

非线性函数耦合的 Chen 吸引子网络的混沌同步^{*}

于洪洁 郑 宁

(上海交通大学工程力学系, 上海 200240)

(2007 年 10 月 13 日收到 2008 年 3 月 12 日收到修改稿)

利用非对称非线性函数耦合混沌同步方法, 讨论了 Chen 吸引子的混沌同步问题. 数值模拟分析初始值和耦合强度因子的选择对于实现混沌同步的影响. 将非对称非线性函数耦合同步方法进一步推广发展到完全连接网络和由星形子网络构成的复杂大网络混沌同步的研究中. 提供了确定网络中神经元之间混沌同步状态稳定性的误差发展方程, 并讨论各个耦合强度因子对网络同步稳定性过程的影响, 给出了相应的稳定性范围. 通过数值模拟证明利用非线性函数作为耦合函数, 实现完全连接网络、星形子网络构成大网络的混沌同步是有效的. 可以预测在网络的混沌同步中非对称非线性耦合方法也有很好的发展前景.

关键词: 非线性耦合函数, Chen 吸引子, 混沌同步, 网络

PACC: 0545

1. 引 言

近 20 多年来, 混沌同步和控制问题在物理、生物等系统中已被广泛地研究^[1-7]. 由于混沌行为对初始条件和噪声的敏感性, 实际物理系统中很难观测到混沌同步. Pecora 和 Carroll^[1]建议了一个使连续时间系统混沌同步的方法, 称为 PC 方法. PC 方法用于一些混沌系统(如 Lorenz 系统、Rössler 系统等)的同步简单而有效. 混沌同步在安全通信系统中的应用在文献 [8-10] 中已有报道. Chen 等^[11]于 1999 年在混沌系统的反控制研究中发现了一个新的系统, 被称为 Chen 吸引子. Chen 吸引子与 Lorenz 吸引子有着相似的结构, 但它们是拓扑不等价的, Chen 吸引子有着多种复杂的动力学行为.

人的大脑组织是一个自组织非线性系统, 由大量神经族群组成. 大脑的有目的和协调行为是神经系统的特别功能. 同步振荡的存在支持这样一种观点: 在脑中信息处理是通过神经族群携带, 而不是通过个别的细胞. 近些年来, 有关耦合神经系统的动力学的研究工作, 诸如起因于合作特性的神经活动的同步模式等研究, 已引起相当多的关注. 神经活动有选择性的同步活动, 在解决脑信息处理所谓的绑定问题时会起到重要作用. 信息处理被分散在脑的不同区域之间, 而这个信息如何被连接尚不清楚.

在皮层的一个级别上, 神经同步放电将会处理相同认知的部分. 在对应不同认知的信息处理过程中, 脑会达到一个高度平行, 会对一些种类信息进行等级处理. 在级联中, 皮层的不同级别相继绑定一个给定认知的几个方面. 因此, 研究神经同步现象具有重要的意义, 特别是在理解相隔较远的神经同步和脑信息的处理方面. 目前研究由 Fitzhugh-Nagumo 神经元模型、Hindmarsh-Rose 及 Chay 神经元模型等形成的网络, 耦合方式比较简单, 网络规模较小. 由于神经元活动的同步放电活动涉及复杂的物理、化学过程以及受到诸多因素的影响, 其相互之间的耦合方式是复杂多样的. 研究混沌神经网络复杂的动力学行为在信息处理和优化计算等方面有广阔的应用前景. 另外, 现在只有很少的文献是研究关于网络与网络之间的信息传递、同步分析, 而对不同区域的若干个神经网络之间、不同级别的网络之间以及由不同神经元模型组成的神经网络之间的研究却很少. 本文研究这些涉及到脑信息的并行与分级处理的复杂大规模网络之间的同步问题.

以往研究耦合振荡器的混沌同步大多是关于线性耦合函数问题^[2], 仅有少量的文献涉及到通过非线性函数反馈的混沌同步问题^[12, 13]. Yu 和 Liu 于 2003 年提出一个基于线性系统稳定性准则的混沌同步方法——稳定性准则(SC)方法^[2], 通过对驱动混沌系统的线性项与非线性项的适当分离, 构造一

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 10572086)和高等学校博士学科点专项科研基金(批准号: 20050248031)资助的课题.

个受驱动系统的非线性项驱动响应混沌系统,利用线性系统稳定性准则保证两个系统的同步. SC 方法适用于自治、非自治混沌系统、高维混沌系统以及超混沌系统的同步,方法简单有效. SC 方法是通过主系统变量单向驱使响应系统实现响应系统与主系统状态同步的. 文献 [14] 发展了 SC 方法,提出利用非线性函数对称耦合实现两个超混沌系统同步的方法,即通过非线性耦合项的构造使两个超混沌系统对称耦合,两个超混沌系统的状态变量互相驱使实现同步的目标. 文献 [15] 利用 SC 方法研究了非对称耦合的两个超混沌 Rössler 系统的同步问题、由超混沌 Rössler 系统单元按照星形连接形式组成网络的超混沌同步问题.

本文以 Chen 吸引子为例,利用非对称非线性函数耦合方法实现两个 Chen 混沌吸引子的同步,并将该方法发展推广到 Chen 吸引子完全连接网络及由星形子网络构成的大网络混沌同步的研究中. 其中子网络是 Chen 混沌吸引子按照星形连接形式组成的,表示某一级别或脑皮层某一区域的网络. 子网络之间按照完全连接形式构成一个大的复杂网络,大网络表示不同区域的若干个子神经网络之间或不同级别的子网络之间按照某一方式进行信息传递与处理.

