

推广的失活网络动力学同步优化*

戴存礼¹⁾²⁾ 刘曙娥²⁾ 田亮²⁾ 施大宁²⁾

1) 南京农业大学工学院, 南京 210031)

2) 南京航空航天大学理学院, 南京 210016)

(2007 年 10 月 13 日收到 2008 年 2 月 11 日收到修改稿)

在不改变网络度分布的条件下, 研究了推广的失活网络的同步行为. 应用特征值比 R 来衡量网络的同步能力, 发现同步能力可以通过改变结构参数——激活节点数 M 来进行优化. 特征值比 R 随 M 的变化非常敏感, 激活节点数 M 越大, 特征值比 R 越小, 同步能力就越强, 且在一定范围内遵循 $R \sim M^{-2.0}$ 的幂律关系. 通过引入结构微扰, 该网络的同步能力也可以得到有效优化.

关键词: 推广的失活网络, 同步, 特征值比, 优化

PACC: 0590

1. 引言

自然界中存在的大量复杂系统都可以通过形形色色的复杂网络加以描述^[1,2], 而复杂网络的诸多统计特征中最重要的是小世界 (small world) 效应^[3,4] 和无标度 (scale-free) 特性^[5,6]. 同步是宇宙中很普遍的一种现象, 研究复杂网络同步的目的之一就是认识网络的拓扑结构如何影响加在其上的动力学过程, 如交通堵塞^[7-9]、疾病传播^[10,11] 等, 以方便人们更好地控制网络的同步. 很多研究表明, 小世界网络和无标度网络比规则网络更容易同步^[12-14]. 是什么原因导致复杂网络更容易同步呢? 近期的研究表明这和很多因素有关. 例如, 一些研究表明复杂网络的同步和度分布的同质性^[15,16]、聚类系数^[17-20]、度的相关性^[21]、平均度、度分布^[22] 等等有关. 另一些研究结果则表明和平均距离有关, 周涛等^[19] 研究双环网络的同步并且得到了特征值比 R 与平均距离 L 近似满足 $R \sim L^{-1.5}$. 然而, 并没有得到平均距离越小特征值比越小的一致结论. 近期关于复杂网络同步研究的热点是聚类系数与同步能力之间的关系. 赵明^[20] 等在不改变网络度分布的情况下研究了小世界网络的聚类系数与同步之间的关系, 发现大的聚类系数会阻碍网络的同步. 2002 年, Klemm 和

Eguíluz 提出了著名的失活网络 (KE 网络)^[23], 本文研究推广的失活网络 (GKE 网络) 的同步行为, 这种网络具有受年龄影响的结构特点, 并且得到了普遍的比例关系 $R \sim M^{-2.0}$ 和 $R \sim 1/p$.

2. 模型

在 GKE 网络中, 每一个节点都可以分为激活或未激活^[23,24] 两种不同的状态. 整个网络由一个有 M 个激活节点组成的一维环出发, 这个环满足周期性边界条件和调和数 $2z$ (每个节点对称地和最近邻的 $2z$ 个节点连接).

2.1. 网络的构建

GKE 网络的构建过程如下:

第一步, 向网络中增加一个节点, 并且使它和随机从 M 个激活节点中选取的 m 个节点建立连接.

第二步, 激活新的节点.

第三步, 使一个激活节点变成非激活状态. 节点 i 变成非激活状态的概率为

$$\pi(k_i) = \alpha/k_i.$$

这里 k_i 是节点 i 的度, α 是标准化因子,

$$\alpha = \left(\sum_{j \in \Lambda} 1/k_j \right)^{-1},$$

式中 Λ 是与节点 i 相邻节点的集合.

* 江苏省高校研究生科研创新计划 批准号 CX07B-033Z 和南京航空航天大学学位论文创新与创优基金 批准号 BXCXJ07-11 资助的课题.

