第 57 卷 第 9 期 2008 年 9 月
1000-3290/2008/57(09)/5366-03

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.57,No.9,September,2008

厄尔尼诺大气物理机理的周期解*

李晓静†

(江苏技术师范学院数理学院,常州 213015)

(安徽师范大学数学计算机科学学院,芜湖 241000)

(2007 年 10 月 1 日收到;2008 年 2 月 19 日收到修改稿)

运用重合度理论探讨了一类非线性问题的周期解.然后将其应用于一个厄尔尼诺大气物理机理振荡,简捷地得到了该模型的周期解.

关键词:非线性,厄尔尼诺现象,周期解

PACC:0230

1. 引　　言

厄尔尼诺(El Niño)大气物理现象是发生在热带大气和海洋中的异常事件,是热带大气和海洋运动相互作用的表现.El Niño 大气物理现象是一个复杂的非线性系统,它的发生严重地影响全球各地区气候和生态等方向的变化.它的气候异常,带来了许多灾害.对全球的经济发展和人类生活都带来了严重影响.因此对它的规律和预防的研究,为当前学术界所关注的问题.许多学者已经用了不同的方法对它的局部性和整体性的性态作了多方位的研究[1—12].Lin 等人在大气物理,海洋气候,动力系统等方面,利用数值分析等方法研究了相关的问题[13—17].莫嘉琪等人也研究了 El Niño 大气物理问题[18—23].Li 在大气物理方面,利用重合度理论研究了相关问题的周期性的性态[24,25].本文在上述工作的基础上,研究了一个典型的 El Niño 海气模型的周期行为.

本文考虑如下一个典型的 El Niño 海气模型:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = AT - \epsilon T^3 - BT^3(t-\delta), \tag{1}$$

其中 T 为东赤道附近太平洋中的异常海表温度距平 SST,A,B,δ 和 ϵ 为正的模型参数,其物理含义和定义参见文献[1,2,16].本文先从理论上借助重合度理论求得较一般的非线性方程的周期解,然后将其应用于模型(1),得到该模型的周期解.

2. 理论探讨

现考虑如下非线性方程:

$$T'(t) = f(T(t)) + g(T(t-\delta)) \tag{2}$$

的 ω 周期解存在性问题,其中 $f,g\in C(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R})$,$\omega$ 为一正常数.

定理 1　如果存在常数 $\sigma>0,d>0,r\geqslant 0,l\geqslant 0,n>1$,使得下列条件满足:

(A_1) $-f(T)T\geqslant\sigma|T|^n - h(T)$,$\forall T\in\boldsymbol{R}$,其中 $h\in C(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R})$满足

$$\lim_{|T|\to+\infty}\frac{|h(T)|}{|T|^n} = r;$$

(A_2) $T(f(T)+g(T))<0,\forall |T|>d$;

(A_3) $\displaystyle\lim_{|T|\to+\infty}\frac{|g(T)|^{\frac{n}{n-1}}}{|T|^n} = l.$

则当 $\sigma > r + l^{\frac{n-1}{n}}$ 时,方程(2)至少存在一个 ω 周期解.

证明　我们分别定义算子

$$L:D(L)\subset X, LT = T'$$

和

$$N:X\to X,[NT](t) = f(T(t)) + g(T(t-\delta)), \tag{3}$$

其中 $X = C_\omega = \{x\mid x\in C(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}):x(t+\omega)\equiv x(t)\}$,其模为 $|\varphi|_0 = \max\limits_{t\in[0,\omega]}|\varphi(t)|$,$\forall\varphi\in C_\omega$,$D(L) = \{T\in C_\omega: T'\in C(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R})\}$,显然 X 为

* 国家自然科学基金(批准号:40676016)和安徽省教育厅自然科学基金重点项目(批准号:KJ2008A05ZC)资助的课题.

