

# 基于主动滑模控制的一类混沌系统异结构反同步

刘福才<sup>†</sup> 宋佳秋

(燕山大学自动化系, 秦皇岛 066004)

(2007 年 12 月 1 日收到, 2008 年 2 月 15 日收到修改稿)

针对一类连续时间混沌系统, 基于主动控制思想, 提出了一种主动滑模控制策略, 使得一类混沌系统可以达到异结构反同步, 其中响应系统的线性部分和控制器参数决定闭环误差及反同步的趋近律. 基于 Lyapunov 稳定性理论分析了系统的稳定性. 以 Lorenz 系统、Chen 系统和 Lü 系统为例进行仿真验证, 该控制方法可以实现较快的混沌反同步, 且反同步的鲁棒稳定性良好.

关键词: 混沌系统, 反同步, 滑模控制, 主动控制

PACC: 0545

## 1. 引 言

Pecora 和 Carroll<sup>[1,2]</sup>提出了混沌同步的概念, 并在电子线路上观测到混沌同步的现象, 这一开创性的工作极大地推动了混沌同步理论的研究. 随着对混沌理论研究的深入, 混沌同步在通信、医学、工程等领域显示出巨大的应用潜力及发展前景, 并逐渐引起国内外学者的广泛关注与兴趣<sup>[3-4]</sup>. 以往的研究大多集中于混沌系统的自同步<sup>[5-10]</sup>以及非恒同混沌系统的同步<sup>[11,12]</sup>. 最近, 文献[13, 14]分别在耦合和无方向耦合的两个相同的混沌系统中实现了反同步. 所谓反同步, 是指达到同步的两个混沌系统的状态向量的绝对值相同但符号相反. 目前关于反同步的研究主要集中在两个相同系统在不同初值时的反同步, 而不同系统之间的反同步研究相对较少, 因为它们存在不同结构以及参数失配问题. 然而, 在实际应用中特别是混沌系统的反同步用于安全通信中, 驱动系统和响应系统的结构有可能是不同的, 因此考虑异结构的反同步更具有实际意义. 文献[15]利用基于状态观测器实现了一类混沌系统的反同步. 本文基于主动滑模控制实现了 Lorenz 系统、Chen 系统和 Lü 系统之间的两两反同步. 数值仿真验证了该方法的有效性.

## 2. 问题描述和系统模型

非线性混沌系统为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x), \\ \dot{y} &= g(t, y) + u(t, x, y), \end{aligned} \quad (1)$$

式中  $x, y \in R^n$ ,  $f, g$  为  $R \times R^n \rightarrow R^n$  的可微函数. 系统(1)中的第一式为驱动系统, 第二式为响应系统,  $u(t, x, y)$  为控制输入. 令

$$e = x + y,$$

我们的目标就是设计控制器  $u$  使得从不同的初值  $x_0, y_0$  出发的系统满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) + x(t)\| = 0, \quad (2)$$

从而使得响应系统和驱动系统达到反同步.

Lozren 系统为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 &= cx_1 - x_1x_3 - x_2, \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - bx_3. \end{aligned} \quad (3)$$

当  $a = 10, b = 8/3, c = 28$  时, 系统(3)是混沌的, 其吸引子见图 1.

Chen 系统为

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \alpha(y_2 - y_1), \\ \dot{y}_2 &= (\gamma - \alpha)y_1 - y_1y_3 + \gamma y_2, \\ \dot{y}_3 &= y_1y_2 - \beta y_3. \end{aligned} \quad (4)$$

当  $\alpha = 35, \beta = 3, \gamma = 28$  时, 系统(4)是混沌的, 其吸

引子见图 2.

Li 系统为

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \rho(z_2 - z_1), \\ \dot{z}_2 &= -z_1 z_3 + \nu z_2, \\ \dot{z}_3 &= z_1 z_2 - \mu z_3. \end{aligned} \quad (5)$$

当  $\rho = 36$ ,  $\mu = 3$ ,  $\nu = 20$  时, 系统(5)是混沌的, 其吸引子见图 3.

