

精确计算 $n-\bar{n}$ 重正化链图传播下 $n + \bar{n} \rightarrow 2\pi^0$ 反应截面^{*}

潘 宇[†] 王凯俊 方祯云 汪先友 彭庆军

(重庆大学理论物理研究所, 重庆 400044)

(2007 年 12 月 4 日收到 2008 年 3 月 17 日收到修改稿)

采用中子 n -反中子 \bar{n} 与中性介子 π^0 强相互作用的 Lorentz 不变耦合模型, 对 $n-\bar{n}$ 重正化链图传播子作了有关物理分析及其严格解析计算, 获得精确理论计算结果. 进而将此结果用于 $n + \bar{n} \rightarrow 2\pi^0$ 反应的物理过程分析及其截面的计算研究中, 并精确计算出 $n-\bar{n}$ 重正化链图传播下 $n + \bar{n} \rightarrow 2\pi^0$ 反应微分截面. 还将此计算结果与 $n-\bar{n}$ 树图和重正化单圈链图传播下 $n + \bar{n} \rightarrow 2\pi^0$ 反应微分截面作了对比分析, 获得了有关辐射修正的重要信息. 此结果对于深入研究 Lorentz 不变耦合模型理论以及深入探索核物理中关于核子、反核子与介子强相互作用的粒子反应截面问题具有一定的参考价值. 此外, 还将对量子场论微扰理论中关于逐阶重正化计算的不同考虑方式与计算途径及其相关物理过程提供某些值得借鉴之处.

关键词: Lorentz 不变耦合模型, 重正化链图传播子, 微分截面, 辐射修正

PACC: 1110G, 1240, 1360K

1. 引 言

在描述介子 (π^+ , π^0 , π^-) 参与核子 N 与反核子 \bar{N} 强相互作用的各种唯象模型理论中, 基于强相互作用满足同位旋空间中的对称性而建立的 $SU(2)$ 不变耦合模型已取得很大成功^[1]. 在 $SU(2)$ 不变耦合模型理论中, 能相当好地描述质子 p 与反质子 \bar{p} , 中子 n 与反中子 \bar{n} 以及三种荷电状态 π 介子 (π^+ , π^0 , π^-) 参与强相互作用时的内部物理过程及其相互作用结果. 但采用这种唯象模型用于具体粒子反应问题的理论分析研究和计算时, 目前仍只能按量子场论微扰理论这一有效计算处理方法进行. 采用量子场论微扰理论作任何有关模型微扰计算时, 由于按逐阶微扰计算程序进行便形成了低阶(树图)和高阶(各种圈图)计算上的巨大差异. 作低阶(树图)计算一般相对较为容易, 且不存在理论计算中的发散困难而容易获得精确计算结果, 但作高阶(各种圈图)计算时, 理论计算中由于出现发散困难需要采用重正化方案消除非物理发散部分而保留物理收敛

(有限)部分, 由此也带来了具体计算处理上的很大困难, 致使很难获得精确计算结果(对于这种情形, 通常采用的方法便是对研究问题作某些计算上的近似考虑后再作相应近似计算处理^[2-5], 但所获得的结果在精确理论描述意义上存在差异). 本文中, 我们将考虑微扰理论中另一种微扰计算方式——计算重正化链图传播子, 并对其作有关理论分析与具体计算. 由于传播子在转递内部相互作用时物理贡献的重要性, 对其研究具有十分重要意义^[6], 而本文研究的链图传播子系指微扰理论中包含从低阶(树图)到无穷高阶(无穷阶重正化圈图)传播子中的一种特殊情形, 其思想最早来自重正化理论创始人 Dyson^[7,8], 而涉及有关重正化问题已在文献 [1] 中作了全面介绍. 然而, 因这种重正化链图传播子涉及到微扰理论所有微扰阶中(一部分)微扰计算情形, 因而, 这种传播子函数必须收敛才具有物理描述意义. 这是因为按 Dyson 的猜想^[8], 若计及微扰理论中全部所有微扰阶时, 其计算结果应是发散的, 文献 [9] 也持这种观点, 并认为量子场论微扰理论有可能是某种更正确理论的渐近展开表述. 这将意味着采

* 国家重点基础研究发展规划(批准号: 2003CB716300) 国家自然科学基金(批准号: 10175096) 和重庆市自然科学基金(批准号: 8562) 资助的课题.

[†] E-mail: py_1981@yahoo.cn

用量子场论微扰理论作计算时,有效且合理的计算方式必须以收敛的重正化计算结果为前提条件,这可以按有限逐阶作完整重正化计算,当然也可以按收敛的无穷阶作完整重正化计算.在本文中,我们基于后一种计算方式对 $n + \bar{n} \rightarrow 2\pi^0$ 反应作了有关研究.在此,值得一提的是,在文献 [10] 中也正是基于这种计算方式完成了在量子电动力学中对光子 γ 重正化链图传播下的 Bhabha 散射 $e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+$ 微分截面的精确理论计算,其结果较之在光子 γ 树图传播下的计算结果与实验观测值符合更好.这也从一个方面说明了考虑重正化链图传播子并作有关理论计算具有合理性与正确性.

2. $n-\bar{n}$ 重正化链图传播子及其精确理论计算结果

由满足强相互作用下的同位旋空间转动不变性(即对称性)建立的描述荷电介子(π^+ , π^0 , π^-)与核子(p , n)强相互作用的 $SU(2)$ 不变耦合模型中,其相互作用拉氏密度量可分为四部分^[11],

$$\hat{L}_{(p,n) \rightarrow \pi^\pm, \pi^0}^{SU(2)}(x) = iG\hat{N}(x)\gamma_5\sigma \cdot \hat{N}(x)\hat{\Phi}(x). \quad (1)$$

式中 G 为强耦合常数, $\hat{N}(x)$ 和 $\hat{\bar{N}}(x)$ 分别是核子 N 和反核子 \bar{N} 同位旋二重态旋量算子和共轭二重态共轭旋量算子, $\hat{\Phi}(x)$ 是荷电介子(π^0 , π^0 , π^-)同位旋三重态矢量算子,而 σ 则是 Pauli 矢量算符.

