

# 热力耦合作用下双层碳纳米管的扭转屈曲<sup>\*</sup>

姚小虎 韩 强<sup>†</sup>

(华南理工大学土木与交通学院 广州 510640)

(2007 年 5 月 10 日收到, 2008 年 3 月 27 日收到修改稿)

考虑碳纳米管周边弹性介质和层间范德瓦耳斯力的作用, 利用连续介质力学的壳体理论, 建立了热力耦合作用下碳纳米管屈曲问题的控制方程, 给出了相应的临界屈曲扭矩的解析解. 数值模拟结果表明, 在低温和室温环境下, 碳纳米管的临界屈曲载荷随着温度变化量的增加而提高, 在高温环境下, 碳纳米管的临界屈曲载荷随着温度变化量的增加而降低.

关键词: 碳纳米管, 屈曲, 热力耦合

PACC: 4620, 4630L, 6148

## 1. 引言

碳纳米管具有许多优异的力学、电学和化学性能, 具有很高的强度和韧性. 可以预见, 将碳纳米管作为复合材料的增强体可以表现出良好的强度、弹性、抗疲劳性和各向异性. 因此, 碳纳米管基础力学行为的研究近年来受到了人们的广泛关注<sup>[1-3]</sup>.

多壁碳纳米管由多个同心的单壁碳纳米管组成, 当承受压缩载荷时, 多壁碳纳米管会发生弯曲, 并伴随弹性皱褶、屈曲以及形成扭结. 碳纳米管的许多物理性质(如导电性)强烈地受到屈曲变形的影响<sup>[4]</sup>. 由于受到纳米尺度的限制, 碳纳米管的屈曲行为的实验研究是非常困难的, 因此理论分析方法被广泛用来研究碳纳米管的屈曲行为. 主要有两种理论方法可以解释碳纳米管的力学行为: 分子动力学方法和连续介质力学方法. 分子动力学模拟方法在揭示碳纳米管的力学行为方面起了重要的作用<sup>[2, 5-11]</sup>, 但是由于分子动力学计算规模较大, 对计算尺寸有严格限制, 因此直接从介观和微观结构来预测宏观材料的性能和结构的响应带来很大困难. Yakobson 等<sup>[5]</sup>利用分子动力学方法引入了单壁碳纳米管的轴向压缩屈曲的原子模型, 并将得到的结果与连续壳模型进行了对比, 他们发现连续壳体模型能够预测用分子动力学模拟得到的所有的屈曲变化

模式. 但是由于多壁碳纳米管之间范德瓦耳斯力的存在, 已有的连续壳体模型并不能直接应用于研究多壁碳纳米管的基础力学行为<sup>[12-15]</sup>. 茹重庆<sup>[16]</sup>研究了嵌入弹性介质中双壁碳纳米管受轴向压缩的屈曲行为, 并指出在同样条件下嵌入弹性基体中的双壁碳纳米管的临界屈曲应变低于单壁碳纳米管的临界屈曲应变. 采用相似的理论, 韩强等<sup>[17, 18]</sup>研究了双壁碳纳米管的扭转屈曲和弯曲不稳定性. He 等<sup>[19]</sup>将层间相互作用视为层间距离和管径的函数, 考虑任意两层而不仅是近邻两层间的相互作用, 研究了多壁碳纳米管的屈曲. 谢根全等<sup>[20]</sup>基于非局部弹性理论, 在考虑小尺度效应影响的情况下, 研究了单壁碳纳米管在轴向压力作用下的屈曲. 近来碳纳米管在热环境中屈曲性能的研究引起了人们的广泛关注.

本文考虑碳纳米管周边弹性介质和层间范德瓦耳斯力的作用, 利用连续介质力学的壳体理论, 建立了热力耦合作用下碳纳米管屈曲问题的控制方程, 给出了相应的临界屈曲扭矩的解析解.

