第 57 卷 第 8 期 2008 年 8 月
1000-3290/2008/57(08)/4766-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.57, No.8, August, 2008

相空间压缩实现时空混沌系统的广义同步*

敬晓丹[1)2)]　吕　翎[1)†]

1)(辽宁师范大学物理与电子技术学院，大连　116029)

2)(辽宁工业大学数理科学系，锦州　121001)

(2008 年 1 月 19 日收到；2008 年 4 月 4 日收到修改稿)

提出了一种通过相空间压缩实现时空混沌系统广义同步的方法. 以 Fitzhugh-Nagumo 反应扩散时空混沌系统为例，仿真模拟说明了该方法的有效性与实用性. 通过研究有界噪声作用下该系统的同步效果，表明这种同步方法具有较强的抗干扰能力. 此方法可以实现任意时空混沌系统的广义同步，具有普适性. 同步控制器结构简单、易于应用.

关键词：时空混沌，广义同步，相空间压缩

PACC：0545

1. 引　　言

由于混沌系统对初始条件极其微小变化的高度敏感性及不稳定性，混沌同步总被认为是不可能事件. 自 1990 年 Pecora 和 Carroll[1] 提出了一种同步原理并在电子线路中得以实现以来，人们逐渐找到了实现混沌同步的有效方法. 随着混沌同步理论研究的不断深入，带动了其实验研究的开展，同时也向人们展示了诱人的应用前景，从而使混沌同步研究成为目前科学研究的热点之一. 近年来各国学者在混沌同步领域开展了大量的研究工作，许多同步方法和技术已被研究和运用，其中具有代表性的有驱动响应法、主动被动法、变量耦合法、自适应法、变量反馈法等[2—15]. 这些比较成熟的同步方法基本上是针对时间混沌系统的同步研究而设计的.

最近，由于时空混沌同步在物理、通信以及自动控制等领域中的潜在应用，特别是利用时空混沌同步进行扩频通信具有良好的保密性，因而时空混沌系统的同步研究引起了人们极大的关注. 为此，Rulkov 等[16] 利用驱动系统和响应系统状态变量之间的线性耦合完成了时空混沌系统之间的广义同步. Codreanu[17] 针对一类时空混沌系统提出了主动控制同步方法. 胡岗等[18] 提出了一种利用单向耦合映象格子同步系统的码分多址扩频通信方案. 张旭等[19] 利用单向耦合法实现了一维耦合映象格子的恒等同步. 虽然时空混沌系统的同步较时间混沌系统同步的研究更加困难，但是自然界存在大量的实际系统均应该用时空混沌系统来描述，而且时空混沌系统的同步具有潜在的应用价值，因此，时空混沌系统同步新方法的理论与应用研究是一项有意义的工作. 本文提出了一种通过相空间压缩实现时空混沌系统广义同步的方法. 以 Fitzhugh-Nagumo 反应扩散时空混沌系统为例，仿真模拟说明了该方法的有效性与实用性. 通过研究有界噪声作用下该系统的同步效果，表明这种同步方法具有较强的抗干扰能力.

2. 同步原理

考虑下列形式的两个时空混沌系统分别作为目标系统和响应系统：

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{V}) + \boldsymbol{D}\nabla^2 \boldsymbol{V}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{W}) + \boldsymbol{D}\nabla^2 \boldsymbol{W} + \boldsymbol{U}, \tag{2}$$

式中 $\boldsymbol{V}$ 和 $\boldsymbol{W}$ 分别为目标系统和响应系统的 n 维状态变量，$\boldsymbol{V} = (v_i(x, y, z, t))^{\mathrm{T}} \in R^n$，$\boldsymbol{W} = (w_i(x, y, z, t))^{\mathrm{T}} \in R^n (i = 1, 2, \cdots, n)$，$\boldsymbol{F}: R^n \to R^n$，$\boldsymbol{D}$ 为扩散

* 辽宁省自然科学基金(批准号：20052151)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail：luling1960@yahoo.com.cn

系数矩阵，U 为同步控制器，$U = (u_i(V, W))^{\mathrm{T}} \in R^n$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$.