相互作用拉氏密度算子(1)式不但可满足同位旋空间转动不变性(即特殊对称性),而且也满足 Lorentz 变换不变性(即基本对称性).对这个拉氏密度算子(1)式作分解后,可表示为四部分不同相互作用意义下的算子,即

$$\hat{L}_{(p,n) \rightarrow \pi^\pm, \pi^0}^{SU(2)}(x) = \hat{L}_{(p,n) \rightarrow \pi^\pm}^{\text{Lorentz}}(x) + \hat{L}_{(p \rightarrow \pi^0)}^{\text{Lorentz}}(x) + \hat{L}_{(n \rightarrow \pi^0)}^{\text{Lorentz}}(x), \quad (2)$$

$$\hat{L}_{(p,n) \rightarrow \pi^\pm}^{\text{Lorentz}}(x) = iG\sqrt{2}\left[\hat{\psi}_n(x)\gamma_5\hat{\psi}_p(x)\hat{\phi}_{\pi^\pm}^\dagger(x) + \hat{\bar{\psi}}_p(x)\gamma_5\hat{\psi}_n(x)\hat{\phi}_{\pi^\pm}(x)\right] \quad (3)$$

$$\hat{L}_{(p \rightarrow \pi^0)}^{\text{Lorentz}}(x) = iG\hat{\bar{\psi}}_p(x)\gamma_5\hat{\psi}_p(x)\hat{\phi}_{\pi^0}(x), \quad (4)$$

$$\hat{L}_{(n \rightarrow \pi^0)}^{\text{Lorentz}}(x) = -iG\hat{\bar{\psi}}_n(x)\gamma_5\hat{\psi}_n(x)\hat{\phi}_{\pi^0}(x) \quad (5)$$

这里, $\hat{\psi}_p$ 和 $\hat{\bar{\psi}}_p$ 分别是描述质子 p -反质子 \bar{p} 的旋量场和共轭旋量场算子, $\hat{\psi}_n$ 和 $\hat{\bar{\psi}}_n$ 分别是描述中子 n -反中子 \bar{n} 的旋量场和共轭旋量场算子, $\hat{\phi}_{\pi^\pm}(x)$ 和

$\hat{\phi}_{\pi^\pm}^\dagger(x)$ 分别是描述荷电介子(π^+ , π^-)的标量场和共轭标量场算子, $\hat{\phi}_{\pi^0}(x)$ 是描述中性介子 π^0 的标量场算子.

在本文中,我们研究中子与反中子湮没产生双中性介子 π^0 的非弹性碰撞反应 $n + \bar{n} \rightarrow 2\pi^0$, 并采用拉氏密度量(1)式中,仅涉及中子 n -反中子 \bar{n} 与中性介子 π^0 强相互作用部分的模型拉氏密度算子(5)式,即中子 n -反中子 \bar{n} 与中性介子 π^0 强相互作用的 Lorentz 不变耦合模型,计算在 $n-\bar{n}$ 重正化链图传播下的反应微分截面.对此,需要首先对 $n-\bar{n}$ 链图传播子作重正化计算处理.图 1 给出了 $n-\bar{n}$ 链图传播子和重正化链图传播子 Feynman 图.由图 1 可看出,要具体计算出 $n-\bar{n}$ 重正化链图传播子 $S_{F,\pi^0}^{\text{chain}}(q)$,则需要计算出收敛圈函数 $\Pi_c(q)$.对此,不但需要对发散圈函数 $\Pi_d(q)$ 作正规化处理(分离掉 $\Pi_d(q)$ 中的非物理发散量而保留物理有限量 $\Pi_c(q)$)以及重正化处理(对非物理量发散量合理吸收进模型的物理参量中),而且还需要具体计算出所保留的这个物理有限量,即重正化有限量 $\Pi_c(q)$.对发散圈函数 $\Pi_d(q)$ 的正规化与重正化处理,已在文献 [11] 中作了详细介绍.其中正规化后将分离出含一次发散和对数发散的两部分非物理发散量,而进行重正化处理时,分别将这两类发散吸收进中子(反中子)的质量 m 重正化和耦合常数 G 重正化定义中^[11].对于 $\Pi_c(q)$ 的具体计算则十分复杂和困难,但在文献 [12] 中已完成对 $\Pi_c(q)$ 的严格解析计算从而获得精确理论结果,

$$\Pi_c(q) = \frac{G^2}{16\pi^2} \left\{ (\gamma q) \left[I_2(q^2) - I_3(q^2) - I_1(q^2) \right] + im \left[I_1(q^2) + I_3(q^2) \right] \right\}, \quad (6)$$

式中 $I_1(q^2)$, $I_2(q^2)$ 和 $I_3(q^2)$ 是三个标量函数, $q^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 - q_0^2$.

$$I_1(q^2) = - \left[Z_1(q^2)K_1(q^2) + Z_2(q^2)K_2(q^2) \right] - \Sigma \ln(\Sigma) - \Sigma^2 \sqrt{4\Sigma^2 - 1} \times \left\{ \frac{\arctan\left(\frac{2 - \Sigma^2}{\sqrt{4\Sigma^2 - \Sigma^4}}\right)}{\sqrt{4\Sigma^2 - \Sigma^4}} + \frac{\arctan\left(\frac{\Sigma^2}{\sqrt{4\Sigma^2 - \Sigma^4}}\right)}{\sqrt{4\Sigma^2 - \Sigma^4}} \right\} \quad (7)$$

$$I_2(q^2) = - \frac{1}{2} \left[\frac{m^2 - \mu^2}{q^2} + Z_1^2(q^2)K_1(q^2) + Z_2^2(q^2)K_2(q^2) \right] - \frac{1}{2} + \frac{\Sigma^2}{2} + \left(\Sigma^2 - \frac{\Sigma^4}{2} \right) \ln(\Sigma) - \frac{\Sigma^4}{2} \sqrt{4\Sigma^2 - 1}$$

$$\times \left\{ \frac{\arctan(2 - \Sigma^2)}{\sqrt{4\Sigma^2 - \Sigma^4}} + \frac{\arctan(\Sigma^2)}{\sqrt{4\Sigma^2 - \Sigma^4}} \right\} \quad (8)$$

$$I_3(q^2) = -1 + 2\Sigma^2 + \chi(2\Sigma^2 - \Sigma^4) \ln(\Sigma) - \frac{8\Sigma^2 - 2\Sigma^4 - 4}{\sqrt{4\Sigma^2 - 1}} \times \left\{ \frac{\arctan(2 - \Sigma^2)}{\sqrt{4\Sigma^2 - 1}} + \frac{\arctan(\Sigma^2)}{\sqrt{4\Sigma^2 - \Sigma^4}} \right\} \quad (9)$$