2. 非对称非线性耦合混沌系统同步

考虑如下描述的混沌连续时间系统:

$$\dot{X}(t) = F(X(t), t), \quad (1)$$

式中 $X(t) \in R^n$ 为 n 维状态矢量, $F: R^n \rightarrow R^n$. 将 F 适当分离为

$$\dot{X}(t) = G(X(t)) - D(X(t), t). \quad (2)$$

这里 $G(X(t))$ 是经过特殊配置的 $F(X(t), t)$ 的线性部分,

$$G(X(t)) = AX(t), \quad (3)$$

式中 A 为满秩的常数矩阵,通过适当的分离配置可使 A 的所有特征值均具有负实部.

$$-D(X(t), t) = F(X(t), t) - G(X(t))$$

为 $F(X(t), t)$ 的非线性部分,此时原系统(1)可写作

$$\dot{X}(t) = AX(t) - D(X(t), t). \quad (4)$$

本文讨论的同步为完全同步,即恒等同步. 对于原连续时间混沌系统(4),利用非线性函数 $D(X_1)$ 与 $D(X_2)$ 的差作为耦合函数,构造如下两个新系统:

$$\begin{aligned} \dot{X}_1(t) &= AX_1(t) - D(X_1(t), t) \\ &\quad + \alpha [D(X_1(t), t) - D(X_2(t), t)] \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \dot{X}_2(t) &= AX_2(t) - D(X_2(t), t) \\ &\quad + \beta [D(X_2(t), t) - D(X_1(t), t)] \end{aligned} \quad (6)$$

式中 $X_1, X_2 \in R^n$ 为所构造新系统的状态矢量,耦合强度因子 α, β 为常值,当 $\alpha = \beta$ 时为对称耦合. 当 $X_1(t) = X_2(t)$ 时,新系统(5)和(6)即与原系统(1)一致,保持其混沌动力特性. 新系统(5)和(6)之间的同步误差

$$e(t) = X_1(t) - X_2(t).$$

当 $e(t)$ 充分小时,其变化规律近似用线性方程表示为

$$\dot{e}(t) = \left[A + (\alpha + \beta - 1) \frac{\partial D}{\partial X} \right] e. \quad (7)$$

当 $\alpha + \beta = 1$ 时, $e(t)$ 的零点为平衡点. 由于 A 的所有特征值实部均为负值,根据线性系统稳定性准则,同步误差的零点为渐近稳定,当 $t \rightarrow \infty$ 时, $e(t) \rightarrow 0$. 此时即实现新系统(5)和(6)的状态向量 $X_1(t)$ 和 $X_2(t)$ 的完全同步. 当 $\alpha + \beta \neq 1$ 时,需要计算方程(7)的条件 Lyapunov 指数,若同步状态具有稳定性,则条件 Lyapunov 指数为负值. 当 $\alpha = \beta = 0.5$ 时,就是文献 [13] 中的对称耦合实现两个超混沌系统同步的情况.

对于 Chen 吸引子,其微分方程描述如下:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y - x), \\ \dot{y} &= (c - a)x - xz + cy, \\ \dot{z} &= xy - bz. \end{aligned} \quad (8)$$

当参数取 $a = 35, b = 3, c = 28$ 时,Chen 系统为混沌吸引子(图 1). 采用非对称非线性函数耦合方法对 Chen 吸引子进行混沌同步研究,按照(2)式将系统(8)的右端函数分离为函数 $G(X(t))$ 和 $D(X(t))$,即

$$\begin{aligned} G(x, y, z) &= \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ c - a & \mu & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \\ D(x, y, z) &= \begin{pmatrix} 0 \\ (\mu - c)y + xz \\ -xy \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