† E-mail: liushue@nuaa.edu.cn

重复以上步骤就可以构建任意规模的 GKE 网络。

数值模拟是在当前有 $M + 1$ 个激活节点的情况下进行的。当 $M = m$ 并且 $z = M/2$ 时，本文的模型即为由 Klemm 和 Eguíluz 提出的著名的 KE 网络。实际上这种 GKE 网络与科学家合作网络和论文引用网络很相似^[25]。在这些网络中，每一个作者或者论文都有一个主题，作者阅读论文、引用文献及与其他作者合作撰写论文都是在这一个主题范围内。有趣的是，科学家合作网络和论文引用网络的聚类系数 C 与主题的数目线性相关^[25]，而且主要控制网络动力学过程的是网络中具有年龄特征。例如，像每个人的生命过程一样，一旦一个作者的年龄超过特定的值，那么他就会变成非激活状态，不再写出大量的论文也不会与他人合作。同样，当论文的内容过时也会停止被其他文章引用。所以，GKE 网络代表了一种受年龄影响的具有特殊结构的网络。

2.2. 结构微扰

通过修正网络构建过程中的第一步对 GKE 网络提出了一种结构微扰。修正方法如下：增加一个具有 m 条边的节点到网络中，将其中的一条边以一定的概率 p （以下称为结构微扰参数）连接到随机选择的未激活节点上，而其他的边则依然连接到激活节点上。

2.3. 网络的结构特点

GKE 网络具有无标度特性，它的度分布满足 $P(k) \sim k^{-\gamma}$ ($\gamma = 3.0$)，而且激活节点数 M 和结构微扰参数 p 对度分布指数 γ 没有影响^[26]。根据 GKE 网络的定义，聚类系数 C 表示为^[26]

$$C = \frac{1}{M} \left(\frac{5m}{6} - \frac{7}{30} + \alpha m^{-1} \right). \quad (1)$$

当存在结构微扰时，聚类系数满足以下方程^[26]：

$$C = \frac{m}{M} \left(\frac{5}{6} - \frac{7}{30m} \right) - \frac{1}{M} \left(\frac{13}{6} - \frac{7}{30m} \right) p + \alpha p^2. \quad (2)$$

方程 (1) 表明，没有结构微扰时聚类系数 C 满足比例关系 $C \sim 1/M$ 。这意味着可以通过改变激活节点数 M 来改变网络的聚类系数，而且这一过程还不改变网络的度分布，因为激活节点数 M 不影响度分布。

3. 数值模拟

3.1. 网络的同步

研究复杂网络的动力学同步一般是采取研究节

点与节点间耦合矩阵特征值比的办法。如果在网络的每个节点加上一个动力学系统，这个动力学系统既可以是极限环也可以是混沌的，而让有边相连的两个节点的动力学系统之间存在相互的耦合作用，就形成了一个动力学网络。严格而言，设网络有 N 个节点，第 i 个节点在 n 时刻的 m 维状态变量是 $x^i(n)$ ，单个节点在不考虑耦合作用时所满足的状态方程是

$$x^i(n+1) = F(x^i(n)).$$

设 H 是每个节点状态变量的函数，用于对其他节点进行耦合。这样，存在耦合作用的情况下，第 i 个节点所满足的状态方程表示为

$$x^i(n+1) = F(x^i(n)) + \eta \sum_{j=1}^N G_{ij} H(x^j). \quad (3)$$

对于连续系统，第 i 个节点所满足的状态方程为

$$\dot{x}^i = F(x^i) + \eta \sum_{j=1}^N G_{ij} H(x^j). \quad (4)$$

这里 η 是耦合强度， G_{ij} 表示耦合矩阵 G 的矩阵元，

$$G_{ij} = \begin{cases} k_i & (i = j), \\ -1 & (j \in \Delta_i), \\ 0 & (\text{其他}), \end{cases} \quad (5)$$