† E-mail:lixiaojing14@tom.com

Banach 空间. 易见，方程(3) 可以转化为算子方程 $LT = NT$. 此外，根据算子 L 的定义，易见 $\mathrm{Ker}L = \boldsymbol{R}$，$\mathrm{Im}L = \{T: T \in X, \int_0^\omega T(s)ds = 0\}$，因此 L 是指标为零的 Fredholm 算子[26]. 令投影算子 P, Q 分别为

$$P: X \to \mathrm{Ker}L, PT = T(0);$$

$$Q: X \to \mathrm{Im}Q, QT = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega T(t)\mathrm{d}t,$$

则 $\mathrm{Im}P = \mathrm{Ker}L = \boldsymbol{R}$，$\mathrm{Ker}Q = \mathrm{Im}L$. 令 $K: \mathrm{Im}L \to D(L) \cap \mathrm{Ker}P$ 表示 $L|_{\mathrm{Ker}\cap D(L)}: \mathrm{Ker}P \cap D(L) \to \mathrm{Im}L$ 的唯一逆，则

$$[Ky](t) = \int_0^t y(s)\mathrm{d}s \in D(L). \tag{4}$$

由(3)和(4)式易证 N 在 $\bar{\Omega}$ 上是 L 紧的，其中 Ω 为 X 中的任意有界开集.

记 $\Omega_1 = \{T: T \in D(L) \subset C_\omega, LT = \lambda NT, \lambda \in (0,1)\}$. $\forall T \in \Omega_1$，得

$$T'(t) = \lambda f(T(t)) + \lambda g(T(t-\delta)), \tag{5}$$

将方程(5)两边同乘以 $T(t)$ 并分别在 $[0,\omega]$ 上积分得

$$\int_0^\omega f(T(t))T(t)\mathrm{d}t = -\int_0^\omega g(T(t-\delta))T(t)\mathrm{d}t,$$

结合条件(A_1)可得

$$\begin{aligned}&\sigma\int_0^\omega |T(t)|^n \mathrm{d}t\\ \leqslant &\int_0^\omega |h(T(t))|\mathrm{d}t\\ &+ \int_0^\omega |g(T(t-\delta))||T(t)|\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{6}$$

由条件 $\sigma - r - l^{\frac{n-1}{n}} > 0$ 可知，存在充分小的 $\bar{\epsilon} > 0$，使得

$$(r+\bar{\epsilon}) + (l+\bar{\epsilon})^{\frac{n-1}{n}} < \sigma,$$

根据条件(A_1)和(A_3)，我们知道对上述的 $\bar{\epsilon} > 0$，存在与 λ 和 x 无关的 $\rho > 0$，使得

$$\frac{|h(T)|}{|T|^n} < r + \bar{\epsilon}, \forall |T| > \rho, \tag{7}$$

$$\frac{|g(T)|^{\frac{n}{n-1}}}{|T|^n} < l + \bar{\epsilon}, \forall |T| > \rho, \tag{8}$$

取 $E_1 = \{t \in [0,\omega], |T(t)| \leqslant \rho\}$，$E_2 = \{t \in [0,\omega], |T(t)| > \rho\}$，则由(6)—(8)式可得

$$\begin{aligned}&\sigma\int_0^\omega |T(t)|^n\mathrm{d}t\\ \leqslant &\left(\int_{E_1} + \int_{E_2}\right)|h(T(t))|\mathrm{d}t\\ &+ \left[\left(\int_{E_1} + \int_{E_2}\right)|g(T(t))|^{\frac{n}{n-1}}\mathrm{d}t\right]^{\frac{n-1}{n}}\\ &\times\left(\int_0^\omega |T(t)|^n\mathrm{d}t\right)^{1/n}\\ \leqslant &(r+\bar{\epsilon})\int_0^\omega |T(t)|^n\mathrm{d}t\\ &+ (l+\bar{\epsilon})^{\frac{n-1}{n}}\int_0^\omega |T(t)|^n\mathrm{d}t\\ &+ (g_\rho^{\frac{n}{n-1}}\omega)^{\frac{n-1}{n}}\left(\int_0^\omega |T(t)|^n\mathrm{d}t\right)^{1/n} + h_\rho\omega,\end{aligned}$$