矩阵 A 的配置不唯一,有很多种,只要在原系统的

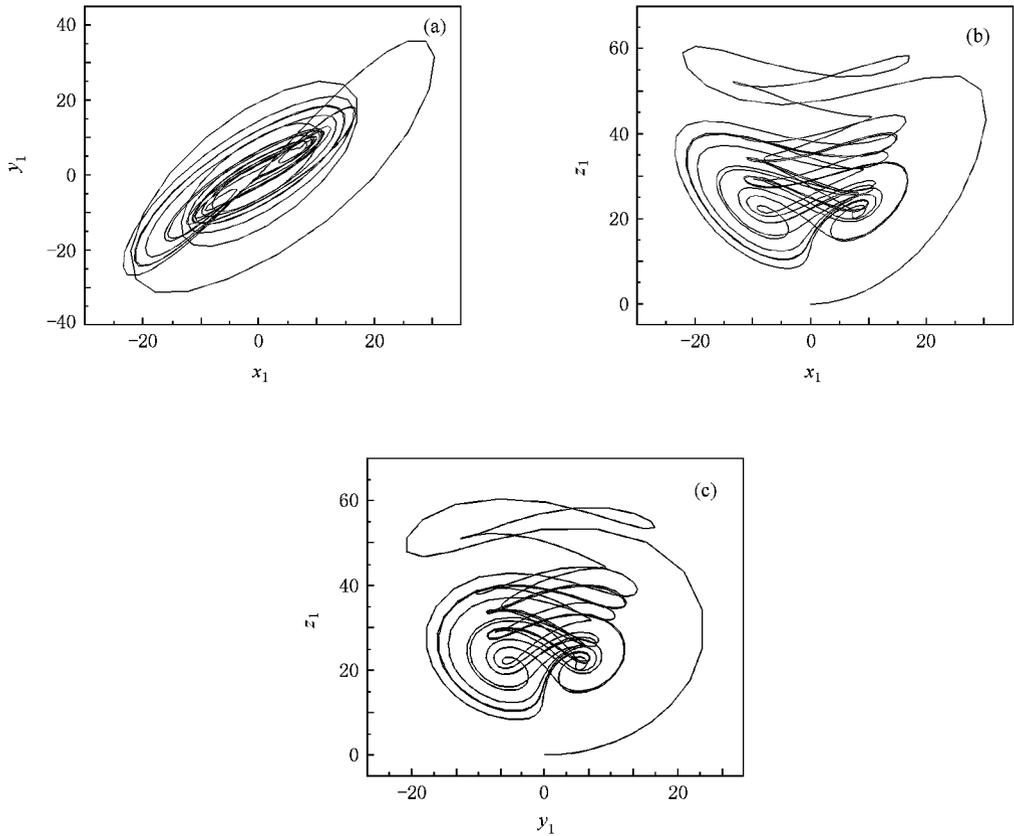


图1 Chen 吸引子相图 (a)在 x_1-y_1 相平面 (b)在 x_1-z_1 相平面 ,(c)在 y_1-z_1 相平面

线性部分上加(减)某些项,使其特征值实部均为负值. 这里为配置 A 增加了一个可调参数 μ . 本文取 $\mu = 5$, 则矩阵 A 特征值为 $(\lambda_1 = -27.45, \lambda_2 = -2.55, \lambda_3 = -3.00)$, 均含有负实数. 按系统(5)和

(6)可以构造两个非对称非线性函数耦合的新系统

$$\begin{aligned} \dot{X}_1(x_1, y_1, z_1) &= F_1(X_1(t)), \\ \dot{X}_2(x_2, y_2, z_2) &= F_2(X_2(t)), \end{aligned}$$

即

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{z}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ax_1 + ay_1 \\ (c-a)x_1 - x_1z_1 + cy_1 \\ x_1y_1 - bz_1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ [(\mu-c)y_1 + x_1z_1] - [(\mu-c)y_2 + x_2z_2] \\ -x_1y_1 + x_2y_2 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ax_2 + ay_2 \\ (c-a)x_2 - x_2z_2 + cy_2 \\ x_2y_2 - bz_2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ [(\mu-c)y_2 + x_2z_2] - [(\mu-c)y_1 + x_1z_1] \\ -x_2y_2 + x_1y_1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

下面讨论不同初值和不同耦合强度因子的选取对于实现这两个新系统的混沌同步的影响.

为了研究不同的初值对于混沌同步的影响,在采用 $\alpha = \beta = 0.5$ 的情况下,表 1 给出了 4 组不同的初始值,比较状态变量 x 同步的时间历程(图 2). 状态变量 x 的初始误差为 $x_1(1) - x_2(1) = -1$,

$e_2 = x_1(2) - x_2(2) = -3, e_3 = x_1(3) - x_2(3) = 0, e_4 = x_1(4) - x_2(4) = -2$. 由图 2 可知,尽管有较大的初始误差,但是在经历一个很短的瞬态过程后几乎同时达到同步,可见不同的初始值对于混沌同步过程没有很大的影响. 同样,在选取不同的耦合强度因子(包括 $\alpha = \beta$ 及 $\alpha \neq \beta$)进行数值模拟时,不同的

初值对于同步过程的影响不大.

表 1 不同的初始值 ($\alpha = \beta = 0.5$)

	x_1, x_2	y_1, y_2	z_1, z_2
第一组	3, 4	4, 5	20, 21
第二组	3, 6	4, 8	20, 30
第三组	4, 4	6, 5	30, 21
第四组	4, 6	6, 8	30, 40

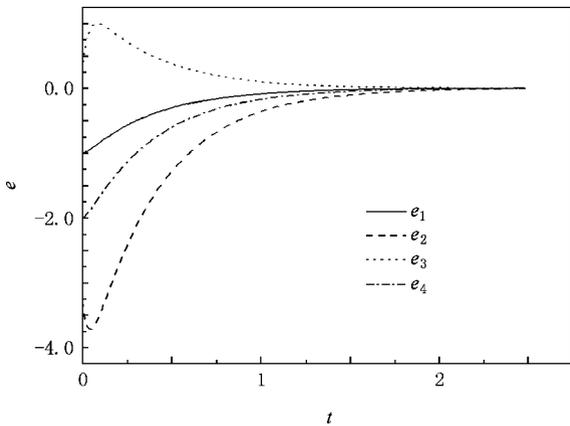


图 2 状态变量 x 在不同初值下误差的时间历程

耦合强度因子的选择对于吸引子的同步过程有着怎样的影响呢? 我们对于双向耦合采用不同的耦合强度因子进行比较. 首先, 取 5 组不同的耦合强度因子, 它们的和为 1 (即 $\alpha + \beta = 1$) 的情况 (表 2). 两个系统的状态变量 x 同步误差的时间历程见图 3. 由图 3 可以发现, 当 $\alpha + \beta = 1$ 时, 不管 α 和 β 取什么值, 同步的时间历程曲线始终相同, 而且是一条非常光滑的非振荡曲线, 瞬态过程都非常短暂. 参考 (7) 式, 在 $\alpha + \beta = 1$ 时, $\dot{e}(t) = Ae$, $e(t)$ 的零点为平衡点, 满足线性系统稳定性准则, 同步误差的零点为渐近稳定, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $e(t) \rightarrow 0$, 可以实现两个系统的状态向量 $X_1(t)$ 和 $X_2(t)$ 的完全同步.