定义目标系统(1)和响应系统(2)状态变量之间的误差

$$e = W - V. \tag{3}$$

由(1)—(3)式，可以得到误差变量随时间的演化方程

$$\begin{aligned}\frac{\partial e}{\partial t} &= F(W) - F(V) + D\nabla^2 e + U \\ &= f(e) + g(V, e) + D\nabla^2 e + U.\end{aligned} \tag{4}$$

若设计控制器形式为

$$U = -g(V, e), \tag{5}$$

此时，误差变量随时间的演化方程(4)将变为

$$\frac{\partial e}{\partial t} = f(e) + D\nabla^2 e. \tag{6}$$

对响应系统实施相空间压缩. 设响应系统(2)时空混沌解的轨迹是在一个有界的空间 H 内，选取 H 的一个非空子集 J，有 $J \in H$，将其时空混沌解限制在空间 J 内，

$$W = \begin{cases} W_{\max} & (W > W_{\max}), \\ W & (W_{\min} \leqslant W \leqslant W_{\max}), \\ W_{\min} & (W < W_{\min}), \end{cases} \tag{7}$$

式中 $W_{\max}, W_{\min} \subset J$.

若令

$$\begin{aligned} W_{\max} &= V + e_{\max}, \\ W &= V + e, \\ W_{\min} &= V + e_{\min}, \end{aligned} \tag{8}$$

则(7)式可以改写成

$$e = \begin{cases} e_{\max} & (e > e_{\max}), \\ e & (e_{\min} \leqslant e \leqslant e_{\max}), \\ e_{\min} & (e < e_{\min}). \end{cases} \tag{9}$$

实际上，时空混沌系统解的轨迹是其在相空间中经过无数次收缩又扩张，扩张再折叠，再收缩，来回拉伸与折叠形成的几何图形，它是相空间总体积的收缩和某个方向或环面上局域发散或扩张共同作用的结果. 对响应系统实施相空间压缩，限制其自由发散或扩张，系统的动力学行为将会改变. 这样，在(9)式的限制下，误差系统(6)式最终可以演化到一个预期的稳定状态，即

$$\lim_{t \to \infty} |W(x, y, z, t) - V(x, y, z, t)| = B, \tag{10}$$

式中 B 为不随时间变化的一个常数矩阵. 从而实现了两个时空混沌系统的广义同步.

3. 仿真模拟

以 Fitzhugh-Nagumo 时空混沌系统为例，仿真模拟验证上述方法的可行性. Fitzhugh-Nagumo 时空混沌系统由下列动力学方程描述[20]：

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= \varepsilon^{-1} p(1 - p)\left(p - \frac{q + b}{a}\right) + D\nabla^2 p, \\ \frac{\partial q}{\partial t} &= f(p) - q, \end{aligned} \tag{11}$$

$$f(p) = \begin{cases} 0 & (0 \leqslant p < 1/3), \\ 1 - cp(p - 1)^2 & (1/3 \leqslant p \leqslant 1), \\ 1 & (p > 1). \end{cases} \tag{12}$$

这里 $p(x, t)$ 和 $q(x, t)$ 为系统的状态变量，a, b, c 为系统的参量，D 为扩散系数. Fitzhugh-Nagumo 时空混沌系统是一个典型的反应扩散系统，其自身能够呈现出复杂的时空混沌行为. 若取系统参量 $a = 0.84, b = 0.07, c = 6.75, \varepsilon = 0.15$，扩散系数 $D = 1$，得到系统状态变量 $p(x, t)$ 和 $q(x, t)$ 的时空演化如图 1、图 2 所示.