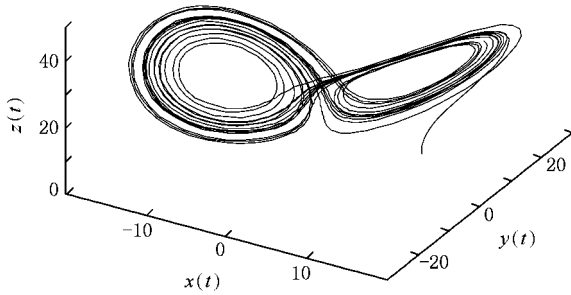


图 1 Lorenz 混沌吸引子

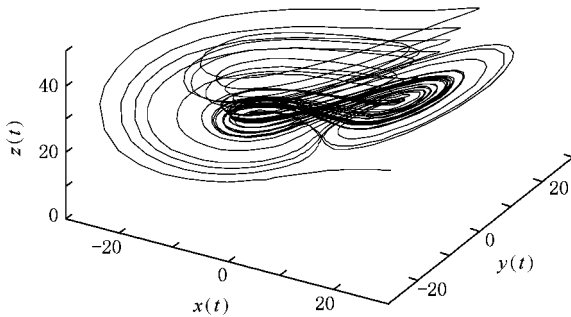


图 2 Chen 混沌吸引子

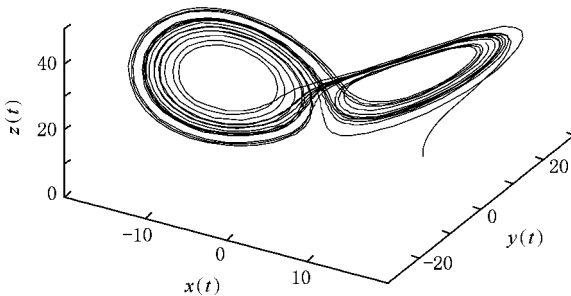


图 3 Li 混沌吸引子

### 3. 主动滑模控制器的设计

考虑一个混沌系统采用如下非线性微分方程描述:

$$\dot{x} = A_1 x + f_1(x), \quad (6)$$

式中  $x(t) \in R^3$  是系统的三维状态向量,  $A_1 \in R^{3 \times 3}$  是系统的线性部分,  $f_1: R^3 \rightarrow R^3$  是非线性部分. 设方程(6)为驱动系统, 在驱动系统中加上控制器  $u(t) \in R^3$  构成响应系统如下:

$$\dot{y} = A_2 y + f_2(y) + u(t), \quad (7)$$

式中  $y(t) \in R^3$  是响应系统的三维状态向量,  $A_2 \in R^{3 \times 3}$  和  $f_2: R^3 \rightarrow R^3$  分别是响应系统的线性和非线性部分. 我们所要研究的反同步问题就是设计控制器  $u(t) \in R^3$ , 使得从不同初始条件出发的驱动和响应系统, 它们的状态向量满足  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x + y\| = 0$ , 即

$$\begin{aligned} \dot{e} &= A_2 y + f_2(y) + A_1 x + f_1(x) + u(t) \\ &= A_2 e + F(x, y) + u(t), \end{aligned} \quad (8)$$

式中

$$e = x + y,$$

$$F(x, y) = f_2(y) + f_1(x) + (A_1 - A_2)x.$$

根据主动控制的思想, 我们设计控制器为

$$u(t) = H(t) - F(x, y). \quad (9)$$

将(9)式代入误差系统(8), 得到

$$\dot{e} = A_2 e + H(t). \quad (10)$$

误差系统(10)中有一个新引进的控制变量  $H(t)$ . 控制量  $H(t)$  有多种选择, 这里我们采用滑模控制思想, 设控制率为

$$H(t) = K u(t). \quad (11)$$

这里  $K = [k_1, k_2, k_3]^T$  是常向量,  $u(t) \in R$  是控制输入, 满足

$$u(t) = \begin{cases} w^+(t) & (s(e) \geq 0), \\ w^-(t) & (s(e) < 0), \end{cases} \quad (12)$$

式中  $s = s(e)$  是切换面. 这样误差系统可以描述为

$$\dot{e} = A_2 e + K u(t). \quad (13)$$

滑模变结构反同步控制的基本思想是通过控制器的来回切换, 使受控驱动和响应系统达到反同步. 它的基本步骤是选定一个滑模面, 保证它是渐进稳定的, 然后进一步确定控制器, 使得受控系统能在有限时间内到达滑模面, 从而沿着滑模面向平衡点运行.

首先, 滑模面设计为

$$s(e) = C e, \quad (14)$$

式中  $C = [c_1, c_2, c_3]$  是常向量. 当系统发生滑模运动时, 需要满足以下两个条件:

$$s(e) = 0, \quad (15)$$

$$\dot{s}(e) = 0. \quad (16)$$

把(13)(14)和(16)式联立可以得到

$$\begin{aligned} \dot{s}(e) &= \frac{\delta s(e)}{\delta e} \dot{e} \\ &= C(A_2 e + Ku(t)). \end{aligned} \quad (17)$$

求方程(17)中的  $u(t)$ , 得到等效控制  $w_{eq}(t)$  如下:

$$w_{eq}(t) = -(CK)^{-1} CA_2 e(t), \quad (18)$$

式中  $(CK)$  是非奇异矩阵. 将(18)式中求得的等效控制  $w_{eq}$  代入(13)式, 可得

$$\dot{e} = [I - K(CK)^{-1}C]Ae. \quad (19)$$

如果误差系统(19)中所有特征值都具有负实部, 那么系统即为渐进稳定系统.

