

自旋为 1 的三粒子 Heisenberg XXX 链中杂质 对热纠缠的影响*

秦 猛^{1)†} 田东平²⁾ 陶应娟³⁾

1) 解放军理工大学理学院, 南京 211101)

2) 西安邮电学院, 西安 710061)

3) 西安交通大学理学院, 西安 710049)

(2007 年 9 月 3 日收到, 2008 年 1 月 5 日收到修改稿)

采用纠缠的度量方法 Negativity 研究了匀强磁场下自旋为 1 的含杂质三粒子 Heisenberg XXX 链的热纠缠特性. 通过计算系统的杂质位与其余部分间的两体纠缠 $N_{1,23}$ 及正常位与其余部分间的两体纠缠 $N_{12,3}$, 发现纠缠存在的临界温度 T_c 的改变来自杂质参数 J_1 的变化. 随杂质参数 J_1 的增加而增加, 外界磁场 B 的存在会降低纠缠值, 但并不会改变临界温度. 可以通过调节杂质参数 J_1 和外界磁场 B 来控制两体纠缠 $N_{1,23}$ 和 $N_{12,3}$ 的大小.

关键词: 热纠缠, Heisenberg XXX 链, 杂质

PACC: 0365, 7510J

1. 引 言

纠缠是量子力学的一个核心概念. 随着量子信息论的发展, 量子纠缠已经作为一种重要的资源应用于量子计算和量子通讯中. 利用纠缠可以实现超密集编码^[1,2], 量子隐形传输^[3], 量子密钥分发^[4,5]等经典方法难以实现的行为, 具有保密、高速、超大容量的特点, 也可以提供量子通道以及量子通用门的构造. 在 Heisenberg 模型自旋粒子间发现的量子热纠缠^[6]现象, 很有可能得到实际运用. 目前已对自旋为 1/2 的各种不同 Heisenberg 模型^[7-11]相邻粒子间的热纠缠的研究有了很大的进展, 但由于 Heisenberg 自旋链中的纠缠是一种混合纠缠, 迄今为止, 对混合纠缠的一种严格的度量方法是采用 Concurrence (C)^[12]来计算两粒子间的纠缠, 但仅研究低自旋和两粒子间的纠缠是远不够的.

Vidal 等提出了混合纠缠还可以用 Negativity (N)^[13]来度量. Negativity 在局域操作下不会增加, 因而符合纠缠的度量标准. 在有限温度下, 它可以度量 n 粒子系统的任意两部分 $\{m\}$ — $\{n-m\}$ 间的纠缠, 也可以度量任意子系统间的纠缠, 其优点主要在于可以度量自旋大于 1/2 的粒子的纠缠. 我们知道, 绝

大多数系统的自旋是大于 1/2 的, 比如磁性分子 Fe_8 和 Mn_4 [1], 而 Concurrence 主要适用于自旋 1/2 系统, 那么利用 Negativity 研究自旋大于 1/2 系统的两体热纠缠就显得十分的有必要. 关于这种度量方法已经有相关的研究工作^[14-24]. 然而, 还少有论文考虑杂质问题, 由于杂质的存在会影响系统的纠缠特性, 因此采用 Negativity 来研究自旋为 1 的含杂质 Heisenberg 模型的纠缠特性是有意义的.

本文主要研究了自旋为 1 的三粒子掺杂 Heisenberg XXX 链的纠缠特性. 首先对该模型以及纠缠的度量方法 Negativity 进行介绍, 随后对该模型进行数值模拟求解及讨论, 主要分析和讨论了绝对零度下的基态纠缠和有限温度下的热纠缠伴随杂质, 温度以及磁场的变化情况.

2. 系统描述

考虑自旋为 1 的 Heisenberg XXX 链, 其 Hamiltonian 量可以写为

$$H = \sum_{n=1}^N J_n S_n^\alpha \cdot S_{n+1}^\alpha, \quad (1)$$

其中 S_n^α ($\alpha = x, y, z$) 为自旋算符, J_n 为第 n 个和第 n

* 陕西省自然科学研究计划(批准号 2004A15)资助的课题.