式中 k_i 是节点 i 的度， Δ_i 是与节点 i 相邻的节点的集合。耦合矩阵 G 包含了网络结构的全部信息。在耦合作用下，经过一段时间的演化，使得 $x^1 = x^2 = \dots = x^N = s$ ，网络就进入了同步状态。由于 GKE 网络的耦合矩阵是实对称拉普拉斯矩阵，它有且仅有一个重数为 1 的零特征根 θ_0 ，而其余的特征值均为非负实数，因此按特征值大小可排列为 $\theta_0 \leq \theta_1 \leq \dots \leq \theta_{N-1}$ 。最大特征值 θ_{N-1} 与最小非零特征值 θ_1 的比值经常用来衡量网络的同步能力^[27, 28]。如果耦合矩阵的特征值比 $R = \theta_{N-1}/\theta_1$ 满足

$$R < \alpha_2/\alpha_1, \quad (6)$$

网络就达到同步状态。(6) 式右边 α_2/α_1 是由单个节点的状态方程和变量的耦合方式决定的^[29]，而特征值比 R 仅依赖于拉普拉斯矩阵。所以，特征值比可以描述网络的同步能力，特征值比 R 越小，它能使更多的动力学系统同步，我们称这样的网络同步能力强。在本文中，我们不讨论具体的动力学系统，而是重点研究网络的结构对特征值比 R 的影响。

3.2. 数值模拟结果

图 1—图 7 是研究 GKE 网络同步能力的数值模拟结果，图中所有数据点都是 100 次独立运行结果

的平均值.

图 1 是不同网络规模 N 下特征值比 R 与激活节点数 M 之间的关系, 图中的直线斜率为 -2.0 . 从图 1 可以看出, 特征值比 R 对激活节点数 M 的变化非常敏感, M 越大网络越容易达到同步. 这是因为 M 越大聚类系数越小, 而小聚类系数使网络容易达到同步状态, 这与以前的许多结论^[18, 20]是一致的. 从图 1 还可以看出, 网络规模 N 对 R 与 M 的关系 $R \sim M^{-2.0}$ 没有影响. 图 2 是网络规模固定时, 不同连边数 m 下 R 与 M 的关系, 图中的直线斜率为 -2.0 . 从图 2 可以看出, 在这种情况下 m 也对 R 与 M 的关系 $R \sim M^{-2.0}$ 没有影响. 这说明对于 GKE 网络而言, $R \sim M^{-2.0}$ 是普遍成立的.

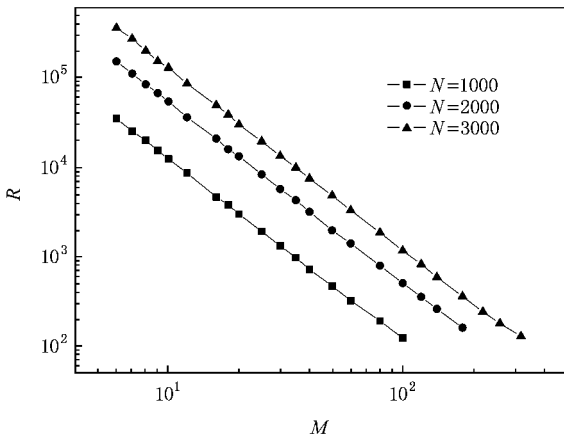


图 1 不同网络规模下特征值比 R 与激活节点数 M 的关系 $m = 4$

图 3 是特征值比 R 随聚类系数 C 变化的关系, 图中的直线斜率为 1.88 . 图 3 表明: R 与 C 正相关, 随着 C 的增加, 特征值比 R 也会相应地增加, 它们近似满足 $R \sim C^{1.88}$. 这说明增大聚类系数会阻碍网络的同步.

以上结果表明, 可以通过修正结构参数——激活节点数 M 来优化 GKE 网络的同步能力.