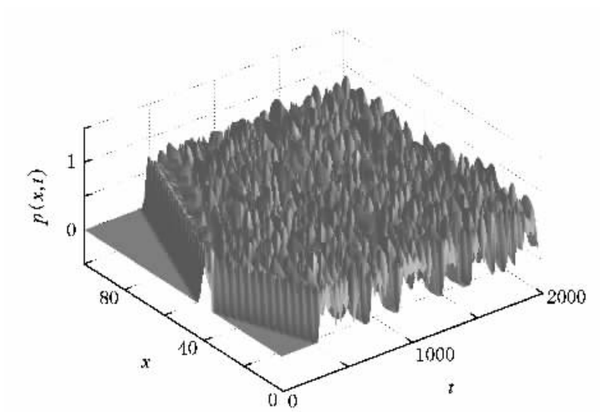

图 1　状态变量 $p(x, t)$ 的时空演化

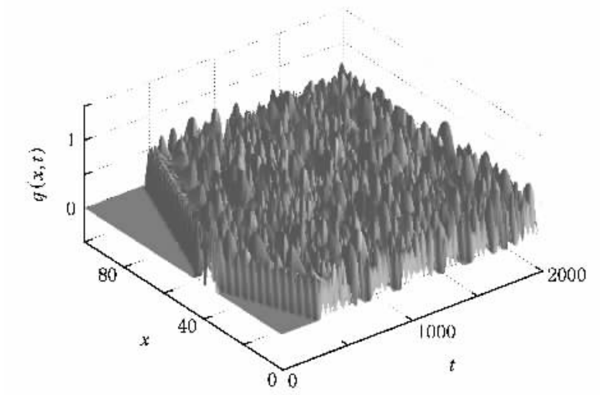

图 2　状态变量 $q(x, t)$ 的时空演化

下列系统与系统(11)具有相同的结构：

$$\frac{\partial p'}{\partial t}=\varepsilon^{-1}p'(1-p')\left(p'-\frac{q'+b}{a}\right)+D\nabla^2 p'+u_1,$$
$$\frac{\partial q'}{\partial t}=f(p')-q'+u_2, \tag{13}$$

$$f(p')=\begin{cases}0 & (0\leqslant p'<1/3),\\ 1-cp'(p'-1)^2 & (1/3\leqslant p'\leqslant 1),\\ 1 & (p'>1),\end{cases} \tag{14}$$

式中 u_1，u_2 为同步控制器．取系统(11)作为目标系统，具有同结构的 Fitzhugh-Nagumo 时空混沌系统(13)作为响应系统．

定义目标系统(11)和响应系统(13)状态变量之间的误差为

$$e_1=p-p',\quad e_2=q-q', \tag{15}$$

可得误差变量随时间的演化方程

$$\frac{\partial e_1}{\partial t}=\varepsilon^{-1}\left[-e_1^3+\left(\frac{b}{a}+1\right)e_1^2+\frac{1}{a}e_1^2e_2-\frac{1}{a}e_1e_2-\frac{b}{a}e_1\right]+D\nabla^2 e_1+\varepsilon^{-1}\left\{\left(\frac{1}{a}e_2-3e_1\right)p^2+\frac{2}{a}e_1pq+\left[-3e_1^2+2\left(\frac{b}{a}+1\right)e_1+\frac{2}{a}e_1e_2-\frac{1}{a}e_2\right]p+\frac{1}{a}e_1(e_1-1)q\right\}+u_1, \tag{16}$$

$$\frac{\partial e_2}{\partial t}=F(p,q,e_1,e_2)-e_2+u_2,$$

$$F(p,q,e_1,e_2)=\begin{cases}0 & (0\leqslant p<1/3),\\ -c(e_1^3-2e_1^2+e_1)-3ce_1p^2+c(4e_1-3e_1^2)p & (1/3\leqslant p\leqslant 1),\\ 0 & (p>1).\end{cases} \tag{17}$$