其中 $h_\rho = \max\limits_{|T|\leqslant\rho}|h(T)|$，$g_\rho^{\frac{n}{n-1}} = \max\limits_{|T|\leqslant\rho}|g(T)|^{\frac{n}{n-1}}$，即

$$\begin{aligned}&\left(\sigma - (r+\bar{\epsilon}) - (l+\bar{\epsilon})^{\frac{n-1}{n}}\right)\int_0^\omega |T(t)|^n\mathrm{d}t\\ \leqslant &(g_\rho^{\frac{n}{n-1}}\omega)^{\frac{n-1}{n}}\left(\int_0^\omega |T(t)|^n\mathrm{d}t\right)^{1/n} + h_\rho\omega.\end{aligned} \tag{9}$$

考虑到 $\frac{1}{n} < 1$ 和 $\sigma - (r+\bar{\epsilon}) - (l+\bar{\epsilon})^{\frac{n-1}{n}} > 0$，由(9)式可知存在与 T 和 λ 无关的常数 $M > 0$ 使得

$$|T|_0 < M.$$

令 $\Omega = \{T: |T|_0 < M + d\}$ 和 $\Omega_2 = \{T \in \partial\Omega: T \in \mathrm{Ker}L\}$，则 $\forall T \in \partial\Omega_2$，

$$QNT = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega [f(T) + g(T)]\mathrm{d}t \neq 0.$$

另一方面，令 $J: \mathrm{Im}Q \to \mathrm{Ker}L$ 为

$$H(T,\mu) = -\mu T + (1-\mu)JQNT, (T,\mu) \in \Omega \times [0,1],$$

那么，$\forall (T,\mu) \in (\partial\Omega \cap \mathrm{Ker}L) \times [0,1]$，我们有

$$H(T,\mu) = \frac{1-\mu}{\omega}\int_0^\omega [f(T) + g(T)]\mathrm{d}t - \mu T \neq 0.$$

因此

$$\begin{aligned}&\deg\{JQN, \Omega \cap \mathrm{Ker}L, 0\}\\ =&\deg\{H(T,0), \Omega \cap \mathrm{Ker}L, 0\}\\ =&\deg\{H(T,1), \Omega \cap \mathrm{Ker}L, 0\}\\ =&\deg\{-I, \Omega \cap \mathrm{Ker}L, 0\} \neq 0,\end{aligned}$$

根据 Mawhin 重合度拓展定理[26]，可知，方程(2)至少存在一个 ω 周期解.

3. El Niño 海气模型的周期解

易知，问题(1)是问题(2)当 $f(T) = AT - \varepsilon T^3$，$g(T) = -BT^3$ 的特殊情形. 相应于定理 1，此时 $\sigma = \varepsilon$，$r = 0$，$l = B^{4/3}$，$n = 4$，$d = 1$，故当 $A < \varepsilon + B$ 且 $\varepsilon > B$ 时，问题(1)至少有一个 ω 周期解.

4. 结　论

El Niño 大气物理现象是一个复杂的非线性系

统，它的产生不但影响区域和全球气候，而且还以其对全球广大地区带来严重旱涝等灾害而受全世界人们的重视. 实践表明它周期地出现，El Niño 大气物理现象是年际变化的，故而从理论上证明 El Niño 海气模型的周期解存在性是很有必要的.