同时, 我们也研究了结构微扰对 GKE 网络同步的影响, 结果表明结构微扰也是一个可以改变其同步能力的重要因素. 图 4 是在不同结构微扰参数 p 下特征值比 R 与 M 的关系. 从图 4 可以看出, 当微扰参数 $p = 0.00$ 时特征值比 R 遵循 $R \sim M^{-\beta}$ ($\beta = 2.0$) 随微扰参数 p 的增加, β 迅速减小, 当微扰参数 $p = 0.50$ 时 β 几乎为零. 微扰参数对聚类系数的影响示于图 5. 从图 5 不难发现, 聚类系数 C 与微扰参数 p 之间成反比例关系. 图 6 给出了特征值比 R

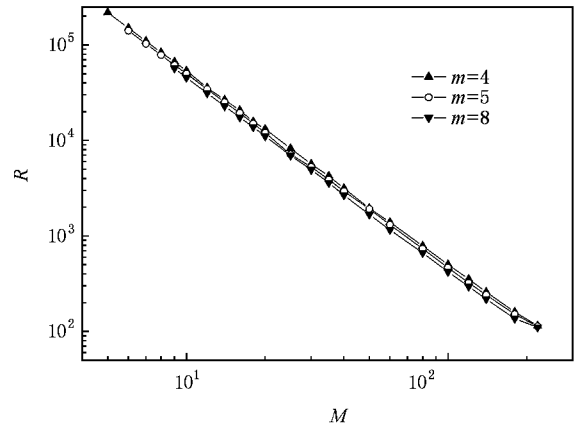


图 2 $m = 4, 5, 8$ 时特征值比 R 与激活节点数 M 的关系 $N = 2000$

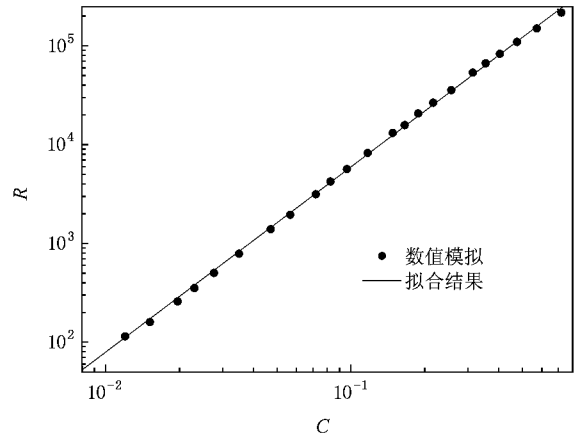


图 3 特征值比 R 与聚类系数 C 的关系 $m = 4, N = 2000$

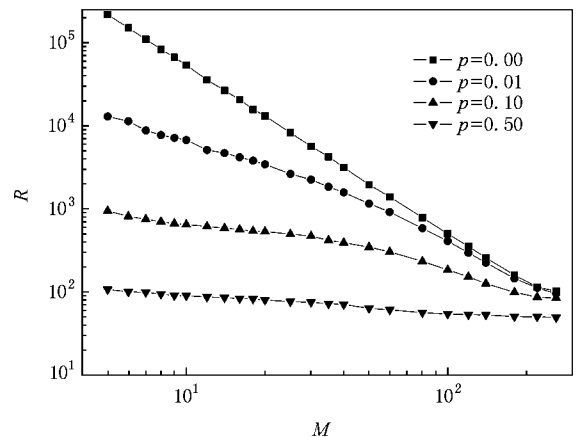


图 4 不同微扰参数下特征值比 R 与激活节点数 M 的关系 $m = 4, N = 2000$

随微扰参数 p 的变化关系. 从图 6 可以看出, 增加微扰参数 p , 特征值比 R 会呈线性减小, 特征值比 R