若设计控制器的形式为

$$u_1=-\varepsilon^{-1}\left\{\left(\frac{1}{a}e_2-3e_1\right)p^2+\frac{2}{a}e_1pq+\left[-3e_1^2+2\left(\frac{b}{a}+1\right)e_1+\frac{2}{a}e_1e_2-\frac{1}{a}e_2\right]p+\frac{1}{a}e_1(e_1-1)q\right\},$$

$$u_2=\begin{cases}0 & (0\leqslant p<1/3),\\ 3ce_1p^2-c(4e_1-3e_1^2)p & (1/3\leqslant p\leqslant 1),\\ 0 & (p>1),\end{cases} \tag{18}$$

则误差变量随时间的演化方程(16)变为

$$\frac{\partial e_1}{\partial t}=\varepsilon^{-1}\left[-e_1^3+\left(\frac{b}{a}+1\right)e_1^2+\frac{1}{a}e_1^2e_2-\frac{1}{a}e_1e_2-\frac{b}{a}e_1\right]+D\nabla^2 e_1,$$
$$\frac{\partial e_2}{\partial t}=G(p,e_1,e_2)-e_2, \tag{19}$$

$$G(p,e_1,e_2)=\begin{cases}0 & (0\leqslant p<1/3),\\ -c(e_1^3-2e_1^2+e_1) & (1/3\leqslant p\leqslant 1),\\ 0 & (p>1).\end{cases} \tag{20}$$

对上述系统实施如同(9)式形式的相空间压缩，以实现两个 Fitzhugh-Nagumo 时空混沌系统之间的广义同步．仿真模拟时，时间序列在第 800 步开始加入控制器，在 1200 步进行相空间压缩．数值计算得到 $\boldsymbol{e}_{\min}$，$\boldsymbol{e}_{\max}$ 在(0.2，1.0)内取值均能实现两系统的广义同步．取 $\boldsymbol{e}_{\max}=0.8$，$\boldsymbol{e}_{\min}=0.3$ 和 $\boldsymbol{e}_{\max}=0.9$，$\boldsymbol{e}_{\min}=0.4$，仿真模拟 $e_1(x,t)$，$e_2(x,t)$ 的时空演化如图 3、图 4 所示．由图 3、图 4 可以发现，加入控制器而未实施相空间压缩时，目标系统和响应系统不能实现广义同步．而实施相空间压缩后，误差变量很快稳定到一个定值，两个时空混沌系统的广义同步得以实现．