式中 $\Sigma = \mu/m$, m 为中子(反中子)质量, μ 为中性介子质量. (7),(8)两式中的标量函数 $I_1(q^2)$ 和 $I_2(q^2)$ 中所含 $Z_1(q^2)$ 和 $Z_2(q^2)$ 以及 $K_1(q^2)$ 和 $K_2(q^2)$ 的具体函数表达式如下:

$$Z_j(q^2) = \begin{cases} \alpha(q^2) - (-1)^{j+1} \sqrt{\beta(q^2)} & (q^2 > 0), \\ \alpha(q^2) + (-1)^{j+1} \sqrt{\beta(q^2)} & (-(m - \mu)^2 \leq q^2 < 0), \\ \alpha(q^2) + (-1)^{j+1} i \sqrt{-\beta(q^2)} & (-(m + \mu)^2 \leq q^2 < -(m - \mu)^2), \\ \alpha(q^2) + (-1)^{j+1} \sqrt{\beta(q^2)} & (q^2 < -(m + \mu)^2), \end{cases} \quad (10)$$

$$K_j(q^2) = \begin{cases} \ln \left| \frac{1 - \alpha(q^2) + \sqrt{\beta(q^2)}}{\alpha(q^2) - \sqrt{\beta(q^2)}} \right| & (q^2 > 0), \\ \ln \left| \frac{1 - \alpha(q^2) - \sqrt{\beta(q^2)}}{\alpha(q^2) + \sqrt{\beta(q^2)}} \right| & (-(m - \mu)^2 \leq q^2 < 0), \\ -\ln \Sigma + (-1)^{j+1} i \left\{ \arctan \frac{1 - \alpha(q^2)}{\sqrt{-\beta(q^2)}} + \arctan \frac{\alpha(q^2)}{\sqrt{-\beta(q^2)}} \right\} & (-(m + \mu)^2 \leq q^2 < -(m - \mu)^2), \\ \ln \left| \frac{1 - \alpha(q^2) + (-1)^{j+1} \sqrt{\beta(q^2)}}{\alpha(q^2) + (-1)^{j+1} \sqrt{\beta(q^2)}} \right| + (-1)^{j+1} i\pi & (q^2 < -(m + \mu)^2), \end{cases} \quad (11)$$

式中 $j=1, 2$, 且

$$\alpha(q^2) = \frac{q^2 + m^2 - \mu^2}{2q^2}, \quad \beta(q^2) = \left[\frac{q^2 + m^2 - \mu^2}{2q^2} \right]^2 + \frac{\mu^2}{q^2}. \quad (12)$$

利用重正化圈函数 $\Pi_c(q)$ 的严格解析计算结

果(6)-(12)式,不难求出 $n-\bar{n}$ 重正化链图传播子 $S_{F,c}^{(\text{chain})}(q)$ (参见图 1(c)) 的精确理论计算结果,即

$$S_{F,c}^{(\text{chain})}(q) = \frac{S_f(q)}{1 - \Pi_c(q)S_f(q)} = -\frac{\gamma q}{q^2 + m^2} R_1(q^2) - \frac{im}{q^2 + m^2} R_2(q^2). \quad (13)$$

这里

$$S_f(q) = \frac{-1}{\gamma q - im},$$

而 $R_1(q^2)$ 和 $R_2(q^2)$ 分别是 $n-\bar{n}$ 重正化链图传播子对树图传播子中所含非单位阵(γq)和单位阵的两个不同辐射修正因子,

$$R_1(q^2) = \frac{1 - gF(q^2) + g \frac{m^2}{q^2 + m^2} I_2(q^2)}{[1 - gF(q^2)]^2 + q^2 \left[g \frac{m}{q^2 + m^2} I_2(q^2) \right]^2}, \quad (14)$$

$$R_2(q^2) = \frac{1 - gF(q^2) - g \frac{q^2}{q^2 + m^2} I_2(q^2)}{[1 - gF(q^2)]^2 + q^2 \left[g \frac{m}{q^2 + m^2} I_2(q^2) \right]^2}, \quad (15)$$

式中

$$g = \frac{G^2}{16\pi^2},$$

$$F(q^2) = I_1(q^2) + I_3(q^2) - \frac{q^2}{q^2 + m^2} I_2(q^2).$$

3. $n-\bar{n}$ 反应微分截面

在中子 n -反中子 \bar{n} 与中性介子 π^0 强相互作用的 Lorentz 不变耦合模型中, $n-\bar{n}$ 重正化链图传播下 $n+\bar{n}\rightarrow 2\pi^0$ 反应的 Feynman 图如图 2 所示. 由图 2 可看出,在 $n-\bar{n}$ 重正化链图传播下, $n+\bar{n}\rightarrow 2\pi^0$ 反应内部呈现十分复杂的强相互作用过程,中子 n 和反中子 \bar{n} 放出或吸收中性介子 π^0 后,又重新吸收或放出这个中性介子 π^0 ,且这样的过程包含无穷多个.

在物理学中,研究粒子反应截面^[13]具有十分重要的实验观测意义. 在本文则研究 $n-\bar{n}$ 重正化链图传播下 $n+\bar{n}\rightarrow 2\pi^0$ 反应截面的精确理论计算问题并给出计算结果. 根据粒子物理学理论,在入射两粒子质心系中(本文采用质心系) $n+\bar{n}\rightarrow 2\pi^0$ 反应微分截面的一般计算公式为^[11]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{G^4}{(2\pi)^2} \frac{m^2}{16p_0^2} \frac{\sqrt{p_0^2 - \mu^2}}{\sqrt{p_0^2 - m^2}} \frac{1}{4} \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{\sigma'=1}^2 |M_{fi}|^2, \quad (16)$$