## 2. 基本方程

考虑一个半径为  $R$ , 厚度为  $t$  的弹性圆柱壳, 其弹性模量为  $E$ . 壳体的屈曲控制方程为<sup>[17]</sup>

$$D\nabla^8 w + \frac{Et}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \left[ N_x \nabla^4 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right]$$

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号: 10672059)和广东省自然科学基金(批准号: 06025689)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: emqhan@scut.edu.cn

$$+ 2N_{xy} \nabla^4 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + N_y \nabla^4 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \Bigg] \\ = \nabla^4 P(x, y). \quad (1)$$

当均匀温度场中的温度改变量为  $T$  时, 弹性壳体的物理方程变为

$$N_x = K(\epsilon_x + \nu \epsilon_y) - \frac{Et\alpha_1}{1-\nu} T \\ = N_{xM} + N_{xT}, \\ N_y = K(\epsilon_y + \nu \epsilon_x) - \frac{Et\alpha_2}{1-\nu} T \quad (2) \\ = N_{yM} + N_{yT}, \\ N_{xy} = K(1-\nu)\epsilon_{xy},$$

式中  $K = Et(1-\nu^2)/\alpha_1$  和  $\alpha_2$  分别是圆柱壳轴向和周向的热膨胀系数;  $N_x$ 、 $N_y$  和  $N_{xy}$  是单位长度上的内力,  $N_{xM}$  和  $N_{yM}$  表示由机械载荷引起的单位长度上的内力,  $N_{xT}$  和  $N_{yT}$  表示由热载荷引起的单位长度上的内力. 将 (2) 式代入 (1) 式即可得到热力耦合作用下圆柱壳的屈曲控制方程.

外管的法向力  $P_2$  由两部分构成, 表示如下:

$$P_2 = P_2^V + P_2^W, \quad (3)$$

式中  $P_2^V$  是外管与内管的层间范德瓦耳斯力,  $P_2^W$  是周边弹性介质对外管的作用力.

内管的法向力  $P_1$  表示如下:

$$P_1 = P_1^V(x, y) \\ = c[w_1(x, y) - w_2(x, y)], \quad (4)$$

式中  $P_1^V$  是内管与外管的层间范德瓦耳斯力. 根据法向平衡条件, 有

$$P_1^V(x, y) = -\frac{R_1}{R_2} P_1^V(x, y), \quad (5)$$

$$P_2^W = -kw_2(x, y). \quad (6)$$

这里  $c$  和  $k$  分别是范德瓦耳斯力常数和周边弹性介质的弹性系数.

### 3. 临界屈曲条件

对双壁碳纳米管的内管 1 和外管 2 分别运用方程 (1), 可以得到如下线性方程组:

$$D\nabla^8 w_1 + \frac{Et}{R_1^2} \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} \\ - \nabla^4 \left[ N_{x1}^0 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + 2N_{xy1}^0 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} + N_{y1}^0 \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right] \\ = c\nabla^4 w_2 - c\nabla^4 w_1, \quad (7)$$

$$D\nabla^8 w_2 + \frac{Et}{R_2^2} \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} \\ - \nabla^4 \left[ N_{x2}^0 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + 2N_{xy2}^0 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x \partial y} + N_{y2}^0 \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} \right] \\ = c \frac{R_1}{R_2} (\nabla^4 w_1 - \nabla^4 w_2) - k\nabla^4 w_2. \quad (8)$$

假设内外管具有相同的弯曲刚度  $D$ 、弹性模量  $E$  和壁厚  $t$ . 方程 (7) 和方程 (8) 通过范德瓦耳斯力参数  $c$  相互耦合.

设  $P_{20M}^V$  和  $P_{20T}^V$  分别是由机械载荷和热载荷引起的屈曲前外管的范德瓦耳斯力,  $P_{20M}^W$  和  $P_{20T}^W$  分别是由机械载荷和热载荷引起的屈曲前外管和弹性介质之间的压力. 法向平衡条件为

$$N_{y2}^0 = -P_{20M}^V R_2 - \frac{Et\alpha_2}{1-\nu} T, \quad (9)$$

$$N_{y1}^0 = P_{20M}^V R_2 - \frac{Et\alpha_2}{1-\nu} T. \quad (10)$$

由热载荷引起的轴向应力和应变均匀分布于内外管的横截面上, 因此每一管上的膜力为

$$N_{x1}^0 = N_{x2}^0 = -\frac{Et\alpha_1 T}{1-\nu}. \quad (11)$$

双壁碳纳米管上的扭矩  $I$  由两部分组成,  $I_1$  和  $I_2$  分别表示作用于内管和外管上的扭矩, 有

$$I = I_1 + I_2. \quad (12)$$

扭矩  $I_1$  和  $I_2$  依赖于内管和外管的半径

$$N_{xy1}^0 = N_{xy2}^0 = N_{xy}^0 \\ = \frac{I_1}{2\pi R_1^2} \\ = \frac{I_2}{2\pi R_2^2}. \quad (13)$$