† E-mail: qrainm@gmail.com

+1 个自旋格点间的近邻相互作用. $J < 0$ 代表铁磁情况, $J > 0$ 代表反铁磁情况. 采用周期性边界条件, 故 $N + 1 \equiv 1$. 当粒子自旋为 1 时, 自旋算符的三个分量取下面的形式:

$$\begin{aligned} S_i^x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ S_i^y &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \\ S_i^z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2)$$

本文只考虑三粒子情形, 并且假设杂质位于格点 1 即 $J_1 = J_3 \equiv J_1, J_2 = J$. 此时包含外界磁场 B 作用的 Hamiltonian 量(1)式可以进一步写为

$$\begin{aligned} H &= J_1(S_1^x S_2^x + S_3^x S_1^x + S_1^y S_2^y + S_3^y S_1^y \\ &+ S_1^z S_2^z + S_3^z S_1^z) \\ &+ \mathcal{K}(S_2^x S_3^x + S_2^y S_3^y + S_2^z S_3^z) \\ &+ B \sum_{i=1}^3 S_i^z, \end{aligned} \quad (3)$$

其中 J_1 为杂质格点与正常格点间近邻相互作用, J 为正常格点之间近邻相互作用. 当温度为 T 时, 在热平衡条件下的系统的态可写为 $\rho = Z^{-1} \exp(-\beta H)$, Z 为系统的配分函数, $Z = \text{tr}(\exp(-\beta H))$, $\beta = 1/k_B T$, k_B 为玻尔兹曼常数, 为简单起见, 一般令 $k_B \equiv 1$.

以 $| -1 -1 \rangle, | -1 0 \rangle, | -1 1 \rangle, | 0 -1 \rangle, | 0 0 \rangle, | 0 1 \rangle, | 1 -1 \rangle, | 1 0 \rangle, | 1 1 \rangle$ 为基矢, 我们可以得到系统的本征值 E_i 和本征态 $|\psi_i\rangle$. 由于矩阵维数过高, 将本征值和本征态全部写出将是非常繁琐, 所以我们不拟给出关于本征值和本征态的详细表达. 在系统

本征值 E_i 和本征态 $|\psi_i\rangle$ 的基础上, 我们可以写出系统的密度矩阵表示, 即

$$\rho = \frac{1}{Z} \sum_i e^{-\beta E_i} |\psi_i\rangle \langle \psi_i|. \quad (4)$$

根据文献, 系统的两体纠缠可用 Negativity^[13] (N) 度量, 即

$$N(\rho) = \frac{\|\rho^{TA}\|_1 - 1}{2}, \quad (5)$$

这里 ρ^{TA} 代表对 A 系统进行部分转置. $\|\rho^{TA}\|_1 = \text{tr} \sqrt{[\rho^{TA}]^+ \rho^{TA}}$. 于是系统的杂质位与其余部分, 及单个正常位与其余部分间的两体纠缠可以表示为

$$N = \begin{cases} N_{1-A} = (\text{tr} |\rho^{1-A}| - 1)/2 \text{ 或 } \sum_i |(\mu_{1-A})_i|, \\ N_{n-A} = (\text{tr} |\rho^{n-A}| - 1)/2 \text{ 或 } \sum_i |(\mu_{n-A})_i|, \end{cases} \quad (6)$$

其中 A 表示除量子位 $1(n)$ 外的其余量子位, ρ^{1-A} (ρ^{n-A}) 表示对位 $1(n)$ 的部分转置. 矩阵 $(\mu_{1-A})_i$ ($(\mu_{n-A})_i$) 表示相应部分转置矩阵的负本征值.

3. 结果和讨论

首先讨论无磁场绝对零度的纠缠变化情况. 图 1 为 $B = T = 0$ 时, 两体热纠缠伴随 J 和 J_1 的变化. 图 1(a) 为两体纠缠 N_{1-23} 伴随 J 和 J_1 的变化, 由图可以看出, 当 $J_1 < 0$ 时, 无论 J 为正为负都没有纠缠. 只有当 $J_1 > 0$ 时才出现纠缠. 在 $J < 0$ 时, 无论杂质参数增长多大, 杂质和正常格点之间的两体纠缠最大只能为 0.5 左右, 而当 $J > 0$ 时, 纠缠在 J 和 J_1 相等时达到最大值 1. 图 1(b) 为两体纠缠 N_{12-3} 伴随 J 和 J_1 的变化. 不同于(a)处在于当 $J_1 < 0$ 时, $J < 0$