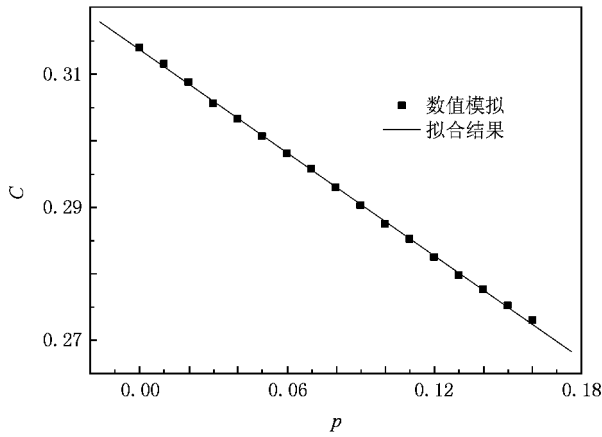


图5 聚类系数 C 与微扰参数 p 的关系 $m=4, N=2000, M=10$

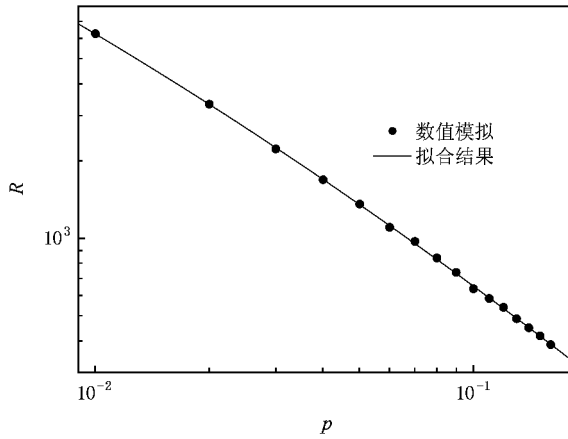


图6 特征值比 R 与微扰参数 p 的关系 $m=4, N=2000, M=10$

与结构微扰参数 p 近似满足比例关系 $R \sim 1/p$. 这说明可以通过修正结构微扰参数 p 来改善 GKE 网络的同步能力. 图7是特征值比 R 与聚类系数 C 之间

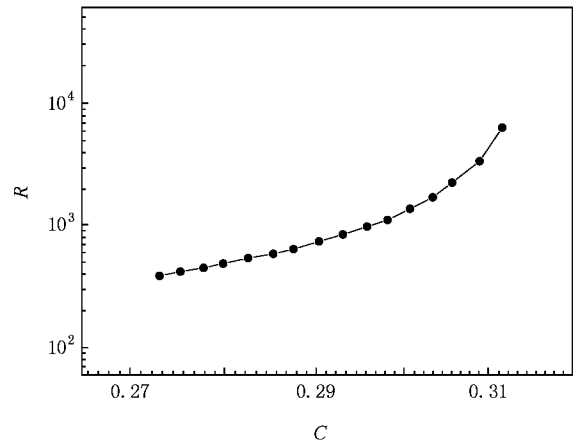


图7 数值模拟得到的特征值比 R 与聚类系数 C 的关系
 $m=4, N=2000, M=10$

关系的数值模拟结果,图中用微扰参数 p 来改变聚类系数,而不是通过改变激活节点数 M . 图4—图7的结果表明,结构微扰也是一个可以有效优化 GKE 网络同步能力的参数.

4. 结 论

本文在不改变网络度分布的条件下,通过修正结构参数——激活节点数 M 和结构微扰参数 p 优化了 GKE 网络的同步能力,得到了特征值比 R 与激活节点数 M 和结构微扰参数 p 之间所普遍满足的规律.这个规律在理论上和实际中都有很多应用价值.而且这种复杂网络结构与其同步之间的关系对设计方案中提高或降低网络的同步具有很重要的指导意义.