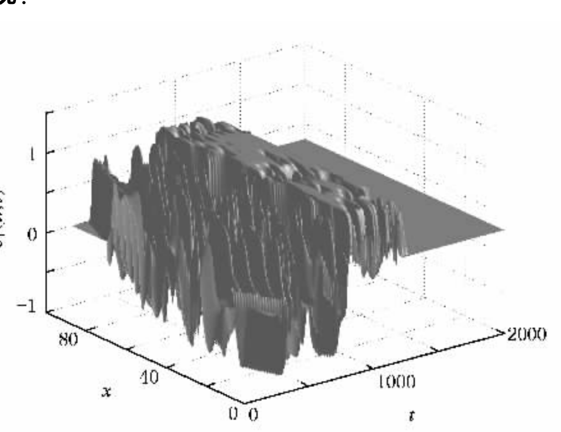

图 3 $\boldsymbol{e}_{\min}=0.3$，$\boldsymbol{e}_{\max}=0.8$ 时误差变量随时空的演化

另外，实际的混沌系统不可避免地会受到噪声的干扰．因此，一种同步方法的优劣不但要看其在

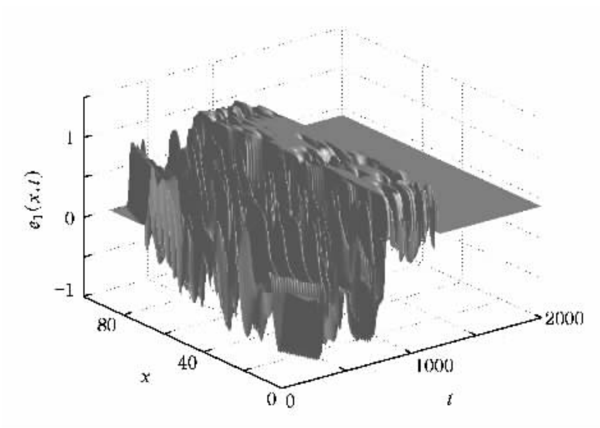

图 4　$e_{\min} = 0.4$，$e_{\max} = 0.9$ 时误差变量随时空的演化

应用中的简易方便程度，还要检验其抗噪声的能力．这里采用接近实际的有界噪声模型检验本文提出的同步方法．用有界噪声 $Dd(t)$ 表示噪声变量，其中 $d(t) = \cos(\Omega t + \sigma B(t) + \Gamma)$，$\Omega$，$\sigma$ 为正的常数，这里取 $\Omega = 1.0$，$\sigma = 1.0$，$B(t)$ 是单位的 Wiener 过程，Γ 是 $[0,2\pi]$ 之间均匀分布的随机变量，D 为噪声强度．分别用噪声强度 $D = 0.02$ 和 $D = 0.2$ 的有界噪声加在控制器上，即 $u_1 + Dd(t)$，$u_2 + Dd(t)$．仿真

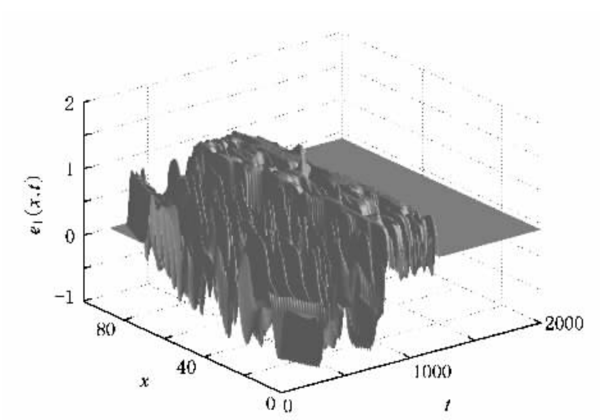

图 5　噪声强度为 0.02 时误差变量随时空的演化

模拟结果如图 5、图 6 所示，可以清楚地看出在强噪声影响下系统仍能迅速稳定到稳定态．由此可知，这种通过相空间压缩实现时空混沌系统广义同步的方法具有较强的抗噪声能力．

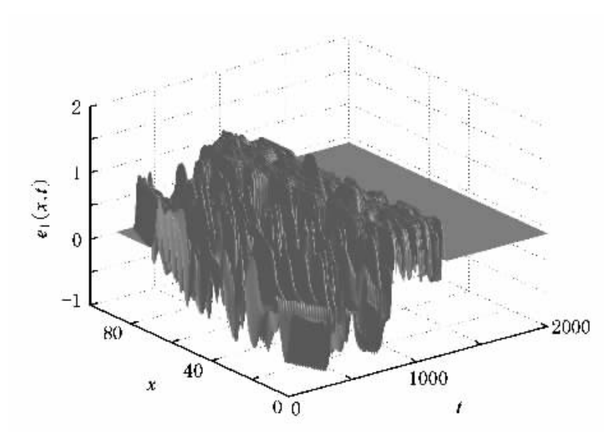

图 6　噪声强度为 0.2 时误差变量随时空的演化

4．结　　论

提出了一种通过相空间压缩实现时空混沌系统广义同步的方法．采用 Fitzhugh-Nagumo 时空混沌系统进行仿真模拟验证该方法的有效性与实用性．仿真结果表明，在实施相空间压缩后，目标系统和响应系统的误差变量经过短暂的时空演化后迅速稳定到一个定值，两个时空混沌系统的广义同步得以实现．通过研究有界噪声作用下该系统的同步效果，表明这种同步方法具有较强的抗干扰能力．一般情况下，时空混沌系统的动力学方程中均存在着扩散项，而这种扩散项的信号在实际应用中是无法得到的．本文设计的同步控制器中不含有时空混沌系统中的扩散项，从而使得控制器结构比较简单、便于应用．