表 2 不同的耦合强度因子值 ($\alpha + \beta = 1$)

	α	β
第一组	0.1	0.9
第二组	0.3	0.7
第三组	0.5	0.5
第四组	0.7	0.3
第五组	0.9	0.1

我们又取 5 组组合, 每组的耦合强度因子 α 与 β 之和分别为 1, 2, 3, 4, 5, 误差同步的时间历程见图

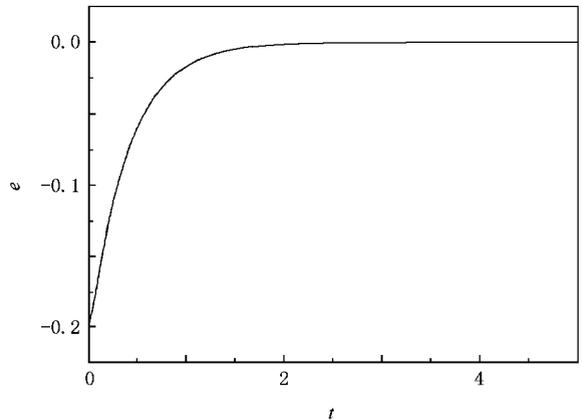


图 3 耦合强度因子之和为 1 时误差的时间历程

4. 从图 4 可以清楚地看到, 在 $\alpha = \beta = 0.5$ 的情况下, 误差的时间历程曲线为一光滑非振荡曲线, 误差比较快速地趋于零. 而其他几种情况下的同步误差曲线都比较曲折, 而且 $\alpha + \beta$ 的值越大, 曲线振荡变化越大, 需要迭代的步数也就越多. 由此可知, 耦合强度因子的选取对于能否快速实现同步有着重要的影响, 而在双向非对称非线性耦合函数方法的同步中, 耦合强度因子之和为 1 是一个临界点, 可以作为选取耦合强度因子的参考值, 此时的同步过程稳定, 曲线光滑, 经历相对较少的瞬态过程.

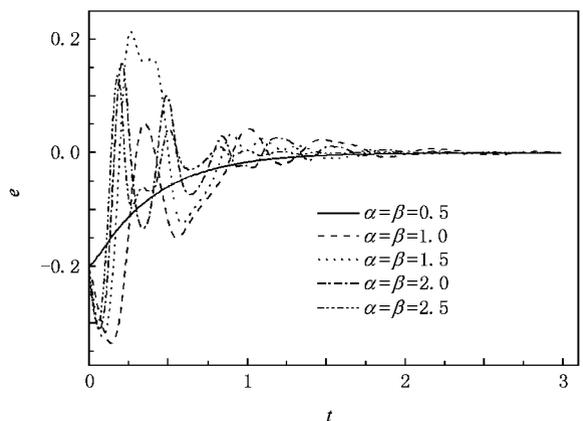


图 4 不同耦合强度因子下误差的时间历程

3. 完全连接- Chen 吸引子网络的同步

以上讨论的都是两个 Chen 混沌吸引子的混沌同步过程, 下面将方法推广到由多个混沌吸引子组成的网络中去. 我们把 N 个非线性耦合的 Chen 吸引子表示成如下形式:

$$\begin{aligned} \dot{X}_i(t) = & AX_i(t) - D(X_i(t)) \\ & + \alpha_{\text{all}} \sum_j^N \bar{G}_{ij} D(X_j(t)). \end{aligned} \quad (11)$$

这里 α_{all} 是完全连接网络的耦合强度因子, \bar{G} 是耦合连接系数矩阵 $\{\bar{G}_{ij}\}$, 并且满足 $\sum_{j=1}^N \bar{G}_{ij} = 0$. $D(X)$ 是已提到过的经过特殊构建的非线性函数. 完全连接形式网络的连接矩阵 \bar{G} 的所有元素为 $\bar{G}_{ij} = -1 (i \neq j), \bar{G}_{ii} = N - 1$. 令

$$e_i = X_i - X_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, N - 1),$$

则第 i 及 $i + 1$ 个吸引子之间的误差发展微分方程可以近似线性地写成如下形式:

$$\begin{aligned} \dot{e}_i(t) = & \left[A + (N\alpha_{\text{all}} - 1) \frac{\partial D}{\partial X} \right] e_i \\ & (i = 1, 2, \dots, N - 1). \end{aligned} \quad (12)$$

显然, 对于 $\alpha_{\text{all}} = 1/N$, 同步误差 $e(t)$ 的零点渐近稳定, 当 $t \rightarrow \infty$ 时 $e(t)$ 趋向于零. (11) 式中的两个吸引子的状态向量 $X_i(t)$ 和 $X_{i+1}(t)$ 可以达到完全同步. 由 (12) 式可知, 任意两个 $X_i(t)$ 和 $X_{i+j}(t)$ 之间的误差发展方程是一样的. 检验同步状态的稳定性, 只要计算 (12) 式中第 i 个误差发展方程的最大条件 Lyapunov 指数便足够, 这样可以大大简化计算过程. (12) 式表示的误差具有简单的形式, 给定一个完全连接耦合强度因子 α_{all} , 就可以通过计算最大条件 Lyapunov 指数判断同步状态的稳定性. 当耦合强度因子 $\alpha_{\text{all}} = 1/N$ 时, 并不需要计算最大条件 Lyapunov 指数, 同步稳定性可以得到保证.

