in} 为置于中间阱中的初始粒子数, 其余粒子置于左阱中($1 - n_m^{\text{in}}$), 我们得到隧穿到右阱的最大粒子数 n_r^{\max} 与初始粒子数 n_m^{in} 的关系曲线(图 4(a)). 图 4(b) 给出了对应的 η 随初始粒子分布的变化情况. 从图 4 可以看到, n_m^{in} 在一定的范围内, 左阱中的粒子几乎能够全部隧穿到右阱中, 并对应有很大的 η 值.

2.2. $\gamma_m \neq 0$ 的情形

以上讨论只考虑了中间势阱基态能量 $\gamma_m = 0$ 的情形, 下面考察 γ_m 的变化对系统的影响. 我们选取与上述相同的参数及初始粒子分布. 图 5(a) 描述了对不同的中间势阱基态能量 γ_m , 右阱粒子数最大值 n_r^{\max} 的变化情况($n_m^{\text{in}} = 0.01$). 我们发现, 与上面改变中间势阱的相互作用情形类似, γ_m 的改变在一个很大范围内依然能保证粒子从左阱隧穿到

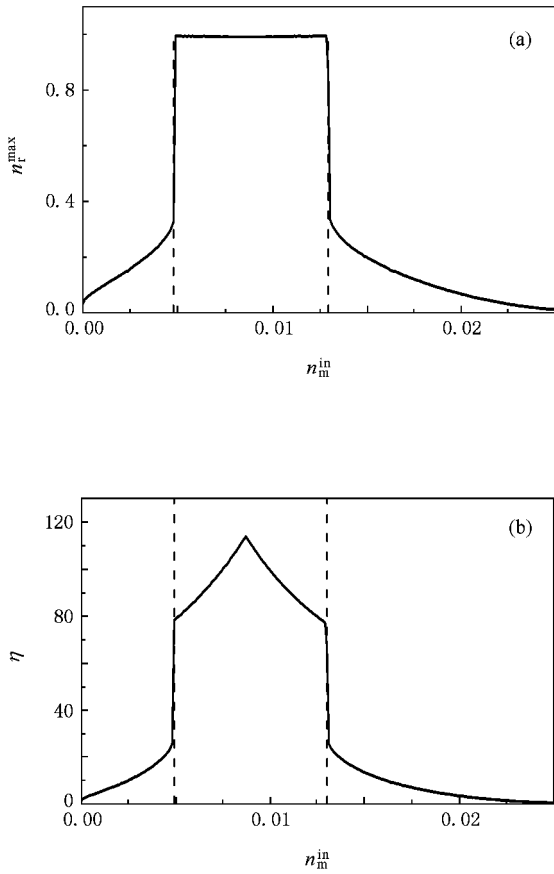


图 4 中间势阱的初始粒子数 n_m^{in} 对隧穿到右阱的最大粒子数 n_r^{max} 及 η 的影响 (a) n_m^{in} 与 n_r^{max} 的关系 (b) η 随 n_m^{in} 的变化

右阱中,而对于 $n_m^{\text{in}} = 0$ 的情形,随着 γ_m 的变化,右阱中的最大粒子数一直很小.图 5(b)是 η 随 γ_m 的变化情况.同样对于中间阱初始粒子数为 $n_m^{\text{in}} = 0.01$ 情形,随着中间势阱基态能量 γ_m 的增加 η 值持续变大,并在 $\gamma_m = 0$ 附近产生一个小小的平台区.对于中间阱初始粒子数 $n_m^{\text{in}} = 0$ 的情况,可以看到 η 的值一直很小.

2.3. 初始相位

相位作为一个重要的物理量,在量子系统中具有至关重要的地位.以上的讨论都是在初始相位为零的条件下进行的,下面考察不同的初始相位对系统开关效应的影响.由于

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{n_1} e^{i\theta_1}, \\ a_m &= \sqrt{n_m} e^{i\theta_m}, \\ a_r &= \sqrt{n_r} e^{i\theta_r}, \end{aligned}$$