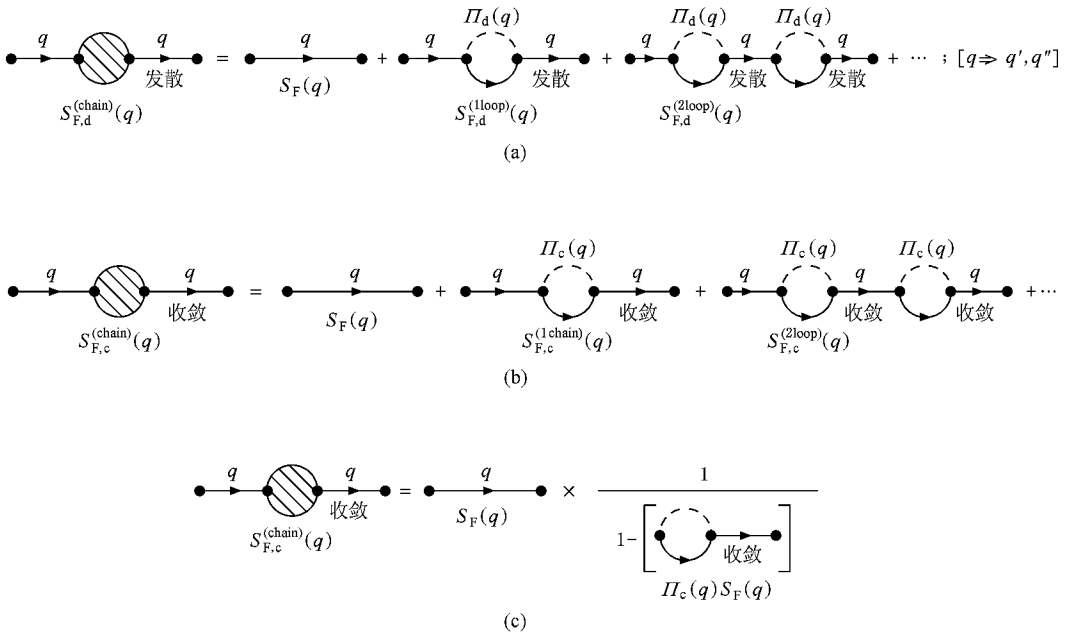


图 1 n-n̄链图传播子 Feynman 图 (a)发散重整化的链图传播子 (b)收敛重整化的链图传播子 (c)为(b)的收敛结果

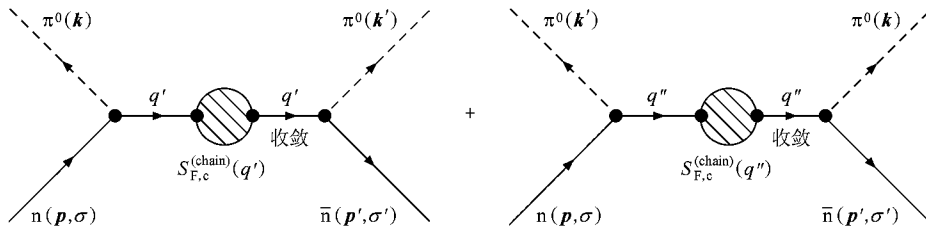


图 2 在 n-n̄重整化链图传播下 n + n̄ → 2π⁰ 反应的 Feynman 图 q' = p - k = k' - p', q'' = p - k' = k - p'

式中 p_0 是质心系中入射中子 n (反中子 \bar{n}) 的能量, M_{fi} 为 $n + \bar{n} \rightarrow 2\pi^0$ 反应的跃迁矩阵元, 而 $\frac{1}{4} \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{\sigma'=1}^2$ 则表示对入射中子 n 和反中子 \bar{n} 的自旋求和平均. 利用 (16) 式计算微分截面, 关键是需要计算出跃迁矩阵元模方 $|M_{fi}|^2$. 由图 2 可知, 在 $n-\bar{n}$ 重整化链图传播下 $n + \bar{n} \rightarrow 2\pi^0$ 反应跃迁矩阵元 $M_{fi}^{(chain)}$ 应由两部分构成, 且应用 Feynman 规则可表示为

$$M_{fi}^{(chain)} = \bar{v}_{p',\sigma'} \gamma_5 t \gamma_5 u_{p,\sigma} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} t &= S_{F,c}^{(chain)}(q') + S_{F,c}^{(chain)}(q'') \\ &= \frac{(\gamma q') R_1(q'^2) + imR_2(q'^2)}{q'^2 + m^2} \\ &\quad - \frac{(\gamma q'') R_1(q''^2) + imR_2(q''^2)}{q''^2 + m^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

利用 (17) (18) 式可给出跃迁矩阵元模方的自旋求和平均

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{\sigma'=1}^2 |M_{fi}^{(chain)}|^2 &= \frac{1}{4} \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{\sigma'=1}^2 [\bar{v}_{p',\sigma'} \gamma_5 t \gamma_5 u_{p,\sigma}] \\ &\quad \times [\bar{v}_{p',\sigma'} \gamma_5 t \gamma_5 u_{p,\sigma}]^*, \end{aligned} \quad (19)$$

式中星号表示取 $[\bar{v}_{p',\sigma'} \gamma_5 t \gamma_5 u_{p,\sigma}]$ 的复共轭. 利用正负能旋量的性质和求迹技术^[11], 对 (19) 式中自旋求和平均进行合理处理后可以将 (19) 式转换为求迹计算,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4} \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{\sigma'=1}^2 |M_{fi}^{(chain)}|^2 \\ &= -\frac{1}{4} \text{Tr} \left[\left[\frac{(\gamma q') R_1^*(q'^2) - imR_2^*(q'^2)}{q'^2 + m^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(\gamma q'') R_1^*(q''^2) - imR_2^*(q''^2)}{q''^2 + m^2} \right] \right. \\ &\quad \times \frac{\gamma p' - im}{2im} \left[\frac{(\gamma q') R_1(q'^2) - imR_2(q'^2)}{q'^2 + m^2} \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(\gamma q'') R_1(q''^2) - imR_2(q''^2)}{q''^2 + m^2} \right] \right] \end{aligned}$$

$$\times \frac{\gamma p + im}{2im} \Big]. \quad (20)$$

对(20)式可作简化处理,为此,引入关于两个四维矢量 a 和 b 的函数 $g(a, b)$,

$$g(a, b) = \text{Tr} \left[\frac{(\gamma a) R_1(a^2) - im R_2(a^2)}{a^2 + m^2} \frac{\gamma p + im}{2im} \right. \\ \left. \times \frac{(\gamma b) R_1^*(b^2) - im R_2^*(b^2)}{b^2 + m^2} \frac{\gamma p' - im}{2im} \right], \quad (21)$$

式中 a 和 b 可按如下四种情形取值 $(a, b) = (q', q'), (q', q''), (q'', q'), (q'', q'')$.

采用引入的函数(21)式,可将(20)式简化为

$$\frac{1}{4} \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{\sigma'=1}^2 |M_{fi}^{(\text{chain})}|^2 = -\frac{1}{4} [g(q', q') + g(q', q'') \\ + g(q'', q') + g(q'', q'')]. \quad (22)$$

由(22)式可知,为了获得 $\frac{1}{4} \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{\sigma'=1}^2 |M_{fi}^{(\text{chain})}|^2$ 的计算结果,需要计算出(22)式右端四个涉及求迹计算的函数 $g(a, b)$. 注意到 $g(a, b)$ 含有 16 个展开求迹项,有八项含奇数个 γ 矩阵的乘积,由 γ 矩阵求迹性质,对这八项的求迹为零^[1]. 因而 $g(a, b)$ 可以化简成八个求迹,且完成计算后可表示为

$$g(a, b) = \frac{1}{\gamma(a^2, b^2)} \sum_{n=1}^8 g_n. \quad (23)$$

式中 $g_1, g_2, g_3, \dots, g_8$ 表示由求迹计算后所给出的结果,且

$$\gamma(a^2, b^2) = -4m^2(a^2 + m^2)(b^2 + \mu^2).$$

经过繁杂的计算后,可获得(23)式中所含八个求迹计算结果.