根据 (11) 式构造由 4 个 Chen 吸引子构成的完全连接网络. 这里取 $N = 4$, A 和 D 如上所取. 取 $\alpha_{\text{all}} = 1/4 = 0.25$, 参数 a, b, c, μ 如上所取, 利用四阶 Runge-Kutta 法进行数值求解. 图 5(a) 是误差 $x_1 - x_2, x_1 - x_3, x_1 - x_4$ 随时间变化的时间历程图. 从图 5(a) 可以看出, 初始误差虽然差别很大, 但误差都迅速趋于零, 实现 4 个吸引子的状态变量 x 的完全同步. 图 5(b) 是状态变量 z_1, z_2, z_3, z_4 的时间历程. 从图 5(b) 可以直观地看到, 状态变量 z_1, z_2, z_3, z_4 在初始值相差甚大的情况下, 也在经一个瞬态过程后实现了同步. 4 个 Chen 吸引子在利用非线性函数作为耦合函数, 通过完全连接形式构成的网络, 也能成功实现状态变量的完全同步, 对于 4 个及 4 个以上混沌吸引子构成的完全连接网络的同步问题, 可以参照 (11) 式进行耦合.

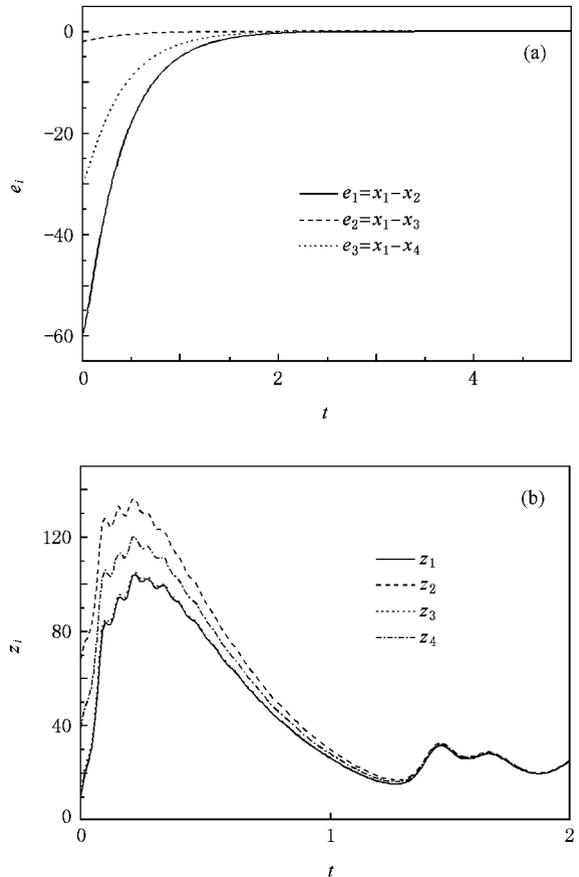


图 5 状态变量 x 的误差时间历程及状态变量 z 的同步时间历程 (a) 状态变量 x 的误差时间历程 (b) 状态变量 z 的同步时间历程

4. 星形子网络构成大网络的同步

作为非线性耦合函数在网络同步当中的应用, 我们进一步推广非对称非线性函数耦合方法到由子网络构成的大网络之间的同步问题. 首先将 N 个混沌吸引子按照星形连接构成星形子网络, 然后将 M 个这样的星形子网络的中心神经元按照完全连接形式组成复杂的大网络. 讨论这个大网络中混沌吸引子的同步问题, 大网络的连接如图 6 所示.

把 N 个 Chen 吸引子按照 (11) 式构建星形连接形式的子网络, 其矩阵 \bar{G} 的元素应满足

$$\bar{G} = \begin{pmatrix} N - 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

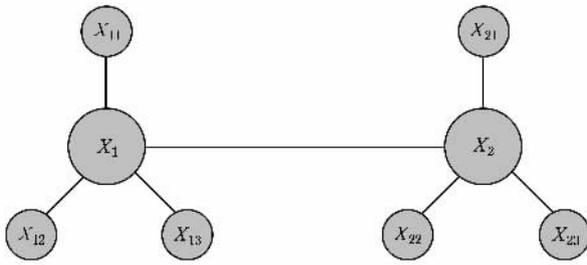


图6 大网络连接示意图

这里建立的是星形子网络,为了表述得更加清楚,在(11)式中,第一个混沌吸引子的微分方程中的耦合强度因子设为 α_{star} ,第 i 个混沌系统的耦合强度因子设为

$$\alpha_i = \beta_{\text{star}} \quad (i = 2, 3, \dots, N).$$

令

$$e_i = X_i - X_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, N-1),$$

则第 i 个及第 $i+1$ ($i=2, 3, \dots, N-1$) 个吸引子之间的误差发展微分方程可以近似线性地写成如下形式:

$$\dot{e}_i = \left[A + (\beta_{\text{star}} - 1) \frac{\partial D}{\partial X} \right] e_i, \quad (i = 2, 3, \dots, N-1). \quad (13)$$