[1] Feng G L，Dong W J，Jia X J，Cao H X 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 1181(in Chinese)[封国林、董文杰、贾晓静、曹鸿兴 2002 物理学报 **51** 1181]

[2] Liu S K，Fu Z T，Liu S D，Zhao Q 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 10(in Chinese)[刘式适、傅遵涛、刘式达、赵 强 2002 物理学报 **51** 10]

[3] Zhang J S，Xiao X C 2000 *Acta Phys*. *Sin*. **49** 1221(in Chinese)[张家树、肖先赐 2000 物理学报 **49** 1221]

[4] Feng G L，Dai X G，Wang A H，Chou J F 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 606 (in Chinese)[封国林、戴新刚、王爱慧、丑纪范 2001 物理学报 **50** 606]

[5] Wang B 1999 *J*. *Atmos*. *Sci*. **56** 5

[6] Guan X P，He Y H，Fan Z P 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 276 (in Chinese)[关新平、何宴辉、范正平 2003 物理学报 **52** 276]

[7] Guan X P，Chen C L，Fan Z P 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 753(in Chinese)[关新平、陈彩莲、范正平 2002 物理学报 **51** 753]

[8] Guan X P，Fan Z P，Peng H M，Wang Y Q 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 1670(in Chinese)[关新平、范正平、彭海明、王益群 2001 物理学报 **50** 1670]

[9] Hong L，Xu J X 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 612(in Chinese)[洪灵、徐建学 2001 物理学报 **50** 612]

[10] Li Z，Hao C Z 2002 *Chin*. *Phys*. **11** 9

[11] Lu J H，Zhang S C 2002 *Chin*. *Phys*. **11** 12

[12] Wang C 2001 *Adv*. *Atmospher*. Sci. **18** 674

[13] Lin W T 2000 *Chin*. *Sci*. *Bull*. **45** 1358

[14] Lin W T 2001 *Acta Air Dynam*. **19** 348(in Chinese)[林万涛 2001 空气动力学学报 **19** 348]

[15] Lin W T 2002 *Adv*. *Atmospher*. *Sci*. **19** 699

[16] Lin W T 2002 *Prog*. *Natur*. *sci*. **12** 102(in Chinese)[林万涛 2002 自然科学进展 **12** 102]

[17] Lin W T，Mo J Q 2004 *Chin*. *Sci*. *Bull*. **49** supp Ⅱ 5

[18] Mo J Q，Lin W T，Zhu Jiang 2004 *Progress in Natural Sci*. **14** 1126

[19] Mo J Q，Lin W T 2005 *Chin*. *Phys*. **14** 875

[20] Mo J Q，Lin W T，Wang H 2007 *Chin*. *Phys*. **16** 578

[21] Mo J Q，Lin W T，Lin Y H 2007 *Chin*. *Phys*. **16** 1009

[22] Mo J Q，Wang H，Lin W T 2006 *Chin*. *Phys*. **15** 1450

[23] Mo J Q，Lin W T 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 1081(in Chinese)[莫嘉琪、林万涛 2005 物理学报 **54** 1081]

[24] Li X J 2007 *Chin*. *Phys*. **16** 2837

[25] Li X J 2008 *Chin Phys*. B **17** 1946

[26] Gaines R E，Mawhin J L 1977 *Coincidence Degree and Nonlinear Differential Fquations* (Berlin :Springer)

The periodic solutions of El Niño mechanism of atmospheric physics *

Li Xiao-Jing†

(*College of Mathematics and Physics*，*Jiangsu Teachers University of Technology*，*Changzhou* 213015，*China*)

(*Department of Mathematics*，*Anhui Normal University*，*Wuhu* 241000，*China*)

(Received 1 October 2007 ; revised manuscript received 19 February 2008)

Abstract

Using Mawhin's continuation theorem，the periodic solutions for a class of nonlinear problem are first discussed. An El Niño atmospheric physicsal mechanism is applied and the periodic solutions for its model are obtained.

Keywords：nonlinear，El Niño phenomenon，periodic solution

PACC：0230

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 40676016) and the Key Natural Science Faundation by the Bureau of Education of Anhui Province，China (Grant No. KJ2008A05ZC).

† E-mail：lixiaojing14@tom.com