$$g_1 = \text{Tr}[(\gamma a) R_1(a^2)(\gamma p)(\gamma b) R_1^*(b^2)(\gamma p')] \\ = 4R_1(a^2) R_1^*(b^2) [(pa)(p'b) \\ - (pp')(ab) + (pb)(p'a)], \quad (24)$$

$$g_2 = \text{Tr}[(\gamma a) R_1(a^2) \mathbb{I} \gamma p \mathbb{I} - im R_2^*(b^2) \mathbb{I} - im) \\ = -4m^2 R_1(a^2) R_2^*(b^2)(pa), \quad (25)$$

$$g_3 = \text{Tr}[-im R_2(a^2) \mathbb{I} im \mathbb{I} (\gamma b) R_1^*(b^2) \mathbb{I} \gamma p' \\ = 4m^2 R_1^*(b^2) R_2(a^2)(p'b), \quad (26)$$

$$g_4 = \text{Tr}[(\gamma a) R_1(a^2) \mathbb{I} im \mathbb{I} - im R_2^*(b^2) \mathbb{I} \gamma p' \\ = 4m^2 R_1(a^2) R_2^*(b^2)(p'a), \quad (27)$$

$$g_5 = \text{Tr}[-im R_2(a^2) \mathbb{I} \gamma p \mathbb{I} (\gamma b) R_1^*(b^2) \mathbb{I} - im) \\ = 4m^2 R_1^*(b^2) R_2(a^2)(pb), \quad (28)$$

$$g_6 = \text{Tr}[-im R_2(a^2) \mathbb{I} \gamma p \mathbb{I} - im R_2^*(b^2) \mathbb{I} \gamma p']$$

$$= 4m^2 R_2(a^2) R_2^*(b^2)(pp'), \quad (29)$$

$$g_7 = \text{Tr}[(\gamma a) R_1(a^2) \mathbb{I} im \mathbb{I} (\gamma b) R_1^*(b^2) \mathbb{I} - im) \\ = 4m^2 R_1(a^2) R_1^*(b^2)(ab), \quad (30)$$

$$g_8 = \text{Tr}[-im R_2(a^2) \mathbb{I} im \mathbb{I} - im R_2^*(b^2)] \\ = -4m^4 R_2(a^2) R_2^*(b^2). \quad (31)$$

鉴于本文在入射中子 n 和反中子 \bar{n} 质心系中作计算,为此,可利用质心系中有关物理量之间应满足的关系(图3). 按图3不难导出有关物理量之间应满足的关系,

$$p_0 = k_0,$$

$$|\mathbf{p}| = \sqrt{p_0^2 - m^2},$$

$$|\mathbf{k}| = \sqrt{p_0^2 - \mu^2},$$

$$q'^2 = (\mathbf{p} - \mathbf{k})^2$$

$$= 2p_0 - m^2 - \mu^2 - 2|\mathbf{p}||\mathbf{k}|\cos\theta,$$

$$q''^2 = (\mathbf{p} + \mathbf{k})^2$$

$$= 2p_0 - m^2 - \mu^2 + 2|\mathbf{p}||\mathbf{k}|\cos\theta.$$

利用上述关系可将 $g(a, b)$ 以及将 $\frac{1}{4} \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{\sigma'=1}^2 |M_{fi}^{(\text{chain})}|^2$ 的最终计算结果表示成以入射能量 p_0 和散射角 θ 为变量、以中子 n (反中子 \bar{n}) 质量 m 和 π^0 介子质量 μ 为参数的函数表达式. 利用这一结果,可将 $n+\bar{n}\rightarrow 2\pi^0$ 反应在 $n-\bar{n}$ 重正化链图传播下的微分截面表示为

$$\frac{d\sigma^{(\text{chain})}}{d\Omega} = \frac{1 - G^4}{64(2\pi)^2} \frac{m^2 \sqrt{p_0^2 - \mu^2}}{p_0^2 \sqrt{p_0^2 - m^2}} \\ \times \left\{ 8m^2 \left[\frac{R_2(q'^2) R_2^*(q'^2)}{\gamma(q'^2, q'^2)} \right. \right. \\ + \frac{R_2(q''^2) R_2^*(q''^2)}{\gamma(q''^2, q''^2)} \\ + \frac{2R_2(q'^2) R_2^*(q''^2)}{\gamma(q'^2, q''^2)} \Big] (p_0^2 - m^2) \\ - 8m^2 \left[\frac{R_1(q'^2) R_2^*(q'^2)}{\gamma(q'^2, q''^2)} \right. \\ + \frac{R_2(q''^2) R_1^*(q'^2)}{\gamma(q''^2, q'^2)} \\ + \frac{R_1(q'^2) R_2^*(q'^2) + R_2(q'^2) R_1^*(q'^2)}{\gamma(q'^2, q'^2)} \Big] \\ \left. \times (|\mathbf{p}|^2 - |\mathbf{p}||\mathbf{k}|\cos\theta) \right. \\ \left. - 8m^2 \left[\frac{R_2(q'^2) R_1^*(q'^2)}{\gamma(q'^2, q''^2)} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{R_1(q''^2) R_2^*(q'^2)}{\gamma(q''^2, q'^2)} \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{R_1(q'^2)R_2^*(q'^2) + R_2(q'^2)R_1^*(q'^2)}{\eta(q'^2, q'^2)} \Big] \\
& \times (|\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{p}||\mathbf{k}|\cos\theta) \\
& + \frac{8}{\eta(q'^2, q'^2)} R_1(q'^2)R_1^*(q'^2) \\
& \times [p_0^2(|\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{k}|^2 - 2|\mathbf{k}||\mathbf{p}|\cos\theta) \\
& - (|\mathbf{p}|^2 - |\mathbf{p}||\mathbf{k}|\cos\theta)] \\
& + \frac{16}{\eta(q'^2, q'^2)} R_1(q'^2)R_1^*(q'^2) \\
& \times [p_0^2(\mu^2 - m^2) \\
& - (|\mathbf{p}|^4 - |\mathbf{p}|^2|\mathbf{k}|^2\cos^2\theta)] \\
& + \frac{8}{\eta(q'^2, q'^2)} R_1(q'^2)R_1^*(q'^2) \\
& \times [p_0^2(|\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{k}|^2 + 2|\mathbf{k}||\mathbf{p}|\cos\theta) \\
& - (|\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{p}||\mathbf{k}|\cos\theta)] \Big\}. \quad (32)
\end{aligned}$$

(32) 式中涉及三个函数 R_1 , R_2 和 η 分别由 (14), (15) 和 (23) 式给出. 本文通过繁杂的计算处理后, 已最终寻求出在 $n\bar{n}$ 重正化链图传播下 $n + \bar{n} \rightarrow 2\pi^0$ 反应微分截面的精确理论计算结果 (32) 式.