从(13)式可以看出,当 $\beta_{\text{star}} = 1.0$ 时, e_i 的零点为平衡点,由于 A 的所有特征值实部均为负值,根据线性系统稳定性准则,同步误差发展方程(13)是渐近稳定的,当 $t \rightarrow \infty$ 时,满足 $X_2 = X_3 = \dots = X_N$. 在此基础上,给出第一个神经元与第二个神经元之间的同步误差发展方程

$$\dot{e}_1 = \left[A + ((N-1)\alpha_{\text{star}} + \beta_{\text{star}} - 1) \frac{\partial D}{\partial X} \right] e_1. \quad (14)$$

从(14)式可以看出,当 $\alpha_{\text{star}} = 0.0, \beta_{\text{star}} = 1.0$ 时, e_1 的零点为渐近稳定的平衡点,当 $t \rightarrow \infty$ 时,满足 $X_1 = X_2$. 至此即实现该网络系统所有状态变量的完全同步. 当 $\alpha_{\text{star}} = 0.0$ 时,这种情况属于星形网络中第一个(中心)神经元单向驱使其他(周围)神经元的情况. 所以在星形连接中,满足 $\beta_{\text{star}} = 1$ 及 $\alpha_{\text{star}} = 0$ 时,所有的吸引子可以实现完全同步.

本文取 $M=2, N=3$ 对大网络的混沌同步进行数值仿真模拟,即两个星形子网络的中心神经元通过完全连接把子网络构成一个复杂大网络. 每个星形子网络的中心神经元各自与周围三个神经元(吸引子)星形连接. 设两个星形子网络的中心神经元

为 X_1, X_2 , 与 X_1, X_2 相连的三个节点神经元分别是 $(X_1^1, X_1^2, X_1^3), (X_2^1, X_2^2, X_2^3)$, 连接方程为

$$\begin{aligned} \dot{X}_i &= AX_i - D(X_i) + \alpha_{\text{star}i} [3D(X_i) - D(X_i^1) \\ &\quad - D(X_i^2) - D(X_i^3)] \\ &\quad + \alpha_{\text{all}} [D(X_i) - D(X_{i+1})], \\ \dot{X}_i^1 &= AX_i^1 - D(X_i^1) + \beta_{\text{star}} [-D(X_i) + D(X_i^1)], \\ \dot{X}_i^2 &= AX_i^2 - D(X_i^2) + \beta_{\text{star}} [-D(X_i) + D(X_i^2)], \\ \dot{X}_i^3 &= AX_i^3 - D(X_i^3) + \beta_{\text{star}} [-D(X_i) + D(X_i^3)], \end{aligned} \quad (15)$$

式中 $i=1, 2$, 当 $i=2$ 取 $i+1=1$. 设第一个星形子网络中每个吸引子的状态变量的初始值为 $x_1 = -5, y_1 = 1, z_1 = 5; x_{11} = -5.2, y_{11} = 1.3, z_{11} = 4.8; x_{12} = -5.4, y_{12} = 0.7, z_{12} = 5.2; x_{13} = -4.7, y_{13} = 1.4, z_{13} = 4.6$. 第二个星形子网络中每个吸引子的状态变量的初始值为 $x_2 = -4, y_2 = 2, z_2 = 10; x_{21} = -4.2, y_{21} = 2.1, z_{21} = 9.7; x_{22} = -4.4, y_{22} = 2.3, z_{22} = 9.5; x_{23} = -3.7, y_{23} = 1.8, z_{23} = 10.2$.

令 $\alpha_{\text{star}1} = \alpha_{\text{star}2} = 0.0, \beta_{\text{star}} = 1.0, \alpha_{\text{all}} = 0.5$, 即两个星形子网络的中心神经元都是单向驱使周围神经元,两个中心神经元是以耦合强度因子 $\alpha_{\text{all}} = 0.5$ 完全连接的. 通过 Runge-Kutta 法进行数值求解,可以看到两个星形子网络的中心吸引子之间以及它们各自星形连接的三个吸引子之间实现了完全同步. 图 7(a) 为第一个星形子网络的四个混沌吸引子(神经元)的状态变量 x 的同步误差历程,图 7(b) 为第二个星形子网络的四个混沌吸引子的状态变量 y 的同步时间历程. 图 8 为两个星形子网络的中心吸引子的状态变量 z 的同步时间历程. 由图 7、图 8 可见,这种两个中心吸引子完全连接,并且每个吸引子各与 N 个吸引子星形连接的方式可以实现最终的所有吸引子之间的完全同步.

计算星形子网络的条件 Lyapunov 指数,给出耦合强度因子满足同步稳定性要求的范围. 取吸引子 (x_1, y_1, z_1) 和 (x_{11}, y_{11}, z_{11}) 之间的误差,即 $e_1 = x_1 - x_{11}, e_2 = y_1 - y_{11}, e_3 = z_1 - z_{11}$. 首先讨论 $\alpha_{\text{star}1} = \alpha_{\text{star}2} = 0, \beta_{\text{star}1} = 1$ 时,完全连接耦合强度因子 α_{all} 满足同步稳定性要求的最大条件 Lyapunov 指数 λ_{max} 谱如图 9 所示. 由图 9 可以看到,当 $\alpha_{\text{all}} \in [0.25, 0.70]$ 时,最大条件 Lyapunov 指数始终为负,即在这个范围内始终满足同步稳定性要求,当 $\alpha_{\text{all}} > 0.70$ 时,由于耦合强度因子过大,状态变量