下面, 我们设计滑模控制器. 选择到达律 (reaching law) 为指数趋近律, 即

$$\dot{s} = -q \operatorname{sgn}(s) - rs, \quad (20)$$

式中  $\operatorname{sgn}(s)$  是  $s$  的符号函数,  $q > 0, r > 0$ . 由(13)和(14)式得

$$\dot{s} = C[Ae + Ku(t)]. \quad (21)$$

现在由(20)和(21)式就可以得到控制输入为

$$u(t) = -(CK)^{-1}[C(rI + A)e(t) + q \operatorname{sgn}(s)]. \quad (22)$$

## 4. 系统稳定性分析

**定理 1** 从任意初始条件出发的误差系统(13)始终满足滑模到达条件, 即将在有限时间内到达趋近滑模面(14).

**证明** 考虑 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2} s^2, \quad (23)$$

对(23)式求导得

$$\dot{V} = \dot{s}s = -qs \operatorname{sgn}(s) - rs^2. \quad (24)$$

因为  $ss \operatorname{sgn}(s) > 0, r > 0, q > 0$ , 得到  $\dot{V} = \dot{s}s < 0$ , 所以  $\dot{V}(e) = 0$  是负定的. 这表明从任意初始条件出发的误差系统(13)始终满足滑模到达条件.

下面我们进一步考察当误差系统(13)到达滑模面时, 其滑动模态是否渐进稳定. 将(22)式代入(23)式得

$$\begin{aligned} \dot{e} &= [A_2 - K(CK)^{-1}C(rI + A_2)]e \\ &\quad - K(CK)^{-1}q \operatorname{sgn}(s). \end{aligned} \quad (25)$$

将  $-K(CK)^{-1}q \operatorname{sgn}(s)$  看作是线性误差系统的输入, 如果  $A_2 - K(CK)^{-1}C(rI + A_2)$  具有负的特征

值或者特征值具有负实部, 那么误差系统渐进稳定. 可以看出有一个特征值是  $-r$ , 其他两个特征值与  $r$  无关, 只与  $K$  和  $C$  有关. 选择合适的  $K$  和  $C$ , 可以使误差系统的特征值为负或者具有负实部, 还可以调整误差趋近零的速度.

## 5. 仿真模拟

下面以 Lorenz 系统、Chen 系统和 Lü 系统为例进行仿真验证.

数值模拟采用龙格-库塔方法进行仿真, 采样时间均取为 0.001 s. 选取 Lorenz 系统参数分别为  $a = 10, b = 8/3, c = 28$ ; Chen 系统参数分别为  $\alpha = 35, \beta = 3, \gamma = 28$ ; Lü 系统参数分别为  $\rho = 36, \mu = 3, \nu = 20$ . 驱动系统和响应系统的初始值分别为 2, 0, 1 和 10, 5, -14; 误差系统的初始值分别取为  $e_{10} = 12, e_{20} = 5, e_{30} = -13$ .

### 5.1. Lorenz 系统和 Chen 系统之间的混沌反同步

设 Lorenz 系统为驱动系统, Chen 系统为响应系统, 其微分方程分别表示如下:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 &= cx_1 - x_1x_3 - x_2, \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - bx_3; \\ \dot{y}_1 &= \alpha(y_2 - y_1) + u_1(t), \\ \dot{y}_2 &= (\gamma - \alpha)y_1 - y_1y_3 + \gamma y_2 + u_2(t), \\ \dot{y}_3 &= y_1y_2 - \beta y_3 + u_3(t). \end{aligned} \quad (26)$$

由(8)式可知, 误差系统为

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= \alpha(e_2 - e_1) + (\alpha - a)(x_1 - x_2) + u_1(t), \\ \dot{e}_2 &= (\gamma - \alpha)e_1 + \gamma e_2 + (c - \gamma + \alpha)x_1 \\ &\quad + (-1 - \gamma)x_2 - y_1y_3 - x_1x_3 + u_2(t), \\ \dot{e}_3 &= -\beta e_3 + (-b + \beta)x_3 + y_1y_2 + x_1x_2 + u_3(t), \end{aligned} \quad (28)$$

即

$$A_2 = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ \gamma - \alpha & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix},$$

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} (\alpha - a)(x_1 - x_2) \\ (c - \gamma + \alpha)x_1 + (-1 - \gamma)x_2 - y_1y_3 - x_1x_3 \\ (-b + \beta)x_3 + y_1y_2 + x_1x_2 \end{bmatrix}. \quad (29)$$

控制参数可以选为

$$\begin{aligned} K &= [1 \quad 2 \quad 2]^T, \\ C &= [-1.5 \quad 5 \quad -3], \\ r &= 1.5, \\ q &= 0.35. \end{aligned} \quad (30)$$

控制器  $u(t)$  确定如下:

$$\begin{aligned} u(t) &= [-6.1 \quad -38 \quad -1.8]e(t) - 0.14 \\ &\quad (s(e) \geq 0), \\ u(t) &= [-6.1 \quad -3.8 \quad -1.8]e(t) + 0.14 \\ &\quad (s(e) < 0). \end{aligned} \quad (31)$$

图 4 给出了 Lorenz 系统和 Chen 系统的反同步曲线, 图 5 给出了 Lorenz 系统和 Chen 系统的反同步误差曲线.