联合方程 (12) 和 (13), 扭矩  $I_1$  和  $I_2$  可表示如下:

$$I_i = 2\pi R_i^2 N_{xy}^0 \quad (i = 1, 2). \quad (14)$$

方程 (7) 和 (8) 可改写为

$$D\nabla^8 w_1 + \frac{Et}{E_1^2} \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} \\ - 2N_{xy}^0 \nabla^4 \left[ \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \right] - \nabla^4 \left[ P_{20M}^V R_2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right] \\ + \frac{Et\alpha_1 T}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \nabla^4 w_1 + \frac{Et\alpha_2 T}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \nabla^4 w_1 \\ = c\nabla^4 w_2 - c\nabla^4 w_1, \quad (15) \\ D\nabla^8 w_2 + \frac{Et}{E_2^2} \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} \\ - 2N_{xy}^0 \nabla^4 \left[ \frac{\partial^2 w_2}{\partial x \partial y} \right] + \nabla^4 \left[ P_{20M}^V R_2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{Et\alpha_1 T}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \nabla^4 w_2 + \frac{Et\alpha_2 T}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \nabla^4 w_2 \\
& = c \frac{R_1}{R_2} (\nabla^4 w_1 - \nabla^4 w_2) - k \nabla^4 w_2. \quad (16)
\end{aligned}$$

方程(15)和(16)就是热力学耦合作用下双壁碳纳米管的扭转屈曲控制方程。

我们假定双壁碳纳米管的扭转屈曲模态如下：

$$w_i = f_i \sin\left(\frac{m\pi x}{L} - \frac{ny}{R_i}\right) \quad (i = 1, 2), \quad (17)$$

式中  $L$  是碳纳米管的管长,  $f_1$  和  $f_2$  是实常数,  $m$  和  $n$  分别为碳纳米管的轴向波数和周向波数. 将方程(17)代入方程(15)和方程(16), 可以得到

$$A_1 w_1 + B_1 w_2 = 0, \quad (18a)$$

$$A_2 w_1 + B_2 w_2 = 0. \quad (18b)$$

由方程组(18a), (18b)有非零解的条件, 可以得到决定双壁碳纳米管扭转临界屈曲载荷和屈曲模态的如下方程组：

$$A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0, \quad (19)$$

式中  $A_1, A_2, B_1$  和  $B_2$  分别为

$$\begin{aligned}
A_1 = & D \left[ \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{n}{R_1} \right)^2 \right]^4 + \frac{Et}{R_1^2} \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4 \\
& - 2N_{xy}^0 \left( \frac{m\pi}{L} \right) \left( \frac{n}{R_1} \right) \left[ \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{n}{R_1} \right)^2 \right]^2 \\
& + P_{20M}^V R_2 \left[ \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{n}{R_1} \right)^2 \right]^2 \left( \frac{n}{R_1} \right)^2 \\
& - \frac{Et\alpha_1 T}{1-\nu} \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \left[ \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{n}{R_1} \right)^2 \right]^2 \\
& - \frac{Et\alpha_2 T}{1-\nu} \left( \frac{n}{R_1} \right)^2 \left[ \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{n}{R_1} \right)^2 \right]^2 \\
& + c \left[ \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{n}{R_1} \right)^2 \right]^2, \quad (20)
\end{aligned}$$

$$B_1 = -c \left[ \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{n}{R_2} \right)^2 \right]^2, \quad (21)$$