因而可定义

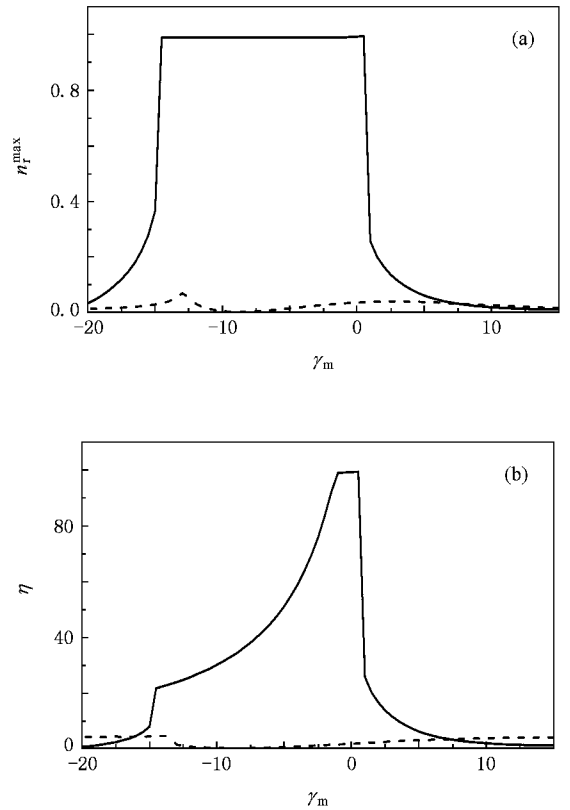


图 5 右阱的最大粒子数以及 η 随中间势阱基态能量 γ_m 的变化情况.实线和虚线分别对应不同的初始粒子数 $n_1^{\text{in}} = 0.99, n_m^{\text{in}} = 0.01$ 和 $n_1^{\text{in}} = 1, n_m^{\text{in}} = 0$.(a)对不同的 γ_m ,右阱的最大值 n_r^{max} 的变化情况 (b) η 随 γ_m 的变化

$$\begin{aligned} \theta_{lm} &= \theta_l - \theta_m, \\ \theta_{rm} &= \theta_r - \theta_m \end{aligned}$$

分别为左阱和中间势阱、右阱和中间势阱的相对相位.图 6(a)给出了不同的初始相位 θ_{lm} 对右阱最大粒子数的影响.我们发现,在初始相位 θ_{lm} 等于零附近的一段参数范围,右阱最大粒子数 n_r^{max} 接近于 1,超出这个范围, n_r^{max} 将变得很小.图 6(b)给出了 η 随初始相位的变化情况.我们也对中间阱和右阱的初始相对相位做了研究,发现与改变初始相位 θ_{lm} 具有完全相同的效果.因此,实验上也可以通过调节两阱的初始相位来控制开关的导通和截止.

上述研究是在粒子数很多的条件下应用平均场近似得到的,即便是中间势阱的粒子数也应满足具有较多粒子数的平均场近似条件.对于系统的量子涨落问题可见文献 [18, 19].此外,在我们所研究的系统中,由于中间势阱的粒子间相互作用较大,并没有发现如文献 [14] 所提到的三势阱系统的不稳定性.对于这方面相关研究可见文献 [19—22].

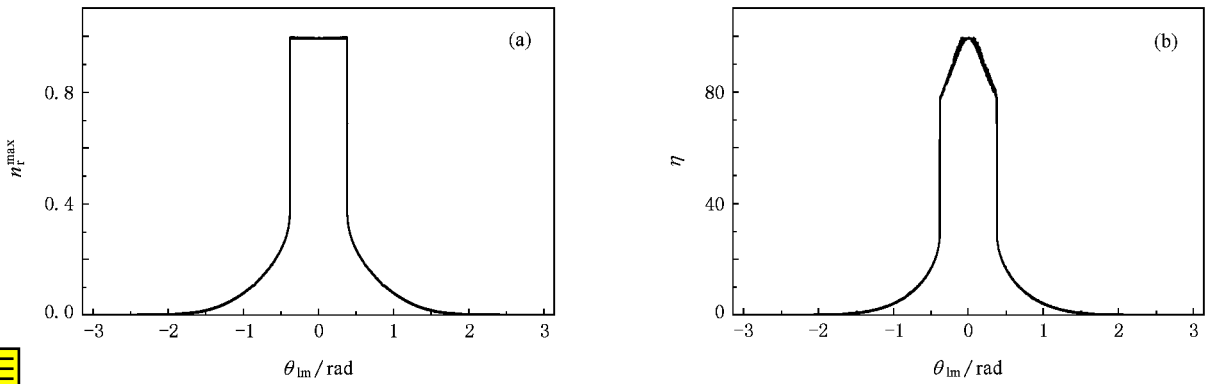


图 6 右阱的最大粒子数 n_r^{\max} 以及 η 随初始相位的变化情况 (a) 右阱的最大粒子数的变化情况 (b) η 的变化情况

3. 结 论

本文从理论上研究了 BEC 在不同相互作用的三势阱系统中, 通过中间势阱粒子数的微小改变实现控制大量粒子输运的导通与截止行为. 在实验上, 可以通过调节磁场的方法改变每个阱中的相互作用强度, 以实现上述模型的开关效应. 由于系统的导通