## 5.2. Chen 系统和 Lü 系统之间的混沌反同步

设 Chen 系统为驱动系统, Lü 系统为响应系统, 即

其微分方程分别表示如下:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \alpha(y_2 - y_1), \\ \dot{y}_2 &= (\gamma - \alpha)y_1 - y_1y_3 + \gamma y_2, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_3 &= y_1y_2 - \beta y_3; \\ \dot{z}_1 &= \rho(z_2 - z_1) + u_1(t), \\ \dot{z}_2 &= -z_1z_3 + \nu z_2 + u_2(t), \\ \dot{z}_3 &= z_1z_2 - \mu z_3 + u_3(t). \end{aligned} \quad (33)$$

由(8)式可知, 误差系统为

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= -\rho e_1 + \rho e_2 + (\alpha - \rho)(y_2 - y_1) \\ &\quad + u_1(t), \\ \dot{e}_2 &= \nu e_2 + (\gamma - \alpha)y_1 + (\alpha - \nu)y_2 \\ &\quad - y_1y_3 - z_1z_3 + u_2(t), \\ \dot{e}_3 &= -\mu e_3 + (-\beta + \mu)y_3 + y_1y_2 \\ &\quad + z_1z_2 + u_3(t), \end{aligned} \quad (34)$$

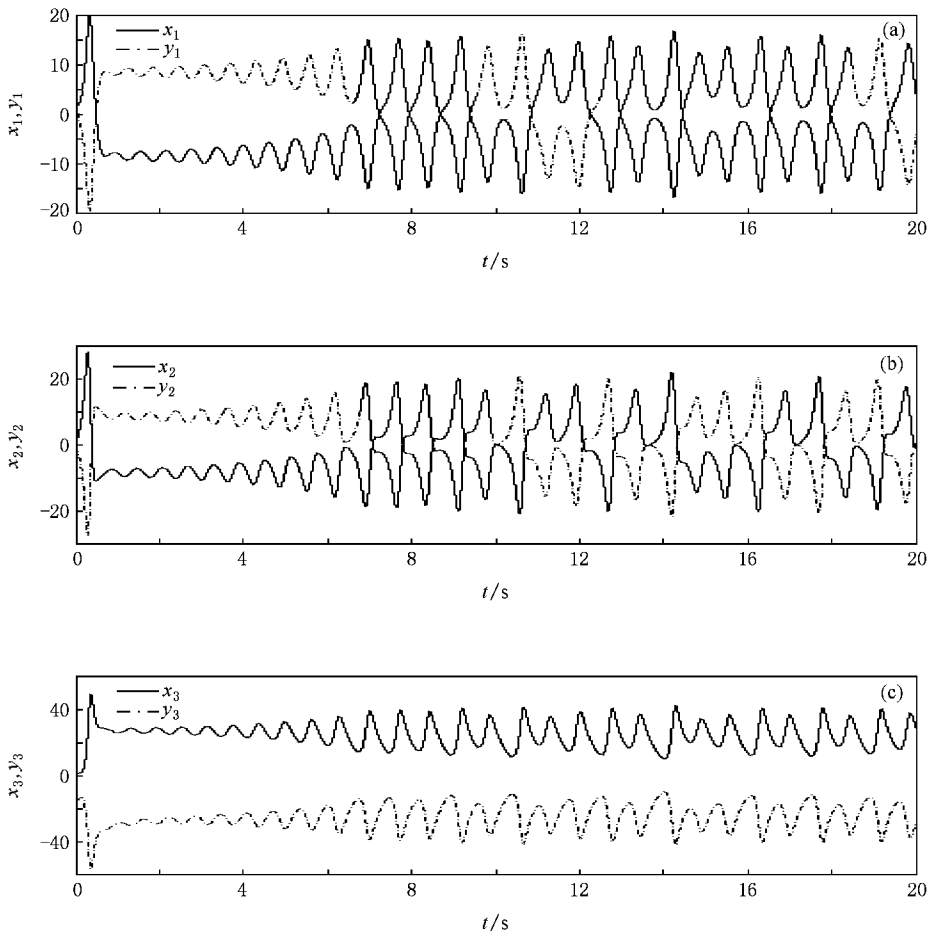
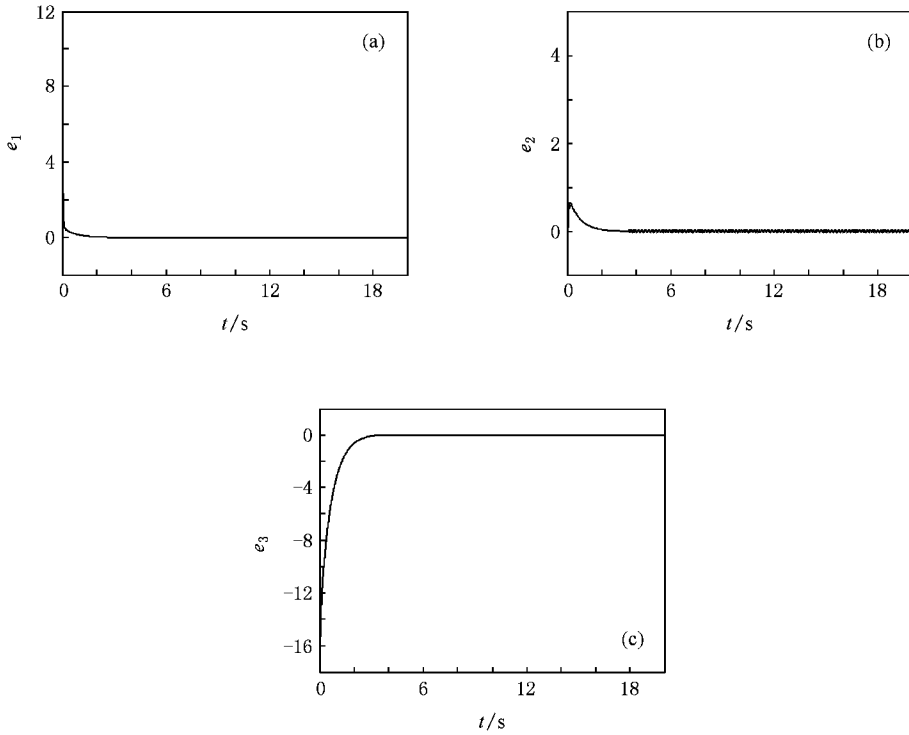