$$A_2 = -\frac{cR_1}{R_2} \left[ \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{n}{R_1} \right)^2 \right]^2, \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
B_2 = & D \left[ \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{n}{R_2} \right)^2 \right]^4 + \frac{Et}{R_2^2} \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4 \\
& - 2N_{xy}^0 \left( \frac{m\pi}{L} \right) \left( \frac{n}{R_2} \right) \left[ \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{n}{R_2} \right)^2 \right]^2 \\
& - P_{20M}^V R_2 \left[ \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{n}{R_2} \right)^2 \right]^2 \left( \frac{n}{R_2} \right)^2 \\
& - \frac{Et\alpha_1 T}{1-\nu} \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \left[ \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{n}{R_1} \right)^2 \right]^2 \\
& - \frac{Et\alpha_2 T}{1-\nu} \left( \frac{n}{R_1} \right)^2 \left[ \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{n}{R_1} \right)^2 \right]^2
\end{aligned}$$

$$+ \left( \frac{cR_1}{R_2} + k \right) \left[ \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{n}{R_2} \right)^2 \right]^2. \quad (23)$$

## 4. 简化分析和讨论

由于双壁碳纳米管的半径通常至少为若干纳米, 内外管半径的差值与双壁碳纳米管的半径相比非常小. 基于以上原因, 内外管半径的差值可以忽略不计, 令

$$R_1 \approx R_2 = R. \quad (24)$$

使用方程组(18a), (18b)的非零解条件, 可以得到决定碳纳米管的临界屈曲应变和屈曲模态方程为

$$\begin{aligned}
& \left[ 2N_{xy}^0 \left( \frac{m\pi}{L} \right) \left( \frac{n}{R} \right) \right]^2 \\
& + (M_1 + M_2) \left[ 2N_{xy}^0 \left( \frac{m\pi}{L} \right) \left( \frac{n}{R} \right) \right]^2 \\
& + M_1 M_2 - c^2 = 0, \quad (25)
\end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned}
M_1 = & D \left[ \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{n}{R_1} \right)^2 \right]^2 \\
& - \frac{Et\alpha_1 T}{1-\nu} \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 - \frac{Et\alpha_2 T}{1-\nu} \left( \frac{n}{R_1} \right)^2 \\
& + \frac{Et}{R_1^2} \left[ \frac{\left( \frac{m\pi}{L} \right)^2}{\left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{n}{R_1} \right)^2} \right]^2 \\
& + c + P_{20M}^V R_2 \left( \frac{n}{R_1} \right)^2, \quad (26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_2 = & D \left[ \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{n}{R_2} \right)^2 \right]^2 \\
& - \frac{Et\alpha_1 T}{1-\nu} \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 - \frac{Et\alpha_2 T}{1-\nu} \left( \frac{n}{R_2} \right)^2 \\
& + \frac{Et}{R_2^2} \left[ \frac{\left( \frac{m\pi}{L} \right)^2}{\left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{n}{R_2} \right)^2} \right]^2 \\
& + c \frac{R_1}{R_2} + k - P_{20M}^V R_1 \left( \frac{n}{R_2} \right)^2. \quad (27)
\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}
& (M_1 + M_2)^2 - 4(M_1 M_2 - c^2) \\
& = (M_1 - M_2)^2 + 4c^2 > 0, \quad (28)
\end{aligned}$$

临界屈曲载荷可由以下公式给出：

$$N_{xy}^0 = \frac{1}{\chi \frac{m\pi}{L} \chi \frac{n}{R}} \left\{ D \left[ \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{n}{R} \right)^2 \right]^2 \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{E(\frac{m\pi}{L})^4}{R^2[(\frac{m\pi}{L})^2 + (\frac{n}{R})^2]} + \left(c + \frac{k}{2}\right) \\
& - \frac{Et\alpha_1 T}{1-\nu} \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 - \frac{Et\alpha_2 T}{1-\nu} \left(\frac{n}{R}\right)^2 \\
& - \sqrt{c^2 + \left[\frac{k}{2} - P_{20}^V \left(\frac{n}{R}\right)^2\right]^2} \}. \quad (29)
\end{aligned}$$