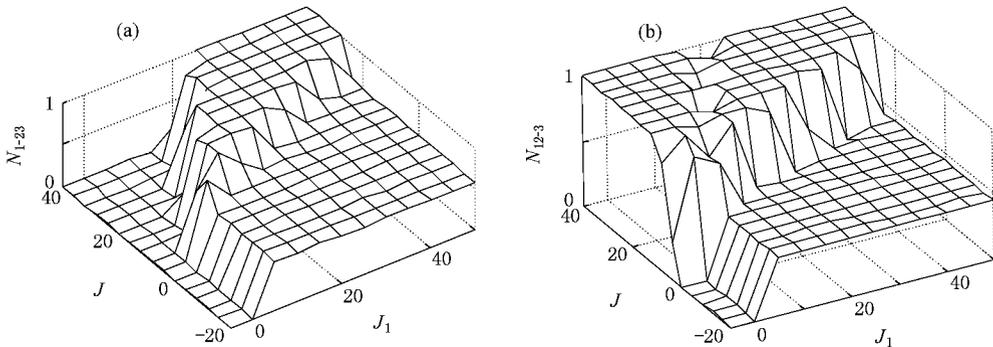


图 1 $T = B = 0$ 时纠缠伴随 J_1 和 J 的变化 (a) N_{1-23} ; (b) N_{12-3}

时不存在纠缠,但是 $J > 0$ 时却可以出现纠缠,之所以出现这种不同,对 N_{1-23} ,由于 1 粒子和其余粒子的自旋耦合都是 J_1 ,这一纠缠将很大程度上由 J_1 的情况决定,对于 $J_1 < 0$ 的铁磁,在不加外场时是没有纠缠的,而对于图 1(b) 3 粒子和其余自旋粒子的耦合分别是 J 和 J_1 ,都为负时的铁磁没有纠缠,只要一个是反铁磁情况就存在纠缠.当然这也需要自旋相互作用 J 达到一定数值纠缠才存在,就是说要产生自旋粒子间的纠缠,必须使交换作用达到一定的值,相对较小的值是不能产生纠缠的.

随后研究普遍情形,即有限温度时的热纠缠.图

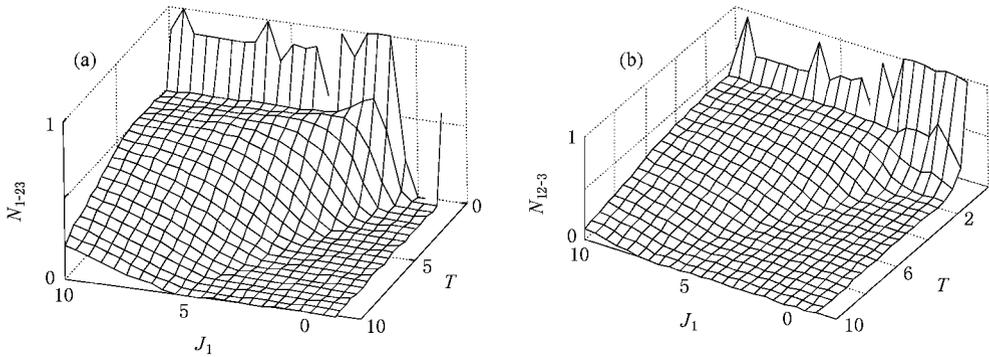


图 2 $B = 0, J = 1$ 时纠缠伴随 J_1 和 T 的变化 (a) N_{1-23} ; (b) N_{12-3}

进而考虑磁场对纠缠的影响.图 3 为 $J = 1, T = 0.5$ 时,纠缠伴随磁场 B 和杂质参数 J_1 的变化.由图可以看出, $B > 0$ 和 $B < 0$ 时纠缠伴随 B 的变化对称.纠缠之所以会出现这种现象,主要是因为当 $B \rightarrow -B$ 时,系统的本征态和本征值不变,即纠缠关于 $B = 0$ 对称.随着磁场的增加,纠缠逐渐降低.还可以看出,由于杂质的存在,纠缠随磁场的变化并非单调

地减小,在一定的杂质参数 J_1 下,纠缠伴随磁场会出现先增加后减小的现象.这说明了纠缠受到杂质参数 J_1 的控制,杂质对纠缠的影响比较明显.另外,很明显图 3 中 N_{12-3} 的纠缠是小于 N_{1-23} 的, N_{1-23} 的纠缠可以达到最大值 0.84242,而 N_{12-3} 的纠缠最大值为 0.5807 左右.进一步说明了纠缠的大小可以通过控制杂质来实现.

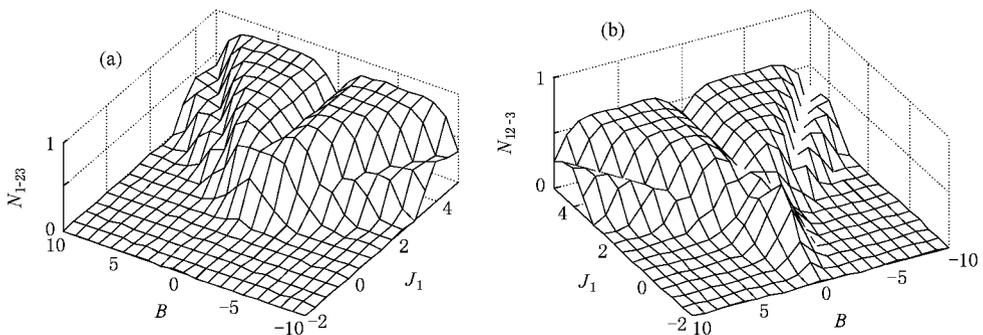


图 3 $T = 0.5, J = 1$ 时纠缠伴随 J_1 和 B 的变化 (a) N_{1-23} ; (b) N_{12-3}

4. 结 论

采用纠缠的度量方法 Negativity 研究了匀强磁场作用下自旋为 1 的三粒子含杂 Heisenberg XXX 链的纠缠特性;Negativity 是对两体系统的可计算的一种纠缠,因此采用它来计算热纠缠是有意义的.研究发现,纠缠存在的临界温度 T_c 随着杂质参数 J_1 的增加而增加,外界磁场 B 的变化并不改变临界温