图 4 Lorenz 系统和 Chen 系统的反同步曲线 (a)  $x_1$  和  $y_1$  的反同步曲线 (b)  $x_2$  和  $y_2$  的反同步曲线, (c)  $x_3$  和  $y_3$  的反同步曲线

图 5 Lorenz 系统和 Chen 系统的反同步误差曲线 (a)  $e_1$  (b)  $e_2$  (c)  $e_3$ 

$$A_3 = \begin{pmatrix} -\rho & \rho & 0 \\ 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix}, \quad (35)$$

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} (\alpha - \rho)(y_2 - y_1) \\ (\gamma - \alpha)y_1 + (\alpha - \nu)y_2 - y_1y_3 - z_1z_3 \\ (-\beta + \mu)y_3 + y_1y_2 + z_1z_2 \end{bmatrix}.$$

控制器  $u(t)$  确定如下：

$$u(t) = [-20.7 \quad 21.4 \quad -1.8]e(t) - 0.14 \quad (s(e) \geq 0),$$

$$u(t) = [-20.7 \quad 21.4 \quad -1.8]e(t) + 0.14 \quad (s(e) < 0). \quad (36)$$

图 6 给出了 Chen 系统和 Lü 系统的反同步曲线, 图 7 给出了 Chen 系统和 Lü 系统的反同步误差曲线.

### 5.3. Lü 系统和 Lorenz 系统之间的混沌反同步

设 Lü 系统为驱动系统, Lorenz 系统为响应系统, 其微分方程分别表示如下：

$$\dot{z}_1 = \rho(z_2 - z_1), \quad (37)$$

$$\dot{z}_2 = -z_1z_3 + \nu z_2,$$

$$\dot{z}_3 = z_1z_2 - \mu z_3;$$

$$\dot{x}_1 = a(x_2 - x_1) + u_1(t), \quad (38)$$

$$\dot{x}_2 = cx_1 - x_1x_3 - x_2 + u_2(t),$$

$$\dot{x}_3 = x_1x_3 - bx_3 + u_3(t).$$

由(8)式可知, 误差系统为

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= -ae_1 + ae_2 + (\rho - a)(z_2 - z_1) + u_1(t), \\ \dot{e}_2 &= ce_1 - e_2 - cz_1 + (\nu + 1)z_2 - z_1z_3 - x_1x_3 + u_2(t), \\ \dot{e}_3 &= -be_3 + (-\mu + b)z_3 + z_1z_2 + x_1x_2 + u_3(t), \end{aligned} \quad (39)$$