令

$$\lambda = \frac{m\pi R}{L},$$

$$K = \frac{Et}{1-\nu^2},$$

临界屈曲载荷 (29) 式可写为

$$\begin{aligned}
N_{xy}^0 & = \frac{D(\lambda^2 + n^2)}{2\lambda n R^2} + \frac{(1-\nu^2)K\lambda^3}{2(\lambda^2 + n^2)} \\
& + \frac{R^2}{2\lambda n} \left[ c + \frac{k}{2} - \frac{Et\alpha_1 T}{1-\nu} \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \right. \\
& \left. - \frac{Et\alpha_2 T}{1-\nu} \left(\frac{n}{R}\right)^2 - \sqrt{c^2 + \left[\frac{k}{2} - P_{20}^V \left(\frac{n}{R}\right)^2\right]^2} \right]. \quad (30)
\end{aligned}$$

因此, 临界屈曲载荷可由方程 (30) 等号右边关于  $m$

和  $\lambda$  的最小值确定. 对相对较长的碳纳米管, 由于  $\frac{\lambda}{n}$

$\ll 1$ , 方程 (30) 能够被简化为

$$\begin{aligned}
N_{xy}^0 & = \frac{4D}{\lambda R^2} + \frac{(1-\nu^2)K\lambda^3}{64} \\
& + \frac{R^2}{2\lambda n} \left[ c + \frac{k}{2} - \frac{Et\alpha_1 T}{1-\nu} \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \right. \\
& \left. - \frac{Et\alpha_2 T}{1-\nu} \left(\frac{n}{R}\right)^2 - \sqrt{c^2 + \left[\frac{k}{2} - P_{20}^V \left(\frac{n}{R}\right)^2\right]^2} \right]. \quad (31)
\end{aligned}$$

#### 4.1. 缺省范德瓦耳斯力、周边弹性介质和温度的变化

如果不考虑范德瓦耳斯力、周边弹性介质和温度的变化, 即取  $c=0, k=0, T=0$ , 则方程 (31) 可以简化为

$$N_{xy}^0 = \frac{4D}{\lambda R^2} + \frac{(1-\nu^2)K\lambda^3}{64}. \quad (32)$$

取

$$\frac{dN_{xy0}}{d\lambda} = 0,$$

则有

$$\lambda^4 = \frac{64}{\alpha(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{R}\right)^2. \quad (33)$$

将 (33) 式代入 (32) 式, 可以得到圆柱壳扭转屈曲的经典解.

#### 4.2. 缺省温度的变化

如果不考虑温度的变化, 即取  $T=0$ , 则方程 (31) 为

$$\begin{aligned}
N_{xy}^0 & = \frac{4D}{\lambda R^2} + \frac{(1-\nu^2)K\lambda^3}{64} \\
& + \frac{R^2}{2\lambda n} \left[ c + \frac{k}{2} - \sqrt{c^2 + \left[\frac{k}{2} - P_{20}^V \left(\frac{n}{R}\right)^2\right]^2} \right]. \quad (34)
\end{aligned}$$

(34) 式和韩强等<sup>[17]</sup>得到的结果是完全一致的.

#### 4.3. 温度变化对扭转屈曲的影响

假设  $k=0$ , 则方程 (31) 变为

$$\begin{aligned}
N_{xy}^0 & = \frac{4D}{\lambda R^2} + \frac{(1-\nu^2)K\lambda^3}{64} \\
& + \frac{R^2}{2\lambda n} \left[ c - \frac{Et\alpha_1 T}{1-\nu} \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 - \frac{Et\alpha_2 T}{1-\nu} \left(\frac{n}{R}\right)^2 \right. \\
& \left. - \sqrt{c^2 + \left[-P_{20}^V \left(\frac{n}{R}\right)^2\right]^2} \right]. \quad (35)
\end{aligned}$$

Jiang 等<sup>[21]</sup>指出, 碳纳米管的热膨胀系数在低温和室温时是小于零的, 在高温时变为正值. 从方程 (35) 可以得出: 在低温环境下, 随着温度变化量的增加, 双壁碳纳米管的扭转屈曲载荷增大; 而在高温环境下, 随着温度变化量的增加, 双壁碳纳米管的扭转屈曲载荷则减小.