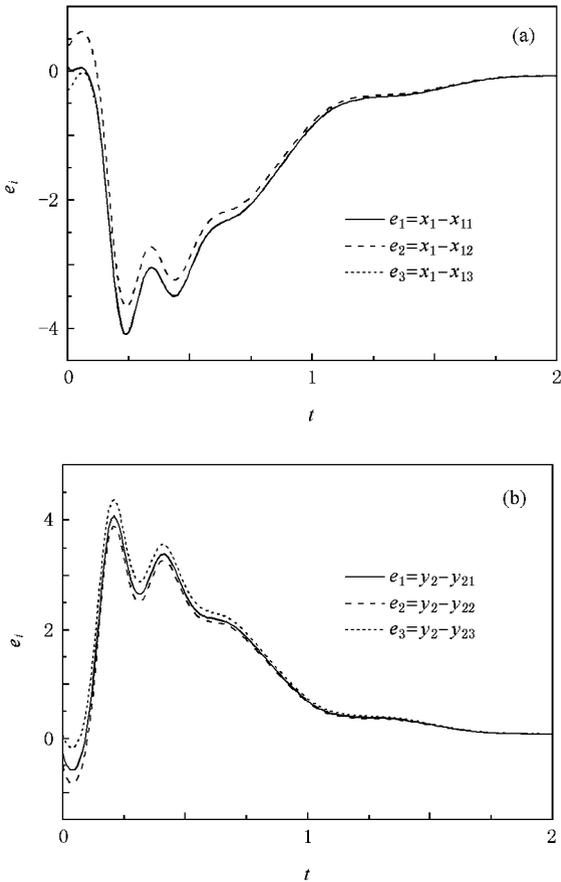


图 7 星型网络状态变量误差时间历程 (a) 第一个星形子网络状态变量 x 的误差时间历程 (b) 第二个星形子网络状态变量 y 的误差时间历程

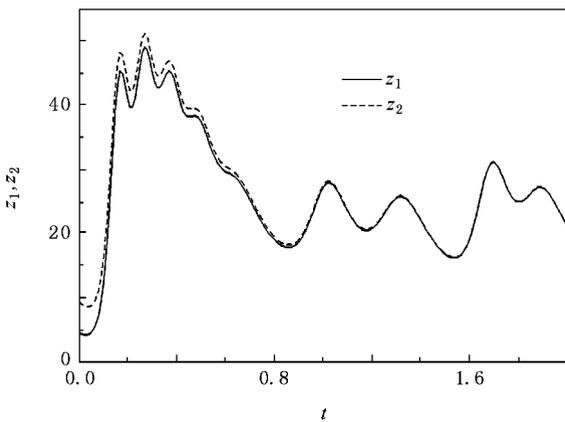


图 8 状态变量 z_1 与 z_2 的时间历程

数值溢出,不能实现混沌同步.

下面讨论当 $\alpha_{star1} = \alpha_{star2} = 0, \alpha_{all} = 0.5$ 时,每个星形子网络的中心神经元与周围神经元之间耦合强度因子 β_{star} 满足同步稳定性要求的变化范围. 通过

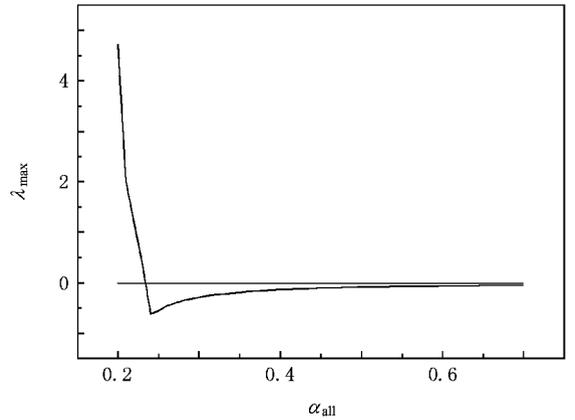


图 9 最大条件 Lyapunov 指数 λ_{max} 谱

计算最大条件 Lyapunov 指数,发现当 $\beta_{star} \in [0.49, 12.43]$ 时,可以实现稳定的混沌同步,在 $\beta_{star} < 0.49$ 时各个吸引子为不同步的混沌状态, $\beta_{star} > 12.43$ 时,耦合强度因子过大,所有状态变量均数值溢出.

最后,讨论当 $\alpha_{all} = 0.5, \beta_{star} = 1$ 时,每个星形子网络的周围神经元与中心神经元之间耦合强度因子 α_{star1} 和 α_{star2} 的变化对吸引子同步的影响. 以上已讨论了 $\alpha_{star1} = \alpha_{star2} = 0$ 的情况,通过计算时间历程和最大条件 Lyapunov 指数,得到 $\alpha_{star1} = \alpha_{star2} \in [-0.06, 0.18]$ 时,满足稳定性要求,可以实现混沌吸引子的同步,其他范围内各吸引子为不同步的混沌状态. 在此范围内,我们分别取 $\alpha_{star1} = \alpha_{star2} = -0.03, \alpha_{star1} = \alpha_{star2} = -0.01, \alpha_{star1} = \alpha_{star2} = 0$ 和 $\alpha_{star1} = \alpha_{star2} = 0.01$,得到 x_1 与 x_{11} 的误差时间历程如图 10 所示. 由图 10 可以看到, $\alpha_{star1} = \alpha_{star2}$ 的值越接近零,误差的变化越平滑,实现同步所需时间也较少,在 $\alpha_{star1} =$