即

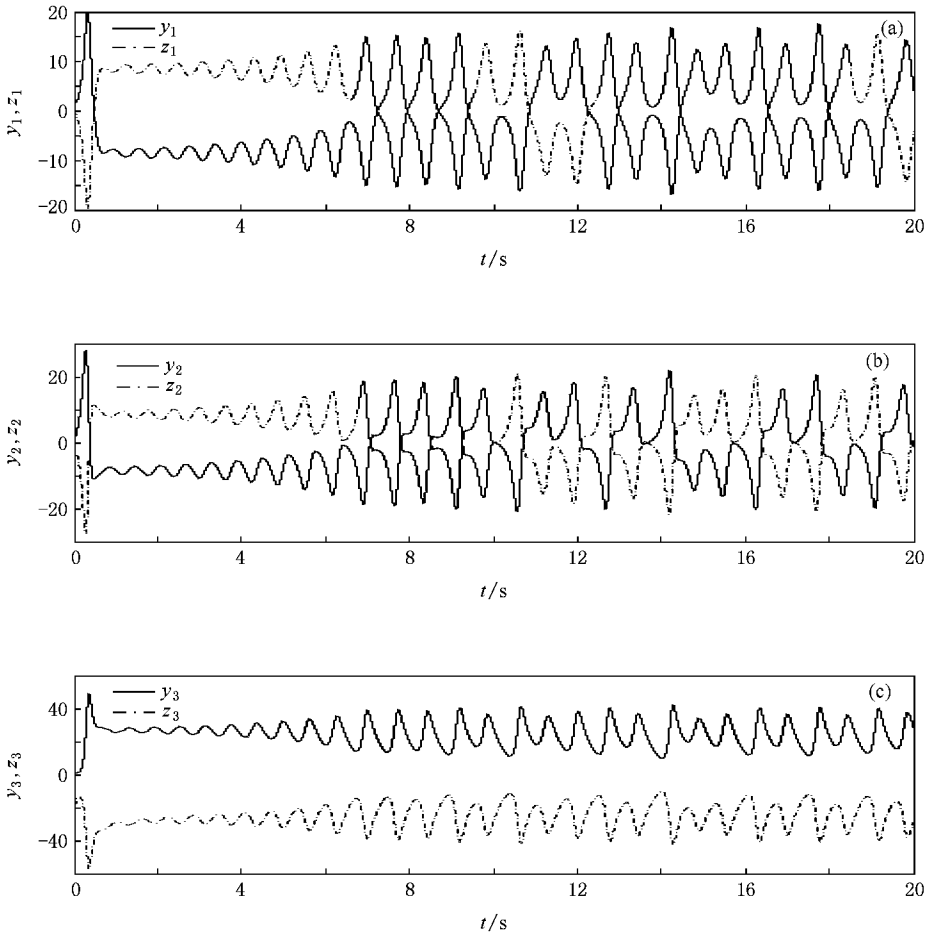


图6 Chen系统和Lü系统的反同步曲线 (a)  $y_1$  和  $z_1$  的反同步曲线 (b)  $y_2$  和  $z_2$  的反同步曲线 (c)  $y_3$  和  $z_3$  的反同步曲线