### 5. 数值计算结果与分析

通过以上分析, 根据方程组 (18a), (18b) 有非零解的条件, 可以得到在高温和低温环境下双壁碳纳米管扭转临界屈曲载荷. 本文中高温环境指大于室温的环境, 低温环境指小于和等于室温环境. 参数的取值如下:  $R_1 = 0.68 \text{ nm}$ ,  $R_2 = 1.086 \text{ nm}$ ,  $L = 10R_2$ ,  $\nu = 0.34$ ,  $Et = 360 \text{ J/m}^2$ ,  $D = 0.85 \text{ eV} = 1.3617 \times 10^{-19} \text{ J}$ ,  $c = 9.918667 \times 10^{19} \text{ N/m}^3$ ,  $k = 0$ . 在低温和室温时取  $\alpha_1 = -1.6 \times 10^{-6}$ ,  $\alpha_2 = -0.5 \times 10^{-6}$ , 在高温时取  $\alpha_1 = 1.1 \times 10^{-6}$ ,  $\alpha_2 = 0.8 \times 10^{-6}$ .

图 1 和图 2 分别给出了低温和高温环境时双壁碳纳米管的扭转屈曲载荷随波数  $m$  和  $n$  的变化关系. 从图 1 和图 2 可以看出, 双壁碳纳米管的扭转屈曲载荷依赖于其屈曲模态的波数  $m$  和  $n$ , 这与弹性薄壳扭转屈曲的经典解是很相似的. 从图 1 和图 2 还可以看出, 双壁碳纳米管的扭转临界屈曲载荷由唯一的屈曲模态波数决定.

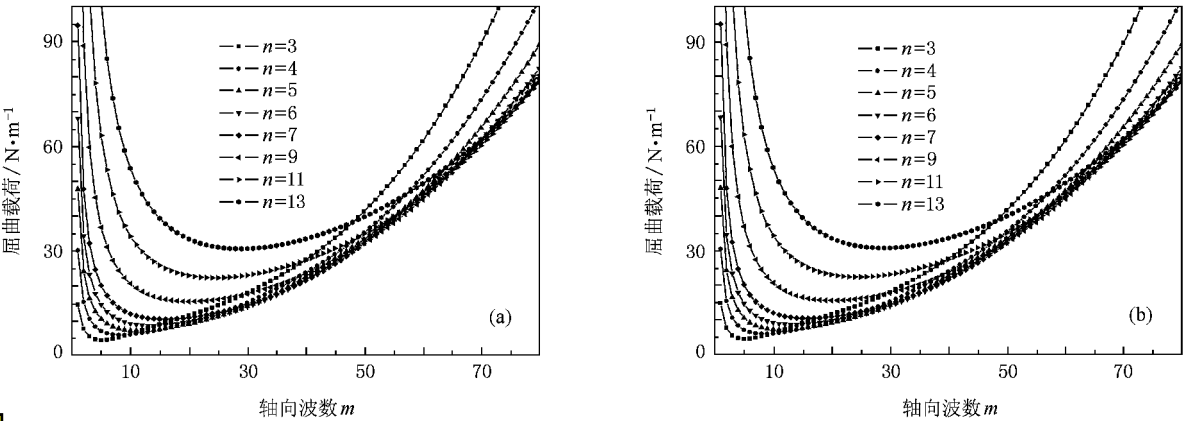


图 1 低温环境中热耦合作用下双壁碳纳米管的扭转屈曲载荷随波数  $m, n$  的变化关系 (a)  $T = 100\text{ K}$ , (b)  $T = 200\text{ K}$