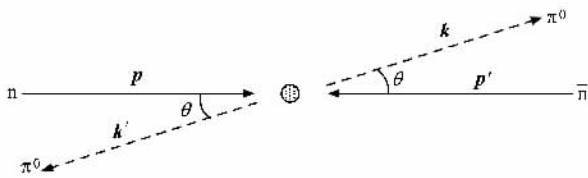


图 3 在入射中子 n 和反中子 \bar{n} 质心系中 $n + \bar{n} \rightarrow 2\pi^0$ 反应示意图

4. $n\bar{n}$ 反应微分截面辐射修正问题探讨

考虑 $n + \bar{n} \rightarrow 2\pi^0$ 反应在 $n\bar{n}$ 重正化无穷阶链图传播下和重正化低阶链图(由树图传播子和含一个内圈的传播子所构成的最简单链图)传播下的微分截面作比较, 由此可了解两者之间在贡献上的差异. 为此, 需要对两者针对 $n + \bar{n} \rightarrow 2\pi^0$ 反应在 $n\bar{n}$ 树图传播下的微分截面分别作比较, 以便获得各自产生的辐射修正量, 从中可寻出有关辐射修正的重要信息.

鉴于上述考虑, 我们还需要计算出 $n + \bar{n} \rightarrow 2\pi^0$ 反应在 $n\bar{n}$ 重正化低阶链图和树图传播下的两个微分截面 $d\sigma^{(\text{loop})}/d\Omega$ 和 $d\sigma^{(\text{tree})}/d\Omega$. 为了计算这两个微

分截面, 最简单的方法是直接利用 $d\sigma^{(\text{chain})}/d\Omega$ 的计算结果 (32) 式, 这时只须注意到 (32) 式中所含两个函数 $R_1(q^2)$ 和 $R_2(q^2)$ 是(无穷阶)链图传播子对树图传播子中非单位阵 (γq) 和单位阵的辐射修正因子. 为此, 若考虑低阶链图传播子时 $R_1(q^2)$ 和 $R_2(q^2)$ 可作如下替换:

$$R_1(q^2) \rightarrow \xi_1(q^2),$$

$$R_2(q^2) \rightarrow \xi_2(q^2).$$

所替换的两个函数 $\xi_1(q^2)$ 和 $\xi_2(q^2)$ 已在文献 [14] 中给出了精确理论计算结果,

$$\begin{aligned}
\xi_1(q^2) = & \frac{G^2}{16\pi^2} \left[I_1(q^2) + I_3(q^2) \right. \\
& \left. - \frac{q^2 - m^2}{q^2 + m^2} I_2(q^2) \right], \quad (33)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi_2(q^2) = & \frac{G^2}{16\pi^2} \left[I_1(q^2) + I_3(q^2) \right. \\
& \left. - \frac{2q^2}{q^2 + m^2} I_2(q^2) \right], \quad (34)
\end{aligned}$$

式中 $I_1(q^2)$, $I_2(q^2)$ 和 $I_3(q^2)$ 已由 (7)–(9) 式给出. 若考虑树图传播子时, 这两个辐射修正因子显然均应替换成 $R_1(q^2) \rightarrow 1$, $R_2(q^2) \rightarrow 1$. 完成上述替换后, 便由 (32) 式自动给出两个微分截面 $d\sigma^{(\text{loop})}/d\Omega$ 和 $d\sigma^{(\text{tree})}/d\Omega$ 的解析计算结果.

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma^{(\text{loop})}}{d\Omega} = & \frac{1}{64} \frac{G^4}{(2\pi)^8} \frac{m^2 \sqrt{p_0^2 - \mu^2}}{p_0 \sqrt{p_0^2 - m^2}} \\
& \times \left\{ 8m^2 \left[\frac{\xi_2(q'^2)\xi_2^*(q'^2)}{\eta(q'^2, q'^2)} \right. \right. \\
& + \frac{\xi_2(q'^2)\xi_2^*(q'^2)}{\eta(q'^2, q'^2)} \\
& + \frac{2\xi_2(q'^2)\xi_2^*(q'^2)}{\eta(q'^2, q'^2)} \Big] (p_0^2 - m^2) \\
& - 8m^2 \left[\frac{\xi_1(q'^2)\xi_2^*(q'^2)}{\eta(q'^2, q'^2)} \right. \\
& + \frac{\xi_2(q'^2)\xi_1^*(q'^2)}{\eta(q'^2, q'^2)} \\
& + \frac{\xi_1(q'^2)\xi_2^*(q'^2) + \xi_2(q'^2)\xi_1^*(q'^2)}{\eta(q'^2, q'^2)} \Big] \\
& \times (|\mathbf{p}|^2 - |\mathbf{p}||\mathbf{k}|\cos\theta) \\
& - 8m^2 \left[\frac{\xi_2(q'^2)\xi_1^*(q'^2)}{\eta(q'^2, q'^2)} \right. \\
& + \frac{\xi_1(q'^2)\xi_2^*(q'^2)}{\eta(q'^2, q'^2)} \\
& + \frac{\xi_1(q'^2)\xi_2^*(q'^2) + \xi_2(q'^2)\xi_1^*(q'^2)}{\eta(q'^2, q'^2)} \Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times (|\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{p}||\mathbf{k}|\cos\theta) \\ & + \frac{8}{\gamma(q'^2, q'^2)} \xi_1(q'^2) \xi_1^*(q'^2) \\ & \times [p_0^2 (|\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{k}|^2 - 2|\mathbf{k}||\mathbf{p}|\cos\theta) \\ & - (|\mathbf{p}|^2 - |\mathbf{p}||\mathbf{k}|\cos\theta)^2] \\ & + \frac{16}{\gamma(q'^2, q'^2)} \xi_1(q'^2) \xi_1^*(q'^2) \\ & \times [p_0^2 (\mu^2 - m^2) \\ & - (|\mathbf{p}|^4 - |\mathbf{p}|^2|\mathbf{k}|^2\cos^2\theta)] \\ & + \frac{8}{\gamma(q''^2, q''^2)} \xi_1(q''^2) \xi_1^*(q''^2) \\ & \times [p_0^2 (|\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{k}|^2 + 2|\mathbf{k}||\mathbf{p}|\cos\theta) \\ & - (|\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{p}||\mathbf{k}|\cos\theta)^2] \Big\}, \quad (35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^{(\text{tree})}}{d\Omega} &= \frac{1 - G^4}{64(2\pi)^2} \frac{m^2 \sqrt{p_0^2 - \mu^2}}{p_0^2 \sqrt{p_0^2 - m^2}} \\ & \times \left\{ 8m^2 \left[\frac{1}{\gamma(q'^2, q'^2)} + \frac{1}{\gamma(q''^2, q''^2)} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2}{\gamma(q'^2, q''^2)} \right] (p_0^2 - m^2) \right. \\ & \left. - 8m^2 \left[\frac{1}{\gamma(q'^2, q'^2)} + \frac{1}{\gamma(q''^2, q''^2)} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2}{\gamma(q'^2, q''^2)} \right] \right\} \end{aligned}$$