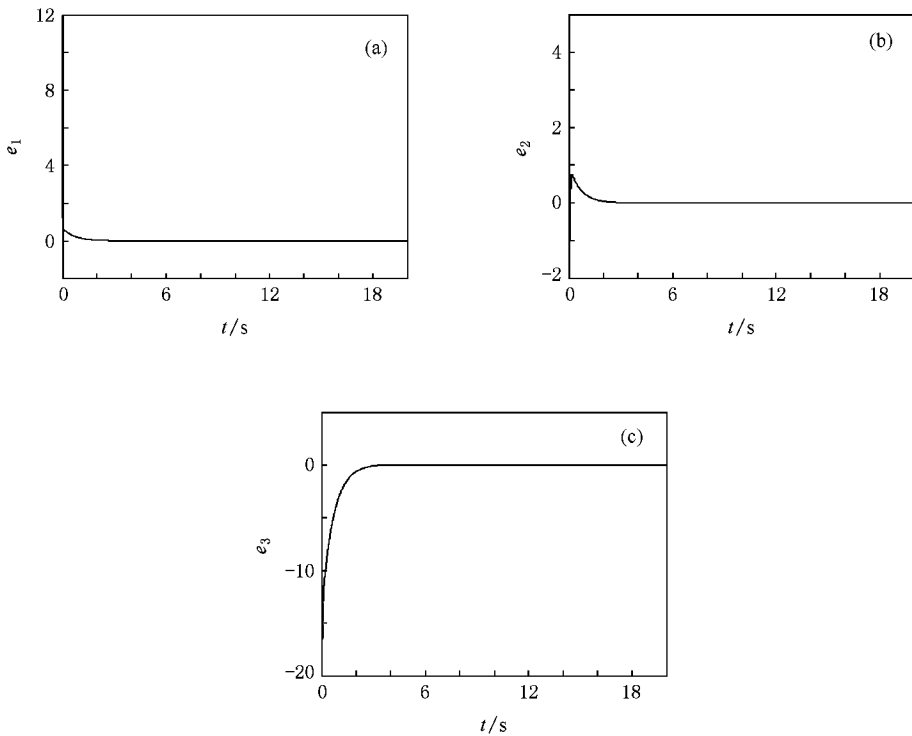


图7 Chen系统和Lü系统的反同步误差曲线 (a)  $e_1$  (b)  $e_2$  (c)  $e_3$

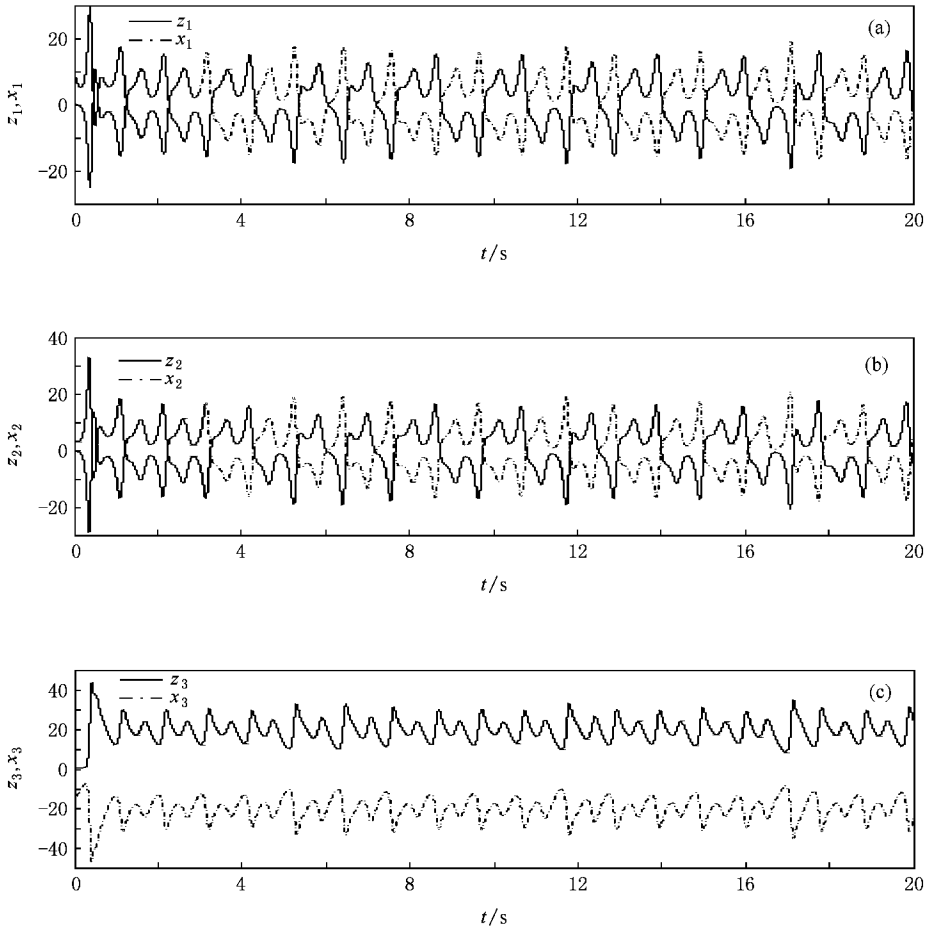


图 8 Li 系统和 Lorenz 系统的反同步曲线 (a)  $z_1$  和  $x_1$  的反同步曲线 (b)  $z_2$  和  $x_2$  的反同步曲线 (c)  $z_3$  和  $x_3$  的反同步曲线