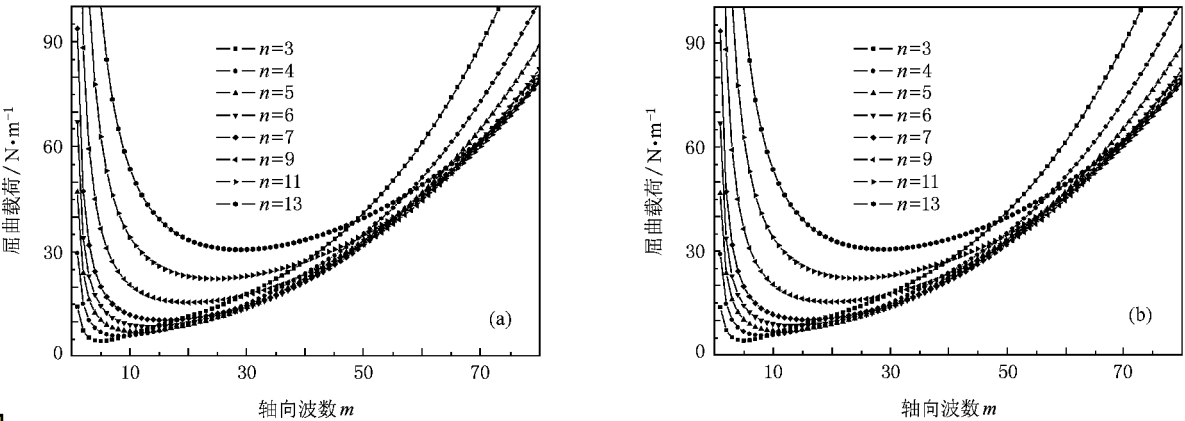


图 2 高温环境中热耦合作用下双壁碳纳米管的扭转屈曲载荷随波数  $m, n$  的变化关系 (a)  $T = 100\text{ K}$ , (b)  $T = 200\text{ K}$

图 3 给出了低温和高温环境中 ,温度变化时双壁碳纳米管的扭转屈曲载荷随波数  $m, 3$  的变化关系 .从图 3 可以看出 ,在低温环境中 ,温度变化量的

增加使得双壁碳纳米管的临界扭转屈曲载荷提高 ,而在高温环境时 ,温度变化量的增加使得双壁碳纳米管的临界扭转屈曲载荷明显地降低 .

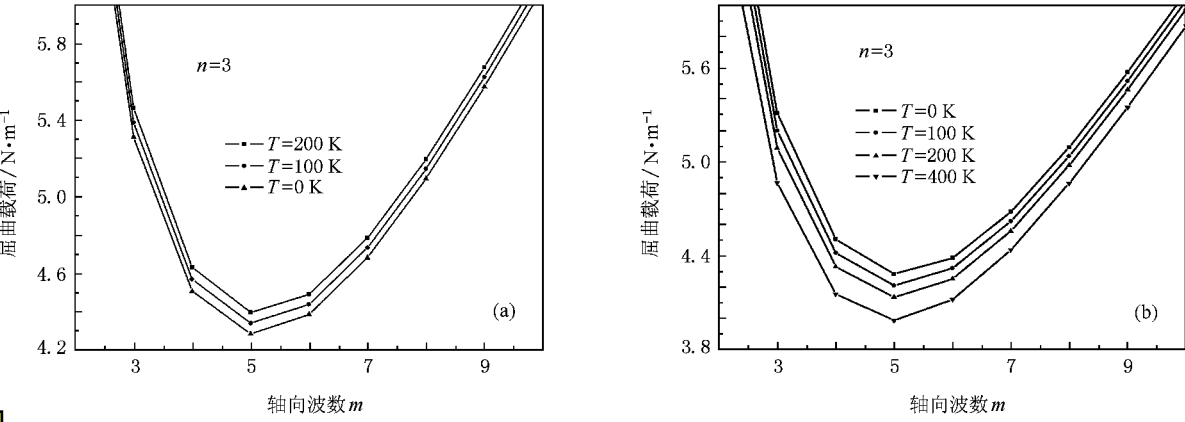


图 3 热耦合作用下双壁碳纳米管的扭转屈曲载荷随波数  $m, 3$  的变化关系 (a) 低温环境中 (b) 高温环境中

6. 结 论

本文考虑了双层碳纳米管层间范德瓦耳斯力的作用 , 利用连续介质力学的壳体理论 , 建立了热力耦合作用下碳纳米管屈曲问题的控制方程 , 给出了相

应的临界屈曲扭矩的解析解 . 通过简化分析 , 得到的结果与经典弹性壳模型的结果以及文献 [ 17 ] 的结果完全一致 . 数值模拟结果表明 , 在低温和室温环境下 , 碳纳米管的临界屈曲载荷随着温度变化量的增加而提高 ; 在高温环境下 , 碳纳米管的临界屈曲载荷随着温度变化量的增加而降低 .