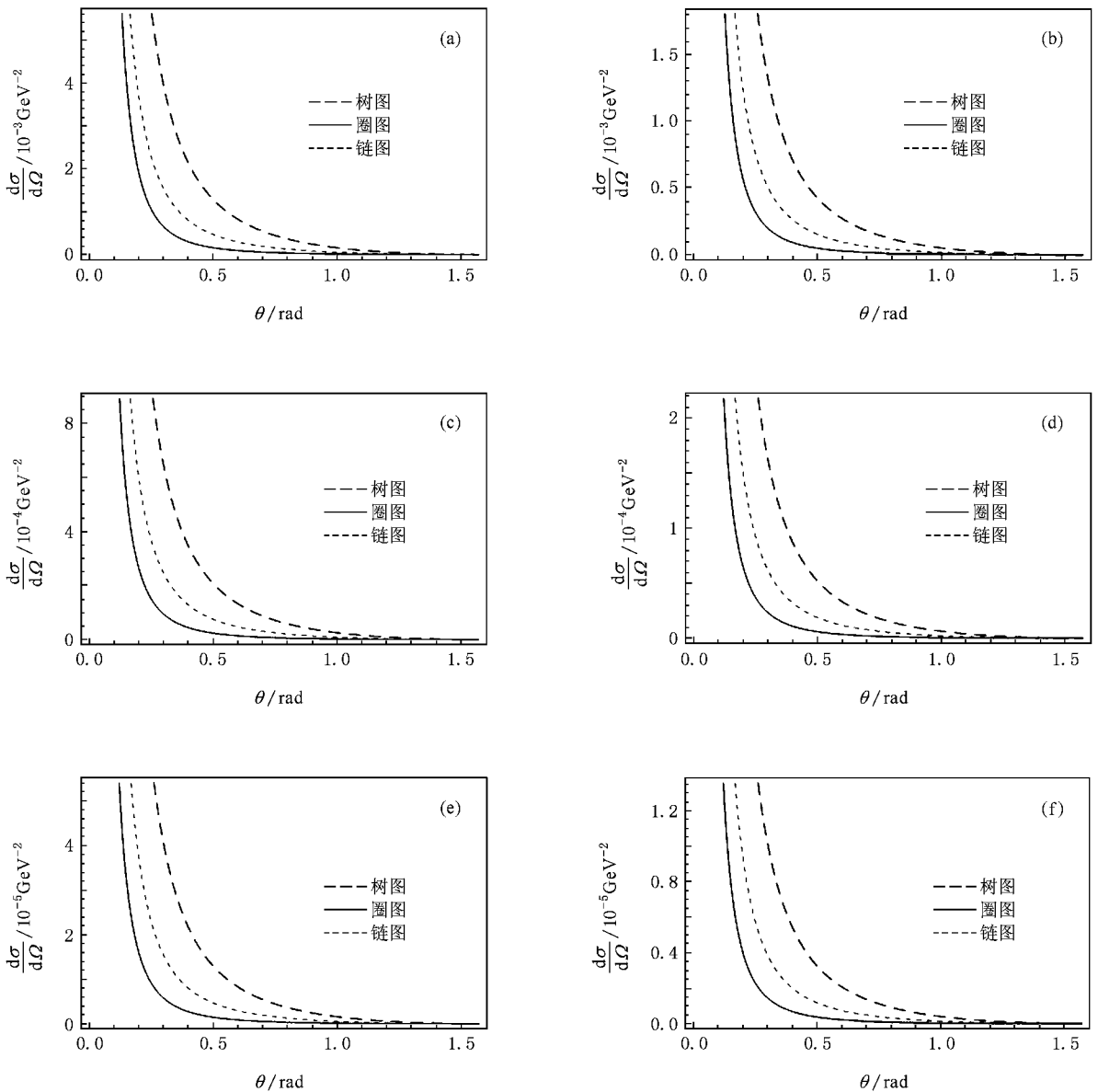


图4 在质心系中不同入射能量下由 $n-\bar{n}$ 树图、重正化单圈链图和无穷阶链图传递相互作用时 $n+\bar{n}\rightarrow 2\pi^0$ 反应微分截面 $d\sigma/d\Omega$ 与散射角 θ 的关系 (a) $p_0 = 20$ GeV (b) $p_0 = 35$ GeV (c) $p_0 = 50$ GeV (d) $p_0 = 100$ GeV (e) $p_0 = 200$ GeV (f) $p_0 = 400$ GeV

$$\begin{aligned}
& \times (|\mathbf{p}|^2 - |\mathbf{p}||\mathbf{k}|\cos\theta) \\
& - 8m^2 \left[\frac{1}{\gamma(q'^2, q'^2)} + \frac{1}{\gamma(q'^2, q'^2)} \right. \\
& \left. + \frac{2}{\gamma(q'^2, q'^2)} \right] \\
& \times (|\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{p}||\mathbf{k}|\cos\theta) \\
& + \frac{8}{\gamma(q'^2, q'^2)} \\
& \times [p_0^2 (|\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{k}|^2 - 2|\mathbf{k}||\mathbf{p}|\cos\theta) \\
& - (|\mathbf{p}|^2 - |\mathbf{p}||\mathbf{k}|\cos\theta)^2] \\
& + \frac{16}{\gamma(q'^2, q'^2)} \{ p_0^2 (\mu^2 - m^2) \\
& - (|\mathbf{p}|^4 - |\mathbf{p}|^2|\mathbf{k}|^2\cos^2\theta) \} \\
& + \frac{8}{\gamma(q'^2, q'^2)} \\
& \times [p_0^2 (|\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{k}|^2 + 2|\mathbf{k}||\mathbf{p}|\cos\theta) \\
& - (|\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{p}||\mathbf{k}|\cos\theta)^2] \}. \quad (36)
\end{aligned}$$

为了对本文研究中的辐射修正作具体分析,可对入射中子 n (反中子 \bar{n})在不同入射能量下的 $n + \bar{n} \rightarrow 2\pi^0$ 反应微分截面作计算机选点数值计算.图4中分别给出了质心系中入射中子 n (反中子 \bar{n})入射能量 $p_0 = 20, 35, 50, 100, 200, 400$ GeV时,本文所考虑的树图、圈图、链图三种情形传播下的微分截面 $d\sigma/d\Omega$ 与散射角 θ 之间的关系,计算中取中子 n (反中子 \bar{n})质量 $m = 0.93957$ GeV, π^0 介子质量 $\mu = 0.1349$ GeV,强耦合常数 $G^2 = 14$.