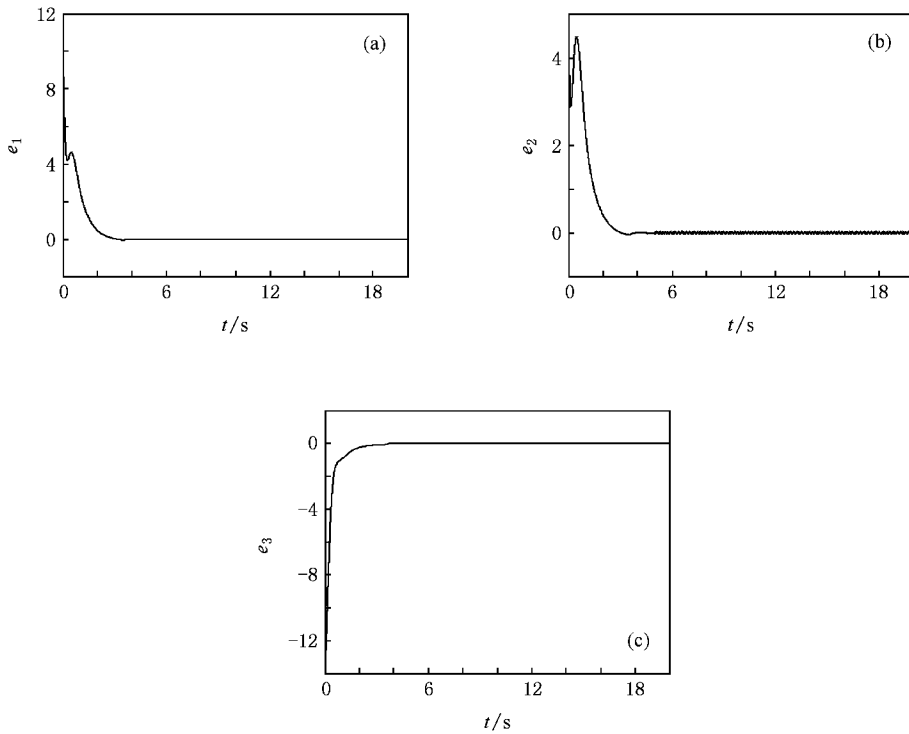


图 9 Li 系统和 Lorenz 系统的反同步误差曲线 (a)  $e_1$  (b)  $e_2$  (c)  $e_3$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ c & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix},$$

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} (\rho - a)(z_2 - z_1) \\ -cz_1 + (\nu + 1)z_2 - z_1z_3 - x_1x_3 \\ (-\mu + b) + z_1z_2 + x_1x_2 \end{bmatrix}. \quad (40)$$

控制器  $u(t)$  确定如下:

$$u(t) = [-61.1 \quad 5 \quad -1.4]e(t) - 0.14 \quad (s(e) \geq 0),$$

$$u(t) = [-61.1 \quad 5 \quad -1.4]e(t) + 0.14 \quad (s(e) < 0). \quad (41)$$

图 8 给出了 Lü 系统和 Lorenz 系统的反同步曲线, 图 9 给出了 Lü 系统和 Lorenz 系统的反同步误差曲线.

## 6. 结 论

本文针对一类确定性混沌系统的反同步问题, 基于主动控制思想, 提出了主动滑模控制的策略, 使得从任意初始条件出发的混沌系统趋近滑模面, 实现了一类连续混沌系统的异结构反同步. 该控制器设计简单、适应性广, 且有较好的鲁棒性. 数值仿真说明了该方法的有效性和实用性.

- [ 1 ] Pecora L M, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [ 2 ] Carrol T L, Pecora L M 1991 *IEEE Trans. Circuit Syst.* **38** 453
- [ 3 ] Cai G L, Huang J J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3997 ( in Chinese )  
[ 蔡国梁、黄娟娟 2006 物理学报 **55** 3997 ]
- [ 4 ] Zhang Q, Chen S H, Hu Y M, Wang C P 2006 *Phys. Lett. A* **371** 317
- [ 5 ] Agiza H N, Yassen M T 2000 *Phys. Lett. A* **278** 191
- [ 6 ] Morgul Ö, Solak E 1996 *Phys. Rev. E* **54** 4803
- [ 7 ] Grassi G, Mascolo S 1997 *IEEE Trans. Circuits Syst.* **44** 1011
- [ 8 ] Liu J, Chen S H, Lu J A 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1595 ( in Chinese )  
[ 刘 杰、陈士华、陆君安 2003 物理学报 **52** 1595 ]
- [ 9 ] Wang X Y, Wu X J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 605 ( in Chinese )  
[ 王兴元、武相军 2006 物理学报 **55** 605 ]
- [ 10 ] Feki M 2003 *Chaos Solitons Fract.* **18** 141
- [ 11 ] Huang L L, Feng R P, Wang M 2004 *Phys. Lett. A* **320** 271
- [ 12 ] Chen H K 2005 *Chaos Solitons Fract.* **23** 1245
- [ 13 ] Kim C M, Rim S H, Key W 2003 *Phys. Lett. A* **320** 39
- [ 14 ] Hu J, Chen S H, Chen L 2005 *Phys. Lett. A* **339** 455
- [ 15 ] Wang X Y, Wu X J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1987 ( in Chinese )  
[ 王兴元、武相军 2007 物理学报 **56** 1987 ]



# Anti-synchronizing different chaotic systems using active sliding mode control

Liu Fu-Cai<sup>†</sup> Song Jia-Qiu

( *Department of Automation, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China* )

( Received 1 December 2007 ; revised manuscript received 15 February 2008 )

## Abstract

An active sliding mode control is designed to anti-synchronize different chaotic systems. The closed loop error dynamics depends on the linear part of the response systems and parameters of the controller. Therefore, the anti-synchronization rate can be adjusted through these parameters. Analysis of the stability for the proposed method is done based on the Lyapunov stability theorem. Finally, numerical results are presented for the Lorenz, Chen and Lü systems. This method may realize the anti-synchronization quickly, and the robust stability is good.

**Keywords** : chaos system, anti-synchronization, sliding control, active control

**PACC** : 0545

---

<sup>†</sup> E-mail : lfe\_xb@263.net