[ 1 ] Iijima S 1991 *Nature* **354** 56

[ 2 ] Iijima S , Brabec C , Maiti A , Bernhole J 1996 *J. Chem. Phys.* **104** 2089

[ 3 ] Treacy M M J , Ebbesen T W , Gibson J M 1996 *Nature* **381** 678

[ 4 ] Postma H W , Teepen T , Yao Z , Grifoni M , Dekker C 2001 *Science* **292** 76

[ 5 ] Yakobson B I , Brabec C J , Bernholc J 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 2511

[ 6 ] Liew K M , Wong C H , He X Q , Tan M J , Meguid M A 2004 *Phys. Rev. B* **69** 115429

[ 7 ] Liew K M , He X Q , Wong C H 2004 *Acta Mater.* **52** 2521

[ 8 ] Wang Y , Wang X X , Ni X G , Wu H A 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 3120 ( in Chinese ) [ 王 宇、王秀喜、倪向贵、吴恒安 2003 物理学报 **52** 3120 ]

[ 9 ] Wang Y , Wang X X , Ni X G , Wu H A 2005 *Comp. Mater. Sci.* **32** 141

[ 10 ] Wang Y , Ni X G , Wang X X , Wu H A 2003 *Chin. Phys.* **12** 1007

[ 11 ] Chen W , Luo C L 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 386 ( in Chinese ) [ 陈伟、罗成林 2006 物理学报 **55** 386 ]

[ 12 ] Ruoff R S , Tersoff J , Lorents D C , Subramoney S , Chan B 1993 *Nature* **364** 514

[ 13 ] Tersoff J , Ruoff R S 1994 *Phys. Rev. Lett.* **73** 676

[ 14 ] Lu J 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 1297

[ 15 ] Falvo M R , Clary G J , Taylor R M , Chi V , Brooks F P , Washburn S 1999 *Nature* **397** 236

[ 16 ] Ru C Q 2001 *J. Mech. Phys. Solids* **49** 1265

[ 17 ] Han Q , Lu G X 2003 *Eur. J. Mech. A* **22** 875

[ 18 ] Han Q , Lu G X , Dai L M 2005 *Compos. Sci. Technol.* **65** 1337

[ 19 ] He X Q , Kitipornchai S , Liew K M 2005 *J. Mech. Phys. Solids* **53** 303

[ 20 ] Xie G Q , Han X , Long S Y , Tian J H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 226 ( in Chinese ) [ 谢根全、韩 旭、龙述尧、田建辉 2005 物理学报 **54** 226 ]

[ 21 ] Jiang H , Liu B , Huang Y , Hwang K C 2004 *J. Eng. Mater. Technol.* **126** 265

# Torsional buckling of a double-walled carbon nanotube under the action of coupled thermo-mechanical load<sup>\*</sup>

Yao Xiao-Hu   Han Qiang<sup>†</sup>

( *School of Civil and Transportation Engineering , South China University of Technology , Guangzhou 510640 , China* )

( Received 10 May 2007 ; revised manuscript received 27 March 2008 )

## Abstract

Taking into account the effects of surrounding elastic medium and van der Waals forces between the inner and outer nanotubes and using the shell theory in continuum mechanics , the governing equation of carbon nanotube under the action of coupled thermo-mechanical load is established. Based on the model , an explicit formula for the critical load is derived in terms of the buckling modes of the shell and the parameters that indicate the effects of temperature change , surrounding elastic medium and the van der Waals force. Numerical simulation results show that at low and room temperature the critical load for infinitesimal buckling of a double-walled carbon nanotube increases as the value of temperature change increases , while at high temperature the critical load for infinitesimal buckling of a double-walled carbon nanotube decrease as the value of temperature change increases.

**Keywords :** carbon nanotube , buckling , coupled thermo-mechanical load

**PACC :** 4620 , 4630L , 6148

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China( Grant No. 10672059 ) and the Natural Science Foundation of Guangdong Province , China( Grant No. 06025689 ).

<sup>†</sup> E-mail : emqhan@scut.edu.cn