度,但磁场的增加一般会减小纠缠.在给定杂质参数 J_1 的情况下,两体杂质纠缠随温度升高而降低,因为随着温度的升高,其他激发态参与到纠缠中来,使纠缠降低.对于自旋为 1 的含杂质 Heisenberg XXX 链,相比于温度 T 和磁场 B ,杂质参数 J_1 对两体纠缠的大小和存在影响较大,从而我们可以根据需要通过改变各个参量来控制 and 生成两体纠缠.我们的研究结果对于在量子信息处理过程中如何构建试验和如何考虑参数的影响有一定的作用.

- [1] Mattle K, Weinfurter H, Kwiat P G, Zeilinger Z 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 4656
- [2] Schumacher B 1995 *Phys. Rev. A* **51** 2738
- [3] Kim Y H, Kulik S P, Shih Y 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 1370
- [4] Ekert A K 1991 *Phys. Rev. Lett.* **67** 661
- [5] Deutsch D, Ekert A, Jozsa R, Macchiavello C, Popescu S S 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 2818
- [6] Nielsen M A 1998 *Quantum information theory* (American : University of New Mexico)
- [7] Amesen M C, Bose S, Vedral V 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 017901
- [8] Wang X G 2002 *Phys. Rev. A* **66** 034302
- [9] Kevin M O, William K W 2001 *Phys. Rev. A* **63** 052302
- [10] Asoudeh M, Karimipour V 2005 *Phys. Rev. A* **71** 02230
- [11] Xi X Q, Chen W X, Liu Q, Yue R H 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3026 (in Chinese) 惠小强、陈文学、刘 起、岳瑞宏 2006 物理学报 **55** 3026]
- [12] Wootters W K 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2245
- [13] Vidal G, Werner R F 2002 *Phys. Rev. A* **65** 032314
- [14] Zhou L, Yi X X, Song H S, Guo Y Q 2005 *Chin. Phys.* **14** 1168
- [15] Zhang G F, Li S S 2006 *Solid. State. Comm.* **138** 17
- [16] Zhang G F *quan-ph/0509014*
- [17] Tao Y J, Hu M L, Tian D P, Qin M 2007 *HEP & NP* **31** 990
- [18] Wang X, Li H B, Sun Z, Li Y Q 2005 *J. Phys. A* **38** 8703
- [19] Tian D P, Qin M, Tao Y J, Hu M L 2007 *HEP & NP* **31** 1082
- [20] Sun Z, Wang X, Li Y Q 2005 *N. J. Phys.* **7** 83
- [21] Li S B, Xu Z X, Dai J H, Xu J B 2006 *Phys. Rev. B* **73** 184411
- [22] Rossignoli R, Canosa N 2005 *Phys. Rev. A* **72** 012335
- [23] Canosa N, Rossignoli R 2006 *Phys. Rev. A* **73** 022347
- [24] He M M, Xu C T, Liang J Q 2006 *Phys. Lett. A* **358** 381

The effect of impurity on the thermal entanglement in three-qutrit spin-1 Heisenberg XXX chain^{*}

Qin Meng^{1,†)} Tian Dong-Ping²⁾ Tao Ying-Juan³⁾

¹⁾ *Institute of Science, PLA University of Science and Technology, Nanjing 211101, China*

²⁾ *Xi'an Institute of Post and Telecommunications, Xi'an 710061, China*

³⁾ *School of Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China*

(Received 3 September 2007; revised manuscript received 5 January 2008)

Abstract

We investigate the impurity entanglement of 3-qutrit XXX-type Heisenberg chains in the presence of a uniform magnetic field along z axis by means of negativity. The entanglement is calculated as a function of the coupling constants J , impurity parameter J_1 , magnetic fields B and temperature T . Through calculating the negativity between sites 1 and (2, 3) N_{1-23} and sites 3 and (1, 2) N_{12-3} , we show that the critical temperature T_c above which the entanglement vanishes increases with the increase of J_1 . The existence of magnetic fields B can obviously reduce the entanglement, and it is found that the limiting temperature T_c depends on the impurity parameter J_1 but not on the magnetic field.

Keywords : thermal entanglement, Heisenberg XXX chain, impurity

PACC : 0365, 7510J

^{*} Project supported by the Natural Science Research Project of Shaanxi Province (Grant No.2004A15).

[†] E-mail : qrainm@gmail.com