分析图4可以看出:在考虑相当大的入射能量范围(20—400 GeV)内,都存在重正化链图和重正化单圈链图对树图不可忽略且有效的辐射修正,即辐

射修正为不可忽略的有限值,但辐射修正量仍然很小.因此,采用量子场论微扰理论作计算时应该考虑重正化链图对树图不可忽略的这种贡献.此外,辐射修正量很小,这表明在描述 $n-\bar{n}$ 与中性介子 π^0 强相互作用的Lorentz不变耦合模型中,考虑重正化链图传递这种相互作用时其辐射修正应为一个有限的微小修正值,因而相应的微扰理论计算方法仍是可行的.这也将为更加精确观测 $n + \bar{n} \rightarrow 2\pi^0$ 反应微分截面,提供有关理论计算研究上的重要参考价值 and 依据.

5. 结 论

本文在考虑 $n-\bar{n}$ 重正化链图传播下对 $n + \bar{n} \rightarrow 2\pi^0$ 反应的物理过程作了完整理论分析并精确地给出了微分截面理论计算结果.这一研究结果将更加精确地描述粒子反应过程及其结果,具有理论意义.在本文所完成的理论分析及研究工作中,已对由费米子重正化单圈所构成的简单重正化链图传播子作了完整理论分析和精确计算,并应用在具体粒子反应的研究中.对于由费米子重正化一般(复杂)圈图所构成的重正化链图,其重正化分析与处理方法完全类似于本文简单重正化链图情形.由这些一般(复杂)重正化链图传播子所产生的辐射修正效应是否存在?在所有这些一般(复杂)重正化链图传播子函数中是否均满足收敛(有限)?这些问题是值得深入研究和探讨的.对这些问题的理论分析和研究,将是一项长期艰巨的工作,因为这涉及到量子场论微扰理论中许多基本的理论问题,其中包括Dyson猜想.

- [1] Lurie D 1968 *Particles and Field* (NewYork: Interscience Publisher) pp200—203, 273—276, 278—289
- [2] Denner A, Kraus E, Roth M 2004 *Phys. Rev. D* **70** 033002
- [3] Kidonakis N, Owens J F 2001 *Phys. Rev. D* **63** 054019
- [4] Jack I, Jones D R T, Worthy L A 2007 *Phys. Rev. D* **75** 045014
- [5] Greub C, Liniger P 2001 *Phys. Rev. D* **63** 054025
- [6] Huang S Z, Ruan T N, Wu N, Zhang P F, Zheng Z P 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1882 (in Chinese) [黄时中、阮图南、吴宁、张鹏飞、郑志鹏 2003 物理学报 **52** 1882]
- [7] Dyson F J 1949 *Phys. Rev.* **75** 486
- [8] Dyson F J 1952 *Phys. Rev.* **85** 631
- [9] Zhu H Y 1960 *Quantum Field Theory* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [朱洪元 1960 量子场论(北京:科学出版社)]

- [10] Jiang M, Fang Z Y, Sang W L, Gao F 2006 *Chin. Phys. Lett.* **23** 2681
- [11] Zhang Z C, Jiang Z F, Fang Z Y, Gao F, Jiang M, Chen W S 2006 *J. Chongqing Univ.* **29** 89 (in Chinese) [张忠灿、蒋再富、方祯云、高飞、蒋敏、陈文索 2006 重庆大学学报 **29** 89]
- [12] Zhang Z C, Xu J, Fang Z Y, Gao F, Jiang Z F, Jiang M 2007 *J. Chongqing Univ.* **30** 95 (in Chinese) [张忠灿、徐进、方祯云、高飞、蒋再富、蒋敏 2007 重庆大学学报 **30** 95]
- [13] Liu Y F, Shi D H, Sun J F, Yang X D, Zhu Z L 2005 *Chin. Phys.* **14** 2280
- [14] Zhang Z C, Wang C M, Fang Z Y, Zhang Y, Zeng D M, Luo G 2005 *J. Chongqing Univ.* **28** 83 (in Chinese) [张忠灿、王春明、方祯云、张宇、曾代敏、罗光 2005 重庆大学学报 **28** 83]

Accurately calculate cross section of the $n + \bar{n} \rightarrow 2\pi^0$ reaction in the n - \bar{n} renormalization chain diagram *

Pan Yu[†] Wang Kai-Jun Fang Zhen-Yun Wang Xian-You Peng Qing-Jun

(*Institute of Theoretical Physics , Chongqing University , Chongqing 400044 , China*)

(Received 4 December 2007 ; revised manuscript received 17 March 2008)

Abstract

Adopting Lorentz-invariant coupling model of neutron n -antineutron \bar{n} and neutral meson strong interaction , we made physical analysis and accurate calculation of the n - \bar{n} renormalization chain diagram propagator , and obtained the theoretical results. Furthermore , in applying it to the physical process analysis and cross-section evaluation in the reaction $n + \bar{n} \rightarrow 2\pi^0$, its differential cross-section is obtained. Through the comparison between this calculation and those scenarios , namely the n - \bar{n} tree diagram and renormalization chain diagram propagator contribution , some important information about radiative correction was obtained. This study would offer certain academic references to the further research on Lorentz-invariant coupling model and the nuclear physics about cross section problem of particles in nucleon antinucleon and neutral meson strong interaction in terms of theoretical calculations. In addition , it will also provide something valuable on relevant physical processes , and on the renormalization calculation orderly with different approaches in perturbation theory of quantum field theory.

Keywords : Lorentz-invariant coupling model , renormalization chain diagram propagator , differential cross section , radiative correction

PACC : 1110G , 1240 , 1360K

* Project supported by the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant No. 2003CB716300) , the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10175096) and the Natural Science Foundation of Chongqing , China (Grant No. 8562).

[†] E-mail : py_1981@yahoo.cn