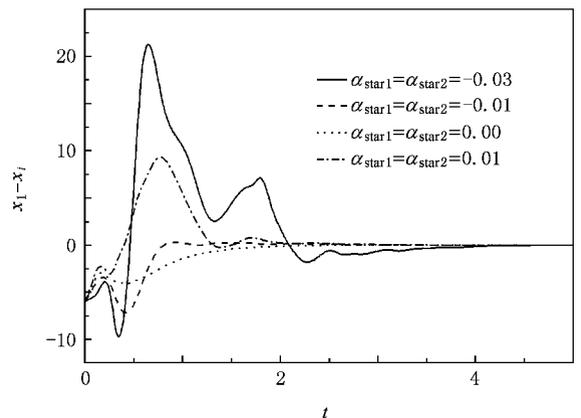


图 10 不同星型连接耦合强度因子 α_{star} 下状态变量 x 误差的时间历程

$\alpha_{\text{star}2} = 0$ 时同步的效果最好.

5. 结 论

本文利用非对称非线性耦合混沌同步方法,讨论了 Chen 吸引子的混沌同步问题,数值模拟分析初始值和耦合强度因子的选择对于实现混沌同步的影响.将非对称非线性耦合同步方法进一步推广到完全连接网络和由星形子网络构成大网络的混沌同步中去.

在研究两个 Chen 混沌吸引子非对称非线性函数耦合同步的过程中,可以看到耦合强度因子的选取会对同步过程产生较大影响.耦合强度因子之和为 1 可以作为选取耦合强度因子的参考值,此时能

实现稳定的混沌同步,且经历相对较少的瞬态过程.

将非对称非线性耦合同步法运用到网络中,研究以 Chen 吸引子为耦合神经单元所构成完全连接网络的混沌同步.提供了确定混沌同步状态稳定性的简单形式的误差发展方程.数值计算结果证实所提出方法的有效性.

研究了由星形子网络按照完全连接形式构成复杂大网络的混沌同步问题,给出了星形子网络的误差发展方程,并讨论若干种情况下耦合强度因子值对同步过程的影响,给出其满足同步稳定性要求的范围.通过数值模拟证明,利用非线性函数作为耦合函数实现星形子网络构成复杂大网络的混沌同步是有效的.

-
- [1] Pecora L M , Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [2] Yu H J , Liu Y Z 2003 *Phys. Lett. A* **314** 292
- [3] Yu H J , Peng J H 2005 *Acta Biophys. Sin.* **21** 295 (in Chinese)
[于洪洁、彭建华 2005 生物物理学报 **21** 295]
- [4] Yu H J , Peng J H , Liu Y Z 2006 *Int. J. Bifur. Chaos* **16** 1049
- [5] Wu X J , Wang X Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 6261 [武相军、王兴元 2006 物理学报 **55** 6261]
- [6] Agiza H N , Yassen M T 2001 *Phys. Lett. A* **278** 191
- [7] Dhamala M , Jirsa V K , Ding M 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 074104
- [8] Cuomo K M , Oppenheim A V 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 65
- [9] Kocarev L , Parlitz U 1995 *Phys. Rev. Lett.* **74** 5028
- [10] Udaltsov V S , Goedgebuer J P , Larger L , Rhodes W T 2001 *Phys. Rev. Lett.* **9** 1892
- [11] Chen G , Ueta T 1999 *Int. J. Bifur. Chaos* **9** 1465
- [12] Ali M K , Fang J Q 1997 *Phys. Rev. E* **55** 5285
- [13] Cheng Y X , Wang G R 1995 *Acta Phys. Sin.* **44** 1382 (in Chinese) [成雁翔、王光瑞 1995 物理学报 **44** 1382]
- [14] Yu H J , Liu Y Z 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3029 (in Chinese) [于洪洁、刘延柱 2005 物理学报 **54** 3029]
- [15] Qin J , Yu H J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 50 (in Chinese) [秦洁、于洪洁 2007 物理学报 **56** 50]

Chaotic synchronization of network of Chen 's chaotic attractors using nonlinear coupling function *

Yu Hong-Jie Zheng Ning

(*Department of Engineering Mechanics , Shanghai Jiaotong University , Shanghai 200240 , China*)

(Received 13 October 2007 ; revised manuscript received 12 March 2008)

Abstract

This article offers a method to realize the synchronization of non-symmetrically nonlinear-coupled chaotic systems , studies the chaotic synchronization of Chen 's chaotic attractors , and analyzes the influence of chaotic synchronization by numerical simulation under different coupling strengths and different initial conditions . We also extend the synchronization method of non-symmetrically nonlinear-coupled systems to the study of large network linked by numerous Chen 's attractor system units by all-to-all-coupling and star coupling . We deduced the equation of errors which ensures the stability of synchronous state , studied the influence of different coupling strengths on synchronization stability and determined the range of coupling strengths which ensures the synchronization . By numerical simulation we proved that if we choose nonlinear functions as coupling functions , it effectively realizes the synchronization of all-to-all-coupling network and large network linked from star sub-networks . We can foresee that the non-symmetrically nonlinear-coupled synchronization method could be widely used in network synchronization .

Keywords : nonlinear coupling function , Chen 's attractor , chaotic synchronization , networks

PACC : 0545

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China(Grant No. 10572086) and the Doctoral Program Foundation of Institution of Higher Education of China(Grant No. 20050248031).