[1] Pecora L M，Carroll T L 1990 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **64** 821

[2] Tsimring L S，Rulkov N F，Larsen M L，Gabbay M 2005 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **95** 14101

[3] Lü L，Guo Z A，Zhang C 2007 *Chin*. *Phys*. **16** 1603

[4] Min F H，Wang Z Q 2007 *Acta Phys*. *Sin*. **56** 6238 (in Chinese) [闵富红、王执铨 2007 物理学报 **56** 6238]

[5] Lu J G 2006 *Chin*. *Phys*. **15** 83

[6] Chen L Q 2004 *Chaos Solitons Fract*. **19** 1239

[7] Lü L，Luan L，Guo Z A 2007 *Chin*. *Phys*. **16** 346

[8] Yan W W，Zhi H G，Hua O W 2005 *Phys*. *Lett*. A **339** 325

[9] Awad E G 2006 *Chaos Solitons Fract*. **27** 345

[10] Junge L，Parlitz U 2000 *Phys*. *Rev*. E **62** 438

[11] Tao C H，Lu J A 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 5058 (in Chinese) [陶朝海、陆君安 2005 物理学报 **54** 5058]

[12] Yu H J，Liu Y Z 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 3029 (in Chinese) [于洪洁、刘延柱 2005 物理学报 **54** 3029]

[13] Li S H，Cai H X 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 1687 (in Chinese) [李世华、蔡海兴 2004 物理学报 **53** 1687]

[14] Park J H 2005 *Chaos Solitons Fract*. **26** 959

[15] Tao C H, Lu J A, Lü J H 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 1497 (in Chinese) [陶朝海、陆君安、吕金虎 2002 物理学报 **51** 1497]

[16] Rulkov N F, Sushchik M M, Tsimring L S, Abarbanel H D I 1995 *Phys*. *Rev*. E **51** 980

[17] Codreanu S 2003 *Chaos Solitons Fract*. **15** 507

[18] Hu G, Xiao J H, Yang J Z, Xie F G, Qu Z L 1997 *Phys*. *Rev*. E **56** 2738

[19] Zhang X, Shen K 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 2702 (in Chinese) [张旭、沈 柯 2002 物理学报 **51** 2702]

[20] Hildebrand M, Bär M, Eiswirth H 1995 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **75** 1503

Generalized synchronization of spatiotemporal chaos systems by phase compression*

Jing Xiao-Dan[1)2)] Lü Ling[1)†]

1)(*College of Physics and Electronic Technology*, *Liaoning Normal University*, *Dalian* 116029, *China*)

2)(*Department of Mathematics and Physics*, *Liaoning University of Technology*, *Jinzhou* 121001, *China*)

(Received 19 January 2008; revised manuscript received 4 April 2008)

Abstract

A phase compression scheme is proposed to achieve generalized synchronization for spatiotemporal chaos systems. The method is shown to be effective and practical by applying it to the numerical simulation of the Fitzhugh-Nagumo system, a kind of spatiotemporal chaos of reaction diffusion system. The effect of synchronization on the system is studied under bounded noise and the results show that the synchronization method has strong capability in anti-jamming. Generalized synchronization of two arbitrary spatiotemporal chaos systems can be realized by the method, which shows its universality in applications. The structure of the synchronous controller is simple and easy to use.

Keywords: spatiotemporal chaos, generalized synchronization, phase compression

PACC: 0545

* Project supported by the Natural Science Foundation of Liaoning Province, China (Grant No. 20052151).

† Corresponding author. E-mail: luling1960@yahoo.com.cn