- [1] Albert R, Barabási A L 2002 *Rev. Mod. Phys.* **74** 47
 [2] Newman M E J 2003 *SIAM Rev.* **45** 167
 [3] Watts D J, Strogatz S H 1998 *Nature* **393** 440
 [4] Milgram S 1967 *Psychology Today* **1** 61
 [5] Barabási A L, Albert R 1999 *Science* **286** 509
 [6] Barabási A L, Albert R, Jeong H 1999 *Physica A* **272** 173
 [7] Tadić B, Thurner S, Rodgers G J 2004 *Phys. Rev. E* **69** 036102
 [8] Zhao L, Lai Y C, Park K, Ye N 2005 *Phys. Rev. E* **71** 065105
 [9] Yan G, Zhou T, Hu B, Fu Z Q, Wang B H 2006 *Phys. Rev. E* **73** 046108
 [10] Pastor-Satorras R, Vespignani A 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 3200
 [11] Yan G, Zhou T, Wang J, Fu Z Q, Wang B H 2005 *Phys. Rev. Lett.* **22** 510

- [12] Lago-Fernández L F, Huerta R, Corbacho F, Siguenza J A 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 2758
 [13] Wang X F, Chen G R 2002 *Int. J. Bifur. Chaos* **12** 187
 [14] Barahona M, Pecora L M 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 054101
 [15] Nishikawa T, Motter A E, Lai Y C, Hoppensteadt F C 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 014101
 [16] Motter A E, Zhou C, Kurths K 2005 *Phys. Rev. E* **71** 016116
 [17] Wu X, Wang B, Zhou T, Wang W, Zhao M, Yang H 2006 *Chin. Phys. Lett.* **23** 1046
 [18] McGraw P N, Menzinger M 2005 *Phys. Rev. E* **72** 015101
 [19] Zhou T, Zhao M, Wang B H 2006 *Phys. Rev. E* **73** 037101
 [20] Zhao M, Zhou T, Wang B H, Yan G, Yang H J, Bai W J 2006 *Physica A* **371** 773

- [21] di Bernardo M , Garofalo F , Sorrentino F 2007 *Int. J. Bifur. Chaos* **17** 2419
- [22] Hong H , Kim B J , Choi M Y , Park H 2002 *Phys. Rev. E* **66** 011107
- [23] Klemm K , Eguíluz V M 2002 *Phys. Rev. E* **65** 036123
- [24] Vázquez A , Bogaña M , Moreno Y , Pastor-Satorras R , Vespignani A 2003 *Phys. Rev. E* **67** 046111
- [25] Börner K , Maru J T , Goldstone R L 2004 *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **101** 5266
- [26] Tian L , Zhu C P , Shi D N , Gu G M 2006 *Phys. Rev. E* **74** 046103
- [27] Pecora L M , Carroll T L 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2109
- [28] Barahona M , Pecora L M 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 054101
- [29] Pecora L M , Barahona M 2005 *Chaos Compl. Lett.* **1** 61

Optimizing the synchronizability of generalized deactivation networks^{*}

Dai Cun-Li^{1,2)†} Liu Shu-E^{2)†} Tian Liang²⁾ Shi Da-Ning²⁾

¹ *College of Engineering , Nanjing Agricultural University , Nanjing 210031 , China*)

² *College of Science , Nanjing University of Aeronautics and Astronautics , Nanjing 210016 , China*)

(Received 13 October 2007 ; revised manuscript received 11 February 2008)

Abstract

We research the synchronizability of the generalized deactivation networks without changing its degree distribution. The synchronizability measured by the eigenratio R can be effectively optimized by adjusting the only parameter μ , the number of active nodes M . The eigenratio R is shown very sensitive to the M , and larger M will lead to better synchronizability. Furthermore, we find that μ , in a wide interval, the eigenratio R obeys a approximate power-law in the form of $R \sim M^{-2.0}$. By introducing a perturbation μ , the synchronizability of network can be effectively optimized.

Keywords : generalized deactivation networks , synchronization , eigenratio , optimization

PACC : 0590

^{*} Project supported by the Innovation Program for the Graduate Students of Jiangsu Province , China (Grant No. CX07B-033Z) and the Foundation for Graduate Students of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics , China (Grant No. BCXJ07-11).

[†] E-mail : liushue@nuaa.edu.cn