与截止非常敏感地依赖于中间势阱的粒子数, 因此我们可以通过观察右阱的粒子数来探测中间势阱粒子数的微小改变. 这可能将进一步提高基于 BEC 的精确测量技术的精度. 另外, 如把若干个相同装置串联起来, 有可能实现多级控制的模型. 以极少量粒子控制大量粒子输运的模型将为精确测量、原子芯片及量子计算机等技术实现提供可能的理论基础.

- [1] Parkins A S , Walls D F 1998 *Phys. Rep.* **303** 53
- [2] Stickney J A , Anderson D Z , Zozulya A A 2007 *Phys. Rev. A* **75** 013608
- [3] Seaman B T , Krämer M , Anderson D Z , Holland M J 2007 *Phys. Rev. A* **75** 023615
- [4] Micheli A , Daley A J , Jaksch D , Zoller P 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 140408
- [5] Mossmann S , Jung C 2006 *Phys. Rev. A* **74** 033601
- [6] Ananikian D , Bergeman T 2006 *Phys. Rev. A* **73** 013604
- [7] Li W D , Liu J 2006 *Phys. Rev. A* **74** 063613
- [8] Wang G F , Fu L B , Liu J 2006 *Phys. Rev. A* **73** 013619
- [9] Wang G F , Fu L B , Zhao H , Liu J 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5003 (in Chinese) [王冠芳、傅立斌、赵 鸿、刘 杰 2005 物理学报 **54** 5003]
- [10] Ma Y , Fu L B , Yang Z A , Liu J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5623 (in Chinese) [马 云、傅立斌、杨志安、刘 杰 2006 物理学报 **55** 5623]
- [11] Ye D F , Fu L B , Zhao H , Liu J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5071 (in Chinese) [叶地发、傅立斌、赵 鸿、刘 杰 2007 物理学报 **56** 5071]
- [12] Wang G F , Liu B , Fu L B , Zhao H 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3733 (in Chinese) [王冠芳、刘 彬、傅立斌、赵 鸿 2007 物理学报 **56** 3733]
- [13] Wang G F , Ye D F , Fu L B , Chen X Z , Liu J 2006 *Phys. Rev. A* **74** 033414
- [14] Liu B , Fu L B , Yang S P , Liu J 2007 *Phys. Rev. A* **75** 033601
- [15] Roberts J L , Claussen N R , Burke J P , Cornell E A , Wieman C E 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 5109
- [16] Vuletić V , Kerman A J , Chin C , Chu S 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 1406
- [17] Inouye S , Andrews M R , Stenger J , Miesner H J , Kurn D M , Ketterle W 1998 *Nature* **392** 151
- [18] Fu L B , Liu J 2006 *Phys. Rev. A* **74** 063614
- [19] Liu J , Wang W , Zhang C W , Niu Q , Li B W 2005 *Phys. Rev. A* **72** 063623
- [20] Liu J , Zhang C W , Raizen G , Niu Q 2006 *Phys. Rev. A* **73** 013601
- [21] Liu J , Hu B B , Li B W 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 1749
- [22] Zhang C W , Liu J , Raizen M G , Niu Q 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 054101

Switch effect of Bose-Einstein condensates in a triple-well potential^{*}

Wang Hai-Lei^{1,2)} Yang Shi-Ping¹⁾

¹ *College of Physics Science and Information Engineering, Hebei Normal University, Shijiazhuang 050016, China*

² *Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088, China*

(Received 8 December 2007; revised manuscript received 15 February 2008)

Abstract

We propose a scheme utilizing mean-field approach to exhibits the switching effect in a symmetrical Bose-Einstein condensate triple-well potential. Our study shows that tunneling from the left well to the right well of a large number of atoms can be controlled by a small amount of atoms in the middle well. We also discuss the role played by the relative phase and the relation between the zero-point and the critical value of working range. The potential applications of our model are pointed out.

Keywords : Bose-Einstein condensate , switching effect , triple-well potential , mean-field approach

PACC : 0530J , 0365 , 4250 , 7335

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10725521 , 10604009) and the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant Nos. 2006CB921400 , 2007CB814800).